

# 初等幾何学の体裁

林  
鶴  
一



## 序 言

明治四十四年八月中東北帝國大學理科大学は夏季休業に際して學術講演會を催す、教授する処の学科は数学科のみなりしが、余其の一部を分担して講演の題目を「初等幾何学の体裁」とす。聴講者七十有余名に達し盛會なりし。

本篇は出版書肆の請に依り其の講演を速記せしめたるものなり、東北帝國大學理科大学は其時恰も創設の期間にありて百事未だ整頓せず余等は諸般の事務に關して極めて繁忙なりし、加之未だ繁忙とならざりし時、出演を約し置きたる帝國教育會及び高知県教育會の夏季講習會にも臨席せざるべからざりしを以て、余は実の処準備乏しき講演をなすより外途なかりし、是れ極めて遺憾なりしが又止むを得ざる次第なりし。

今此の速記録を読み如何にも其内容の蕪雜淺薄なるを見、余は公刊を躊躇するものなるが他日更に之れを補正して完全のものたらしめんことを期し、兎も角も本篇を出版せしむ、若し本篇にして読者に多少の利益を与うるあらばそは誠に僥倖なりと云わざるべからず。

明治四十五年二月十日

仙台に於て

林 鶴 一

# 目次

第七講	第六講	第五講	第四講	第三講	第二講	第一講	序言
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

60	53	43	33	22	10	1	i
----	----	----	----	----	----	---	---

## 附 録

第一、非ユークリッド幾何学について

第二、科学の体裁

第三、経験の範囲と宇宙の限界

第四、数学と自然科学

73

73

91

101

116

## 第一講

緒言

夏休みの際に当りましてわざわざお集まりになりました御熱心は感佩の至りに堪えませぬ。然るに私の不才の爲め、皆さんが期待せらるる様な有益なる講義を致すと云うことの出来ないのは甚だ愧入つた次第であります。大学の創設の際で非常に忙がしく、微力の上に尚種々なる事務の方のことが沢山あります為に十分の準備をすと云うことも出来兼ねまして誠に申訳のない次第であります。又皆さんの中には御経験の方もありますように、講習というものは、非常に是れは講師の側から考えてやりにくい。甲の人に適當であることが、乙の人に必しも適當でないと言ふようなことがあります。私も其の辺を非常に心配致しました。皆さんに同じ程度に於て都合の好いと云う様な風に話をすると言ふことは、なかなか考えて居ると此の席に立つことは出来ないと思われる程に困難を感じます。が、其の辺は已むを得ませぬ。或場合には甲の人に都合の好いこともあり、或場合には乙の人に都合の好いこともあると云うことになるかも知れませぬが、其の辺は予め御承知を願います。

私がお話を致しまする題目は初等幾何学の体裁ということになつて居ります。純粹の学問としてお話するよりも、寧ろ、多くの御方は教育に従事せられて居るのであります。純粋の学問としてお上に利益のある側の諸点をお話しようと思ひます。余り高尚なことに立入ることは避けまして——またそう云う高尚なことは私に出来ませぬが、卑近な方へ、卑近な方へと向けてお話致します。或御方からは、そう云う詰らぬことは先刻承知であつて、わざわざ仙台まで来て聴く積りではなかつたと云う様な御批評を受けるかも知れませぬが、是れ亦前に申しました通り、講習の困難なる点でありまして、何とも致方はありませんで、兎に角私の考は、成可く卑近の方に向けてお話をしたいと考えるのであります。

先ず第一にお断りをするのは体裁と云う言葉であります。あまり今迄講義の題目などに或る学問の体裁というような言葉を用いたことはありませんが、其の積りは、吾々が初等幾何学と云うて居るものは如何様に組織されて居るかと言ふことに付てお話をするつもりなので。又形と云うても宜しい。体裁という言葉の代りに形という言葉を使つても宜かろう、或は組織と云うても宜かろうと思ひます。この幾何学の組織に就いて今迄度々諸方の教師の御方から質問せられたことが沢山ありますが、其等の質問は、その質問を發せられた人々のみに必要なものではなく、其外の御方にも矢張り必要なことであらうと思ひます。中等学校の教員の御方で、時々この初等幾何学の組織に付て疑問となる諸点があります。例えば公理と云うのは如何なるものであるか。定理の形は如何なるものであるか。と云う様なことに付て問題がありますから、そう云う問題を取集めて多少順序を立ててお話致したいと考へるのであります。

先ずそう云うことをお話するのには、一応幾何学の基礎土台というものは如何にして築き上げるかと云うことから始めなければならぬのであります。就いては其の幾何学の基礎と云う様なことを研究するに参考すれば利益であらうと思はれる書物を此処に挙げましょう。既に御承知の御方もありましよう。あまり変わったものは挙げない積りであります。

幾何学の基礎に  
関する参考書

- (1) Dixon——The foundations of geometry, 1801.
- (2) Voronese——Fondamenti di Geometria, 1891.  
=Grundzüge der Geometrie, 1894.
- (3) Killing——Grundlagen der Geometrie, 1893—1895.
- (4) Königsberger——Fundamental principles of mathematics, Smithsonian Report, 1896.

- (5) Russell—Essays on the foundations of geometry, 1897.
- (6) Poincaré—On the foundations of geometry, The Monist, 1898.
- (7) Hilbert—Grundlagen der Geometrie, 1899.  
=Foundations of geometry, 1902.
- (8) Russell—The principles of mathematics, vol I, 1903.
- (9) Withors—Euclid's parallel postulates, 1904.
- (10) Sehur—Grundlagen der Geometrie, 1909.
- (11) Frankland—Theories of parallelism, 1910.
- (12) Whitehead and Russell—Principia mathematica, vol I, 1911.

また日本語のもので、

菊池博士著 初等幾何学教科書随伴幾何学講義第一卷及び第二卷

は固より御承知と存じます、

是等の書物を詳細に掲げ出しますと随分多数でありますが先ず是れだけで止めましょう、私のつもりは此処に斯う云う種類の書物の完全な表を作り上げてしまうのでは決してない。唯其中の幾つかを思い出するままに並べたに過ぎませぬ。此外にもありますが、是れだけにして置きましょう。

#### 幾何学の字義

幾何学の英語は、御承知の通り Geometry と申しますが、このゼオメトリーという意義は、是れも既に知られている通り Earth's measure 陸地測量と云うことである。今日謂う所の幾何学というものは陸地測量と云うものではないけれど、元はそう云うものである。斯う云うことは外の学問にもよくあることで、代数学と云う言葉でも、今吾々が代数学と云うて居るものと古のものと比較して大変内容の



違いがある。Mathematics 数学と云う言葉も、もとを糾せば別に数の学問という意義はない、唯知識と云うことに過ぎない。ゼオメトリーの意義は、よく書物の初などに書いてある。マセマチックスの字義は、余り書いてないが只広い意味で知識とか学問とか云うので、数に関したり空間に関した意味は少しもないのであります。現在では平面幾何学と立体幾何学とを両方合わせてゼオメトリーと云って居りますが、希臘の時代には——いつでもとは限りませぬが、古い時代には平面幾何学ばかりをゼオメトリーと云って居った。それが後の時代には立体幾何学をも含ませることになりました。吾々は単にゼオメトリーと云えば平面と立体とを併せて指して居る。尚吾々日本人の使つて居る幾何学という言葉はどう云う意義か。是れも御承知の御方が沢山あるであらうが、一寸添えて置きましょう。幾何学というのは Geometry という字の支那人の翻譯であります。明の徐光啓という人が翻譯をした。幾何と云う字はイクバクと使うので、支那人も矢張り吾々の云う様な意味に使つて居る。イクバクと云うことが数に關係して居るから、数学の一分科の名前としては適當である。けれども、特に吾々の謂う幾何学を何故指すようになったかと云うと、是れは支那人に読ませると発音が似て居るからであります。支那は彼のように大きな国であるから処々に依つて発音は違いますが、通例はキーホー、或はケーホー、又はキーオーと云います。それがゲオと云うのと似て居る。そうして幸に数のことに關係のある幾何と云う字がありますから、そこで即ち発音の似て居るといふ所と、数に關係して居るといふ所から、そう云う風に翻譯したのである、と云うのが説であります。其外にも或は説があるかも知れませぬけれども、私は知りませぬ。

吾々が觀察する所の物体にはいろいろの性質が附屬して居る。物体とは如何なるものであるかと云うことも問題でありますが、唯今そう云う細かい処には入りませぬ。又其の性質とは如何なるものであ

るかと言ふことになる。これも非常にむずかしい。物体というものがなくって性質と言ふものが物体であるとか、物体と言ふものがあつて性質が出来るとか。そう云ふことは略しまして、兎も角も吾々の観察する所の物体にはいろいろの性質が属して居る。其の性質の中で何れを研究の目的とするか。いろいろの性質があるが、其の中で何れを研究の対象にするか。と云ふことに依つて其処にいろいろの学問が出来る。幾何学に於ては物体のいろいろの性質の中で唯其の形、大きさ、位置の三つに付てのみ注目して、其外の性質は毫も顧みないのであることは御承知の通りである。併し其の形、大きさ、位置という三つのものが是れが物体の性質と言ふべきものかどうか。位置と言ふのも性質である、大きと言ふのも性質である、形と言ふのも性質であると云ふことに付ては疑問もありましょう。けれども、それは性質と言ふことが如何なるものであるかと云ふことの極まつて来ない以上判定は出来ませぬ。そう云ふことが問題でありましょうが、併しそれは甚だ面倒な問題になりますから、先ず此処では性質として置きまして、あまり其の事に付ては深入は致しませぬ。

兎も角も形と大きさと位置とのみに関して見たところの物体。是れは吾々は立体と称えて居る。物体と言ふのは實在して居るけれども、立体と言ふものは存在して居るのではない。数学を組織するに当りてその何れの部分をも貫いて用いられて居るところの心の働きは抽象作用 Abstraction と云ふものである。そう云う心の働きがある。随つて概括作用 Generalization と云うものが終始用いられて居る。抽象作用と概括作用とは、違ふのは違ひますけれども、其の違ひのことにも余り立入りますまい。抽象と云つたらば概括すると云ふことになる。云ふことは、ざつと分る。抽象すると云ふのはまずざつとこうである。此処に或物があつて、其の物には要素或は性質と言ふものが五つあるとする。其中の二つだけ捨てる。即ち色とか堅さなどを捨てる。そうすると或具体的のものから違つたものが心の作用

で造らると云うことになる。そう云うものは元の二つの属して居ったものよりも、制限がなくなつた一般的东西と云われる。抽象と云うことと概括と云うこととは、やかましく云うと違つた所があるけれども又よく似た所はある。その抽象作用と概括作用と云うものが数学を貫いて居る。この心の働きがなくなつては、数学と云うものを組立てることは出来ない。今現に物体と云うものから立体と云う概念を得ると云うのが其れである。然のみならず幾何学で謂う物体なるものは、それは物体から出たものに違いありませぬが、普通に人々が考へて居るよりも尚一層激しい抽象作用を施して居ります。唯形と大きさと位置とのみに付てやるぞと、そう云うことに極まつたように云いますが、そう云うことより一層激しいことをやつた。例えば茲に立方体と云う言葉を使つて居る。立方体と云うのは一つの立体であるが、其の立方体の儘の物体は無論ありませぬが、其の立方体に色とか堅さとか云う他のあらゆる性質を附加したものがあつたかと云うと、それも無い。逆に戻して立方体の通りの形をもつて居る物体があつたかと云うにありませぬ。謂うのは、鐵の片にしても石の片にしても、それを以て立方体と云うものを拵へてあらん限りの力を盡して十分に其面を磨いて又其の角を四角にしたとする、さて其の面は人の眼で見たらば滑らかであります。又分度器で測つたら其の角は直角であります。けれども、それは幾何学で云う通りの完全な平面で囲まれて居り、又完全な直角が其処に出来て居ると云うことは出来ない。であるから唯形と大きさと位置とに付てやると云つても、實際の形に付てやつて居るかどうかわからない。いややつて居るのではない。物体から其の堅さとか色とか云うものを抜いたものをやると云うけれども、其れ以上に激しい抽象作用を施して居る。そう云うものを取去つたままのものは取扱わない。そう云うままのものでは立体というものが出来ない。出来てもそれは極めて不規則な形の立体で学問の力の及ばぬもので学問にはかからない。非常に規則正しい形のものでなければ

ば学問の力の及ぶ所でない。現在目の前にあるような不規則な形のものに依つては学問は成立たない。学問の領域と云うのは非常に情けないものである。非常に規則正しいようなものを自分自身に組立て置いて、実際とは離れてそう云うものを心の作用に依つて組立てて置いて、其れに就いて学問を組立てると云うことになる。其故にその学問を応用する時分はどうであるかと云うと、応用は出来ないのが至当だと云うても宜い位である。人は学問の応用なんと云うけれども、学問は応用が出来ぬと云うのが至当だとも云える。何故かと云うと、幾何学でも何でも、学問の基礎というものは、実在して居るもの其者を取扱うのでない。物理学者や化学者から言えば或は其の見解が違うかも知れぬが、恐らくはそうであろうと思う。実在して居るものから、多くは抽象作用概括作用と云うものに依つて組立てた理想的のもの。その理想的のものに就いて学問をすることは出来るが、そう云うものに就いて組立てた学問は之を元に戻して実際の場合に当嵌めることが出来るかと云うと、其の時分には、困難どころではない、当嵌まらぬ様なことがあつても致し方はない、そうなるのが当然でありましょう。

幾何学から物体を観察するときには、其の物体の占有して居る空間の部分と云うものを考えることが甚だ緊要である。其の空間の部分と云うものが即ち曩なごに云う所の物体の形、大きさ、及び位置ということに緊密なる関係を有つて居るのである。其故に幾何学の基礎を確乎たらしむるには空間とは如何なるものであるかと云うことを研究せねばならぬ。けれども、それは大問題である。数学者ばかりでなしに、殆ど凡ての哲学者が此の問題に就いては昔から苦心をして居る。吾々は、曖昧ではあるけれども何人と雖も空間を認識すると云うことは出来る。併し、如何なるものであるかと云う問に明答することは至つて難しいのである。只子供の時分から、いつとはなしに空間の概念が得られるようになって居る。どういふものだと言ふれば、手を拵げて空間を撫でる様にして斯う云うものだという様なパツ

としたことになつて居る。唯物体の存在するのを見て空間の觀念を得る様になつたのであると、斯う云うて居るだけのことである。しかし各個人の脳中に認められた空間の概念と云うものは皆違ふかも知れぬ。私なら私の脳中に考えて居る空間と云うのと、あなた方の脳中に考えて居る空間と云うのと違ふかも知れぬ。其故に幾何学を建設するに就いては、自己が認識した空間の性質を出来る限り陳述して置かねばならぬ。空間の觀念の要素と云うても宜からう。空間の觀念にはいろいろの要素がある。其の要素と云うものを出来る限り陳述して置かねければならない。而して此の如き陳述は、単に自己の認識した空間の性質であると云うことに止まるのであつて、他人の認識した空間の性質でないかも知れぬ。一致するかも知れぬが、一致するか一致しないかと云うことは、それは証明も何も出来るものでない。そうして此の如き空間の性質に関する陳述と云うものは、初等幾何学に於て、其の中の或者は述べられて居る。或者は述べられずに居る。若し其れが述べられて居るならば、多くは公理と云うものの中に述べられて居る。初等幾何学は完全なる演繹法に依つて組立てられたものと昔から云われて居るに拘らず、其の基礎の所には欠点がある。今現に用いて居る空間に関する公理に就いては曖昧な所が沢山に残されて居る。

純正学術としての幾何学と教育上の幾何学との相違

併ながら茲に一言して置くべきことがある。初等幾何学を組立てる時分に、一箇の学問として学者が要求する程それに完全なる論理的基礎を与えて置くべきかどうかと云うことと、教育上から觀た幾何学の取扱方に於て築くべき基礎は如何様にしたら宜いかと云うこととは別問題であると云うことを注意せんければならぬ。時々普通の教科書にある幾何学の理論に関して教師が其の欠点を挙げる。斯う云う処に理論の抜目があると云うて之を挙げると云うことがある。それは教師自身の学問研究としては至極必要なことであるけれども、其の研究の結果をば直に生徒に対して述べると云うことは、教

育上から見ては非常な害があることがある。それは害にならぬ場合もありますけれども、時に依つては余り面倒なことを言立てて生徒を困らすことがある。教師自身と雖も漸く気が着いたこと。今まで長年気の着かなかつたものが初めて氣着いたこと。それを翌日直に生徒に向つて陳べると云うことは非常な害になる場合がある。教師の方から云うと其の對手は生徒でありますから、其の生徒の学力に応じた程度に於て理論的完全を望むべきである。むやみに学者が要求する丈けのことを望んではならぬのであります。

曩に言つた通り、空間の觀念が既に各人異なるかも知れぬ、同じかも知れぬが、各人異なるかも知れぬものであるが故に、其の空間の觀念を基礎として構成せられた幾何学は、それは又種々雑多な組織又は形のものであつて妨げのない訳である。こう云うことになつてしまふ。即ち幾何学は一つでない。いろいろの幾何学が其処に出来て来て一向差支はないのである。そのいろいろの幾何学の中で、教育上、或は人間の現在の生活に向つて何れが最も適切であるかと云うことは、それは又別に判断を加ふべきものであります。それは問題が違つて来ます。

次に通例多くの人に依つて許された空間の性質を二三述べて見ましよう。

## 第二講

空間の性質

前講の仕舞は、空間の二三の性質を挙げよう、通例の人は空間に付て如何なる考をもつて居るか、其のいろいろなる性質の中で二三挙げて見よう。斯う云うことであります。

第一、空間は分ち得

第一は、空間は分つことが出来ると云うことを誰も考えて居る。既に今迄に於ても空間の部分と云う様なことを言いましたが、空間の部分と云うことを用いるならば、それは既に分つことが出来るものと考えて居るに相違ない。これは何人も疑を容れぬ所で有ましよう。第二には、空間は英語で云いますと homogeneous オモゲンであると云い一様等勢であると云つて居る。是れは前の第一の様には説明の仕易いものではない。この空間の中に一つの立体を仮想する。即ち空間の部分を仮想する。どれ程でも宜いから空間の部分を仮想して、而して更に他の位置に於て是れと同形同大の立体を仮想する。乃ち其の二つの立体は、位置に於て異なるばかりであつて其他は少しも異なる所はない。斯う云う風に考える。其時に、甲の立体の占有して居る空間の組織（組織という言葉が既に妙なことで、組織とはどう云うものであるかと云う様に先きから先きに疑問が起るが、それは已むを得ない）が乙の立体の占有して居る空間の組織と全く同一である、少しも変わる所はない。随つて其の空間に於ては一つの立体を何れの方向（方向と云うこともなかなかやかましいことで、本当はどう云うものであるかと問われると非常に窮するが、先ず通例の意味で使つて行く）に向つても動かさるる為めに、同じ有様に於て運動せしむることが出来る。例えば抵抗があるものとすれば、どつちへ突いても抵抗は同じであつて更に変りはない。斯う云う風に考える。つまりザツと通俗的に言えば、空間の中にブツブツの塊りが無い。斯う考えたのであります。此のことも矢張り前回言いました抽象的結果でそう云う風に言うのであります。実は吾々の実際に見て居るところの空間と云うものは処々でブツブツがある。変わった

### 第三、空間は連続的なり

ものがある。例えば処々で組織が變つて居ると云うても宜い。或処には物体がある、或処には物体がないと云う様な風になつて居る。いう様な処から考へて、人の脳中には今言つた様な極く一樣等勢な空間が其の儘存在して居るとは思われないのであるけれども、それでは取扱にくいので、そう云う空間を仮想する。(空間はオモゲンなる外にイソトロップ isotropic なりとも云わる、それ等のことはポアンカレ―原著拙訳「科学と臆説」第七十頁及び其他の頁を参照せられんことを望む)。第三は、空間は連続的 continuous である。この連続的と云うことも一寸言ひ表わすのに困りますが、空間の中に一つの点を拵ぶというとは、是れに如何程近い点でも何れの方向にも拵ぶことが出来る。元の点の周囲ならばどちらの方向でも、四方八方如何程近い点でもを拵ぶことが出来る。斯う云うことであります。けれども、是れで一寸満足して居つて宜さそうであるが、実はそうでない。例えば一つの有理数を取ると、其れに如何程でも近い有理数を取ることが出来る。併ながら其の間に又無理数というやうな数が横わつて居ると云うことがあるから、果して吾々の考へて居る通りの連続ということが今言つた言葉で表わされるかどうか分らない。如何程でも近いという言葉は都合の好い言葉であるけれども、如何程近く拵んで見ても又其の間へまで一步進んで考へることが出来るので、其れだけで満足が出来ぬと云うことになる。それから、もつと言葉は悪いけれども、或場処に於て断絶することがないと云うことだと云うて居る。けれども、断絶することがないと云えば、それは尚更悪い言葉になりましょう。次に空間は無限である。斯う云う風に誰も思つて居る。即ち何れの方向に進行しても元の位置には還らないと云うことであります。何れの方向に進行して行つても復た元の位置に還つて来ることはない、ズンズン先へ行くことが出来る。通例は直線に関する公理として認められて居るものである。直線は之を雙方へ極まりなく延長すべきものである。斯う云うてある。そのとき別に空間という言葉

### 第四、空間は無限なり



第五、空間は三次元を有す

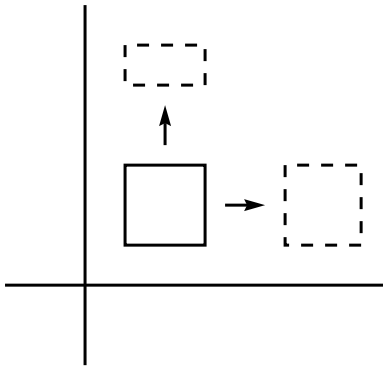
を使つていないけれども其れに当ります。この極まりなく延長すると云うことも大抵はそれで領いて居る。無論中学校の生徒に教ゆる時分などには其れで能く分つて居るけれども、極まりなく延長すると云うのには、例えば直線があつて、或長さを取る。一尺なら一尺に取る。又其次に一尺取る。又其次に一尺取ると云う様にして延ばして行く。恐らくそうでありましょうが、唯極まりない度数を重ねると云うだけであつて見ると、初に一尺其次には等比級数で進んで半尺、其又次には四分の一尺を進むと云うことになる、極まりなく延長して居るのであるけれども吾々の思想とは合わないことになる。一寸考へると、極まりなく延長と云うので宜さそうであるけれども、今言う様に考へると是れだけでは不十分なところがある。延ばすには違ひないけれども、吾々の頭の内に考へて居つた直線の無限の長さと云うものとは違ふことが出来ます。是れも少し細かに考へたら説明を要することでありましょう。

其の次は、空間は三次元を有する。three dimensionalであります。三つの次元を有すると云うことを云つて居る。吾々が通例認識して居るところの空間中にある立体は長さ、厚さと、幅とをもつて居る。是れは時々疑問になる。その厚さ、長さ、幅ということが分らない。丁度立方体であれば其等が能く分るが、極く不規則なもの、或は球と云う様なものであると長さ、厚さ、幅と云うことがむづかしくなる。やかましい言葉で言うたならば、吾々の認識して居る空間中の一点の位置は如何様なる方法を以てしても三つの数を要すると云うのである。

尚此の外にも空間の性質はありましようけれども、元来前にも言いました通り、吾人が概念せる空間のあらゆる性質を挙げると云うことは到底不可能のことである。若し其処に五つなり十なりの空間の性質を並べたならば、それは吾々の脳中にもつて居つた空間の概念とは違ふ空間を規定することにな

更 空間の性質の変

るのでありましょう。又上に述べましたのは、通例認めらるる所の空間の性質の陳述である、即ち空間に関する公理であります。即ち何人も真であると合点することの出来る性質である。けれども、疑えば疑うことの出来ないものでもない。空間は一様等齊でない、ヘテロゲン heterogeneous であるとも見ても一つの幾何学を作ることが出来る。例えば縦横に直線を引いて、その横線に平行に左右に動かすことは、それは何れの部分で動かしても同様で変わらない。けれども上下に向けて動かす時分には其の有様が左右に横に動かすのと非常に違うとすることが出来る。空間の中の組織の塩梅では違つて来るとすることが出来る。そう云う空間も想像の出来ぬことはない。そう云うことをして悪いと云うことは、誰も言うことが出来ない。例えば一つの正方形を右左に動かすときには其の形ちに少しも影響なけれども、上下に動かすときには例えば上に動かせば動かす程、其の長さは変わらぬが幅が段々短くなるかと仮定することも出来る。



第一図

又空間が無限であると云うことがある、随つて直線は極まりなく延長することが出来るものであると云うことを云つて居るが、既に学者の組立てた或種の幾何学に於ては、直線の長さは必しも無限でない、有限であると考えられることも出来る。又空間は四次元以上をもつて居るものであるとも考えられる。そう云う空間を仮想して其の空間に於ける幾何学を組立てることも出来る。兎に角吾々は空間を認める。空間の性質に付てはいろいろの説を立てることが出来ましようけれども、兎に角空間を認めて居る。其の空間の中に於て所謂幾何学上の基本概念、点、線、

面、角等を認識するのである。それはどう云う認め方をするのであるか。追々と繰返し繰返しお話を  
 するが兎に角かくそう云うものを認めて居る。茲こゝに於て其等の点、線、面、角と云うようなものの定義と、  
 此等の概念の各個の性質と、又此等の概念の相互の關係等を規定する必要が起る、別々に直線なら直  
 線の性質をきめる公理、或は直線と面との相互の關係を規定する公理と云うものを要することになる。  
 通例の幾何学では皆そう云うことをして居る。此等の定義と公理と、尚なほ其上に公準（後に説明する）と  
 称えて居るものがある。公準は公理の中に含めて置いてでも宜よろいが、其れだけのものを基礎として幾何  
 学は組織されて居る。其れだけが基礎になつて居る。其の基礎が一旦定まったならば幾何学は純正に、  
 演繹的に推理せられて、其そこ処に定理の一例が出来る。初等幾何学の中には作図問題と云うものがある。  
 是れは少し特別のものでありますが、今言つた所の定理の一例が、それが実に幾何学の本体を成すもの  
 である。斯こゝう云うて誤りはない。御承知の通り推理の方法には演繹法の外に帰納法がある。吾々が通  
 例中等教育に於て教えて居るところの幾何学は無論演繹的の幾何学である。併しかし教授上の便利からし  
 て、そう云う様な状態を取らしめてない場合がある。即ち直観的に実物の助けを借りて帰納的に経験  
 的に幾何学的真理を導き出すと云うような方法を取ることもある。これは教授上の便利からそう云う  
 ことをやる。其の際には帰納的幾何学 inductive geometry、或は工夫幾何学 intentional geometry と云つ  
 て、目撃することを綜合して、此の場合には斯こゝうだ、此の場合には斯こゝうだと云う様なことを実験して  
 やる。或は紙を折つて極めるとか、定規じようぎで當つて見るとか、分度器ぶんどくで度はかるとか云う様なことをして真  
 理の発見をやる。是れに對しては通例の遣り方を証明幾何学 demonstrative geometry と云うて居るこ  
 とがある。斯こゝう云う別わかちをするのは教育の上からするのであります。幾何学のみならず一般に数学に  
 於て証明と云えば演繹的推理を意味するのであります。帰納的推理は、唯ただ初歩の際には已やむを得ない

でこれを用いると云うような風になつて居ります。けれども普通教育の中で普通の幾何学が重きを為す所以の一つと云うものは、吾々の脳髓をして演繹的推理に慣れしむると云うことであります。其他の学科は殆ど総て帰納的推理に重きを置いて居るのである。其中に就いて幾何学は演繹的推理に慣れしむるに最も効のあるものとなつて居る訳である。固より帰納的幾何学も教育上無価値のものでない、女子教育及び程度の低い男子教育には勿論必要である。

次に定義のことに付て申します。誰も言いません通り、一つの言葉の定義を作ると云うことは常に甚だ困難なことである。定義の最も完全なる形は、論理学に於て云われて居る通り、其の言葉の指す所のものを包括する類の名を掲げる。どう云う種類に属して居るかと言ふ類の名を掲げる。而して其の類中の他のものと區別せらるるだけの必要な性質を拵んで之を附加える。斯う云うことであります。それが所謂論理的定義 logical definition である。例えば平行四辺形の定義に於て二雙の相對する辺が平行なる四辺形なりと云うような場合、それは四辺形という類に属する。そうして他の四辺形と違ふ所は二雙の相對すると云うところで、その形容詞が附いて居る。然るに斯の如き完全なるロジカル・デフイニションの形は多くの場合に於て取らしめてない場合がある。若しこの完全なる形を取らしめてなかつたならば、此の完全なる形に改め得るものでなければならぬ。是れが一ト通りのことで、誰でも皆そう云うて居ることである。併し上に云う様な、完全な形を取らしめ得るものばかりで幾何学の中の定義が出来て居るかと言ふと、そうでない。あれは一応の理屈である。却て今云う様な、ロジカル・デフイニションの形を与えて居る又与えしめることの出来る様なものは、是れは実は其の幾何学から取去つても差支のない定義であります。そんなのは何にも役に立たぬものと云うことも言える。尚此のことは後に言ひましよう。

それは兎とに角かく、或種の定義は上の様なロジカル・デフィニションを取らしめて居る。取去つても宜い訳であるけれども兎とに角かくそう云う形を取らしめる。又取らしめ得る。然れ共、一つの言葉の属する類を表わす言葉の定義を作る。更に其の言葉の属する類を表わす言葉の定義を作る。そう云う風にして順を逐おうて段々と進んで行く。是れもよく人の云う所であるが段々順を逐おうて後に戻して行くならば遂ついには完全なる形の定義を与えることの出来ない時に到達するに違いない。完全なる論理的定義を与えることの出来ない場合に達するに違いない。それは明かなことである。平行四辺形は四辺形の一 種である。四辺形は又何かの一 種である。何かは又何かの一 種である。いうことにして行くと、仕舞しまいにはどう云う類に属して居るか分らない時に到達するに違いない。幾何学の基本概念と云われて居る点、線、直線、面、平面、立体、平面角、立体角などというものは、そう云う様な終局の所にある、若くは終局に近い所にある言葉に相違ない。あとへあとへと戻して来て、全く終局の所にあるか、若くは終局に近い所にある言葉に相違ない。其故に其等の基本概念の定義と云うものは誠に困難である。希臘ギリシヤの「プラトー」の時代からいろいろ其等の定義に付て苦心をしたのであるけれども皆成功して居るものではない、満足の定義が得られたと云うことがない。其等の概念は、定義を与えるには余りに簡單過ぎるものである。

時々斯こう云う基本概念の定義の中には、定義其者として不完全であるばかりでなく、今言う様なロジカル・デフィニションというものが与えられて居ないのみならず、公理的の性質を帯びた事項が這は入いつて居ると云うことは注目すべきことである。例えば点の定義を与える。其の定義に直ちに引付け何も云わずして、矢張り定義の中に入れてあるような有様であるが、二つの直線の交る処は点なり、と。斯こう云う風にして居る。点とはどう云うものであると云うことを一旦説明して置いて、然しかる後に

交わる処は点なりと云う。それは公理的の性質と云わねばならぬ。なぜかと云うと、点なら点と云うことに付ては極まった定義が其処にある、其上に、二つの直線の交わる処が点だというならば、其の極めた処に果して当るかどうかと云うことを調べて見なければならぬ。普通の教科書の中にある定義の中には、線に付てもそうである。面の限界であると、斯う云うて置いて、二面の交わる処は線なりと云う。そうすると困ることがある。一旦線ということに極めてあるのに、又其上に、二面の交わる処が線であると云うと、其の二番目に起つたときには、定義ではなくして線の公理とでも云わなければなぬ。

有名な数学者で、又哲学者であつたところのパスカール Pascal と云う人。此人が定義を作る際に注意して居るべき三箇條を述べたことがある。それは斯う云うことを述べて居ります。

**第一** 吾々が或言葉の定義を与えんとするときに、之を説明するに足る程の一層明白なる言葉があると云うことを見出さなかつたならば其の定義を下すことを止めよ。

**第二** 曖昧にして疑わしき言葉を定義無しに置くべからず。

**第三** 完全に理合せられた言葉、若くは既に説明せられた言葉のみを用いて定義を作れ。

是れは皆至当なことでありましょう。今の幾何学の基本概念である直線とか、面とか、角とか云う様なものは、此の「パスカール」の第一箇條に属するものでありましょう。それを説明するに足る程の一層明白なる言葉がない。直線と云えば其れで分る。面と云えば其れで分る。一層それより明白な言葉がないと云う様な場合になつて居るのでありましょう。

今のは一般の定義に付てであります、尚同じくパスカールと云う人が斯う云うことを云つて居る。幾何学に於ける基本概念に定義を下すことの出来ないのは、是れは人の欠点にあらずして、却て人の長所なり。

と云つて居る。旨く言遁げをして居る。其の概念の曖昧なるが為ではない、余りに明白に遇ぐるに因るのであると云う。

又哲学者のセント・オーガスチン St. Augustine という人は次の様な言葉を述べてて居ります。

セント・オーガスチンの言

人が其の何たるやを問わば我之を答うる能わず。問わざれば我よく之れを知る。

人から、其れはどう云うものだと云つて問われたならば我は之を答えることが出来ない。けれども、問われずは我はよく之を知つて居るのだ、と。基本の概念は皆マア、そう云う様な性質のものでありましょう。

要するに基本の概念の定義を作ると云うことは是れは至難のことである。教科書には之を實際書き表わしてありますけれども、到底完全なものではないからして、いろいろの仕方、百方種々の説明を試みる。教師は自己の脳中に描いて居るような概念を生徒の脳中にも描かしむる様に力めるより外ない。元來定義を作つて、自分の脳中に描いて居る觀念を非常に能く表わす、是れより上の表わし方はないと云う程立派な言表わし方を得たならば、其れ以上に説明を加えるということは出来ない筈のものである。若し説明を加えたならば、前に最も好いと思つた述べ方よりも悪い仕方を用ゆるに極まつて居る。一遍或定義を作る。是れは完全無欠な定義である、と。斯う云うことが出来たとする。そう云う定義を本なら本に書表わす、生徒の前に述べる。そうするとその通りを繰り返して読むだけで其の先きは無言の儘で居るより外ない。それに説明を加えると云うことは、其れ以下の悪い言葉を以て云うのである。ああも言い、こうも言う。其のああも言い、こうも言う言葉は前の言葉よりもズツと悪い言葉に違いない。教授の際には、其のああも言い、こうも言うこととは無論しなければならぬが、只いろいろ説明して正しい処に導いて来るのである。導いて来るには悪い階段を経て、そう

定義は簡単にし  
て明瞭なるべし

して好い処へ来らすのである。

定義の自由

無論定義は簡単にして明瞭なるを要するが、簡単ならんが為に必要の言語を省いてはならぬ。又明瞭ならんが為に、冗長にして要らないものを附加えて置くこととはならぬ。つまり其の言葉の指す所のものが定まりさえすれば宜いのであるから、其の言葉の指す所を定める為に必要にして十分な程度にせねばならぬ。然れども例えば平行四辺形に付て言うならば、平行四辺形の定義というものは、是れは其の幾何学と云う学問を作る人々の考に依つていろいろに作ることが出来ると云うことを忘れてはならぬ。例えば前に言う通り、二雙の相對する辺が互に平行なる四辺形なり、又二雙の相對する辺が互に相等しき四辺形なり。どつちでも宜い。其外にもありましようが、若し其の中の孰れか一つを定義にするならば、他のものは定理として演繹して証明して行かなければならぬと云うことになりましよう。然るに平行四辺形は二雙の對辺が相等しく且つ平行なる四辺形なりと云えば之れは定義として価値はない。

定義の逆述

それから又定義が、甲は乙なりと云う様な形を取らしめられたならば、直に乙は甲なりと言換えても差支の起らぬものでなければならぬ。逆さにすることが出来るのでなければ其の定義は推理の基礎として役に立つものではない。

定義と公理

点、線、面、角等基本の概念の定義と云うものは、前に言う通り、完全な定義を与えることが出来ない、ロジカル・デフィニションと云うものを与えることが出来ない。元來定義というものは、其の指すところの言葉が表わして居るものの性質を掲げてある。多くは性質の一つを掲げてある。公理と云うものは是れは矢張り其等の概念の性質を掲げてある。定義と云い公理と云い、初等の幾何学に於ては嚴格に其間に区分を立ててあるけれども、何れも基本の概念の性質を述べて居るものである。此のこ



とに就いては兩者少しも変りはない。直線の定義だつても直線の性質を述べて居る。公理の中にも亦直線の性質を述べて居る。この点に於ては少しも変りはない。或一つの概念の性質又は二つ以上の概念の間にある関係、其等は沢山にあらう。其等の中の孰れの一つを定義の中へ拔出して掲げても差支ない。例えば、直線は或一部分を取って引くり返して、どんな方法を以て重ねても宜いと云う。或は直線は二点間の最短距離であると言ふ。何れも直線の定義でありましよう。其外にもいろいろ出来て来ましよう。直線は或方向から見ると点の如くに見ゆるものだと云うてもよからう、何かもう少し工夫を加えたら又別の直線の定義を下すことが出来よう。何れを定義にして置いても宜い。一つ拵んで定義を作つたならば、其外のもは謂わば公理と云うものの中にあるのが通例である。定義の中に三つも四つも性質を加えることは出来ぬからなのであります。其外は公理の中に打込んで排列して置くと云う風にしてあるが、考えて見れば定義も公理も何も区別すべき所はない。其故に近頃では此の如き基本の概念に関しては別に定義を立てないで、公理の形に於て此の概念の一つ一つのものの性質又二つ以上のものの相互の関係というものを述べて置くと云うことになつて居る。定義と云うものを基本の概念に関しては作らないことになつて居る。

基本の概念でないところの(例えば平行四辺形は基本の概念でない)幾何学的図形の定義というものは是れは必要なものではない。前にも言う通り是れは英語でならばノミナル・デフイニション nominal Definition 命名的定義というても宜からう、名前をつける定義である。唯常に長き言葉を繰返し繰返し用いることは不便である。簡短な言葉を作つて置くことが便利であるからこんな定義をつくるのである。例えば前の平行四辺形と云う言葉は要らぬ。何処迄も何時までも二雙の相對する辺が平行なる四辺形だと云つて置けば沢山である。けれどもこんな長いことを云うのは便利が悪い。便不便と云う

ことと要不要と云うことは違う。どうしてもそう云うものがなければならぬと云うことと、なくつても宜いがあった方が便利だと云うこととは違うと思う。平行四辺形と云うが如きは唯そう云う簡短な名前があつた方が便利であると云うので附けて置く方のものであります。所が基本の概念の定義というものは、そう云うものとは違う。或る長い言葉を簡短に約めて置くこと云う様なものとはマルで違う。それで初等幾何学の中にある所の定義は、大部分はノミナル・デフィニションであるが。その外に基本の概念に關したもので公理的定義 axiomatic definition といつてもよからうと思つてゐるものがある。公理的性質を帯びた定義がありません。或は又取らしめ得るものでありましょう。

尚ノミナル・デフィニションを与える際に注意すべき事柄は、そう云う様な図形が果して存在するか、どうかと云うことを極めて掛かることである。それは勿論のことである。初等幾何学に於ては、時としては定義の方が先に出て、然る後に其の定義に依つて定められた図形が存在することを証明することがある。それは理論上は勿論宜しいことではないが、そう云う風に顛倒して居る例を捜がすことが出来ましょう。いろいろの教科書にありましょう。理論上から云えば先ず存在する。斯う云う図形が成立つぞと云うことを云つて置いて、然る後に名前を附ける。斯う云う順序で進むべきが至当でありましょう。しかし数授という側から云うと、その様な完全な順序を守ることが出来ない場合がある。其故に悪いけれどもそう云う風にさかさにして置くこと云うことがありましょう。

次に公理のことを話すことに致しましょう。そうすると又定義のことにも關係して来ます。

## 第三講

公理的定義と公理

前講には主として定義のことに就いてお話を致しました。其の仕舞しまいに初等幾何学の中にある定義と云うものは二通りに別れると云うことを申しました。名前を附ける為の定義、即ち英語で云えば nominal definition——長い言葉を使うのが不便であるから簡短な名前を附けて置いたらば先々の説明が仕易しやすいと云う為に附けたと云うのと、それと、基本の概念に対して与えて居る定義。それは一面から見たら公理とも思われる即ち公理的の定義 axiomatic definition と、此の二つに別れる。其中の初の方のノミナル・デフィニションを与える場合、即ち名前を附ける時分には果して其の図形が存在するや否や、例えば平行四辺形なら平行四辺形という図形が存在するや否やと云うことを調べてでなければ名前を附けることが出来ない。所が普通の教科書などに於ては其の順序が転倒して居る。名前を附けて置いて然る後に存在の証明をする。と云うことがあるが、それは便宜の方法であつて已むを得ぬ。

尚其事なおに就いて一寸附加ちよつとえて言うて置きますことは、是れも全く理論から言うならば悪いことであるが、教授の實際に於ては已むを得ぬことであります。存在を証明して然る後に名を附くべきことを、其の存在に付ては一言も言わない、前にも後にも言わないで、そうしてやつてある場合もある。そう云うものが成立なりたつのか成立たないのか言わずに、誰が考えても成立ちそうだと云う所で、別に其の詮議せんぎをしないで其儘そのまま名前を附けてある。斯う云うこともあるし、或は何も説明せず、そう云うものが存在するのであると断定してある場合もある。例えば有限直線の中点と云う様なことがある。是れは誰が考えても、子供でも、一つの有限直線には中点があると云うことは分るから、それで唯中点ただと云うものの定義を立てた、と云う様な風になつて居りましょう。存在するか否かと云うことは別に証明をしない。其の証明をすると云うことになるかと非常にむずかしくなる。丁度其頃ちやうどの学力に合はしては到底堪え得

存在の証明をせざる命名

ないと云う時分には、是れは理論的には不完全であるけれども当時の学力に対しては不相当であるから略して了しまうと云う場合がある。それで中点の定義を与えて置いて、其のあとへ定義とも付かず、定理とも付かず、又公理とも何とも云わず、漠然と有限直線の midpoint と云うものが一つある、そうして只一つに限るのであると云う様なことを、云わば圧制的に附加えて居る。幾何学の中に定義というものを許すならば、定義と、公理と、定理と、それより外にある筈はない（作図問題は別であるが）系と云うものがあつても是れは定理である。独立さすには余りに簡単な定理を系と云うだけであつて、實際定理に相違ない。ところが其の間に定義とも公理とも定理とも又系とも何にと云わずして、ボンヤリと真理の主張が這はい入いつて居る。兎とに角かくそう云うものが、どの教科書を見ても挾かまつて居る。是れは却かえて綺麗に掃除し上げようとしたらすぐ判かつて来る所の者であるが、甚だ悪い処に相違ない。しかし教授の上から云うて已やむを得ないから、そう云うことになつて居る。これだけ附加えて置きましょう。

次に公理の話に入ります。定義の外に幾何学の基礎となるものは公理 axiom というものと公準 postulate というものとであります。公理公準の区別は後からお話致します。公準という方は余り常に教科書などでは使つて居りませぬ。前に言いました通り、基本概念の定義と云うものは公理と看み做なさるべきものであるから、其の点から言えば、常には幾何学の基礎は定義と公理であると、斯こう云うて居るけれども、公理ばかりであると云うて差さ支しかない。其の公理と云うものは皆吾々が遺传的に、祖先伝来の経験もありましょうし、又書遺かきのこして置いて呉くれて斯こう云うことがあるぞと教えられたものもありましょう。又自己の経験もありましょう。その祖先伝来の経験及自分自身の経験に依つて真なりと認められたるもの、又は少くとも真ならんと思わるるものであつて、吾々は之かを尚なほ一層單純なる事柄に分析して証明することが出来ないものである。通例斯こう云うて居る。吾々の智識の基礎は、それは皆五

官に依つて成し得る經驗より外にはない。人間は皆そうである。其故に幾何学の基礎になる公理と云うものも、經驗に基いて帰納的推理に依つて得られた最も單純なる真理である。其等の帰納的推理に依りて得られた結果から、今度は演繹的推理に依りて種々の結果即ち定理と云うものを導き出すのである。土台は何処迄も經驗に依つた帰納的推理で拵えた公理でなければならぬ。それから先は演繹的推理、それから先は少しも經驗を混えない、帰納論法と云うものは聊かも混えない。幾何学に限らず、如何なる学問でも皆そうであると思われる。若しそう云う形を取つて居なければ未だ完全なる学問の形を取つて居ないものと、私は思う。然れ共元來吾々の經驗と云うものは有限の範圍に限られて居るものである。例えば直線を無限に引延ばすという言葉は使つて居るけれども、實際に無限に引延ばすと云うことは經驗することが出来ない。其外皆有限の範圍に於てこそ出来るのであつて、吾々の經驗を無限に及ぼすと云うことは、是れは思想の上にて出来ることであつて、經驗の上にては出来ることでない。其故に先きに言うように、經驗に基いて真だとした所の公理と云うものは、吾々の經驗の範圍以外に推及ぼして誤りがあるかどうか、と云うことは分らない。一方に於ては之を無根大に拡張して宜いかどうか、或は又一方に於ては之を無限に應用して、極く極く小さいものに應用して差支ないものかどうか。それは頗る疑わしいことになる。經驗の範圍は、余り大きくも無い又余り小さくもない所である、その狭い範圍で得た經驗の結果であるから、非常に大きいもの又非常に小さいものに適用して誤りがあるかどうかと云うことは、それは分らない。其故に公理若くは公準と云われる所のものとは決して確乎不拔の真理ではない。特に吾々の数学の中には、無限大無限小と云う觀念を導き入れて居るから、此の点に於て能く注意をせんければならぬ。もともと有限の範圍で拵えた公理である。其れに基いて居りながら一方から云うと無限大無限小という觀念を入れて来るのであるから、

能く注意をせんければならぬと云うことになる。

自明の真理

論理学上の公理

時として公理と云うものは自明の真理 self-evident truth と云われて居る。今より少し前迄はそう云う風に云われて居つたが、近頃では最早之を自明の真理と云う者はない。このアキシオムと云う言葉は幾何学のみならず論理学に於ても用いられて居る。論理学に於てアキシオムと云うて居るものは、それは自明の真理である。そのアキシオムと云う言葉は論理学で使かうようにして自明の真理を指すものであるとするならば、其の言葉を同じ意味に於て幾何学で用いることは出来ない。論理学に於て自明の真理として居るところの公理は、それは三つある。

自同律、矛盾律、  
不容中間律及び  
充足理由の原理

### 第一 同一の原理

(或は短く云うと自同律) と云うて居るもの、それは甲は甲なり。甲と云うものは甲其れ自身であると云うのであるから、是れは善く分つたことである。

### 第二 矛盾の原理

(矛盾律) と云うて居るもの、それは、甲は非甲にあらずと云うので、是れも能く分つて居る。

### 第三 拒中の原理

(不容中間律) と云うて居るのが一つ。それは甲は乙なるか或は非乙なるかと云うので、是れも明かなことである。

以上の三つであります、何れも其れ自身明かでありましょう。是れこそ経験に依つたのでも何でもありません。甲は甲であるとか、甲は甲でないものでないと云うのですから。

尚この三つ以外に論理学に於てはもう一つ附加えることもあります。それは此の三つと性質が少し違つて居るが、論理学者に依つては之れを附加えて居るし、又或論理学者は省いて居る。それは充足理由の原理と云うものであります。どう云うのかと云うと、甲なることを云わんには十分なる理由乙あるを要す。斯う云うのであります。兎に角論理学の方で自明の真理と云われて居るアキシオムと云

うものは幾何学で云う所の公理とは大變に違うのであります。

吾人が数学特に幾何学に於てアキシオムと称えて居るものは、今言うた自明の真理ではない。知力の発達しない場合には疑を挟むと云うことが少くして早く断定を下すと云うことがある。斯うだと云われると直に頷くと云うことがあるから、自明の真理の如く見えても実はそうでない。例えば中学校の初年級に於ては、直に、アアそれは能く分つたことだと云つても、それが学者の方から見たら余程疑を挟む余地がある。例えば全体は其の部分の和である。或は二つの点を過ぎ一つの直線を引くことが出来る、そうして唯一つの直線に限る、と云うが如きものは、是れは格段なる場合に於ける經驗的事実の概括に過ぎない。英語で云えば generalizations of particular empirical facts であつて個々別々の格段なる場合に於ける經驗的事実を概括して、そうして論定を下すのであつて、絶対的確實の權威を有して居るものではない。can never rise to the dignity of absolute certitude と云うべきである。此等は唯 assumption (假定) として取扱わるべきものである。多くの場合に於て、一つの物体を分つ、例えば二つなら二つに分ける。そうして又其の二つの部分を継合わすというと、前の分けなかつた時分と大のものが出来るとする。それは經驗的に皆そう思つて居る。併し二つに分けたときに最早元の通りにならないものもないではない。又継合わして元の通りになると思つて居る場合でも——それは如何にも物指で度れば一尺あつたものを五寸と五寸とに分けて又継合わしたら元の通り一尺になるであろう。けれども其時に眼の助けなり、或は耳の助けなり、即ち五官の力を籍りて前の通り一尺になつたとするならば、それは薄弱なる議論である。何となれば吾々の五官というものは薄弱な機関であるから、耳や眼で認むることの出来ない極く僅かな部分に至つては元の通りになつて居るか居らぬか見判けはつかない。二つの点を過ぎ一つの直線を引くに定木を以て引いて見る。もう一本引いて見る。經

験では重なってしまふとなつて居る。二本は引けないとなつて居る。区別のある様に二本だけ二点の間に引こうと思つても引くことは出来ない。それは併し定本のような又眼と云う様な精巧でないものを用うる為かも知れない。物理学者などには眼や耳が無上に有力な助けであるから、一本より引けないと断定しましょうけれども、眼や耳でも届かない処があるに違いないから、線を引いて見て重なつたからと云つて一本に限ると云うことは出来ないであらう。

公理は皆そう云う風に、実験的經驗的に得た事実を概括して仮に下して置いたので、絶対的確實であると云うことは出来ない。仮定であると云うより外仕方がない。

公理に付ては尚研究しなければならぬのでありますが、其の前にユークリッド Euclid の幾何原本に付て少し述べて置かないと都合の悪いことがありますから其れをお話致しましょう。

少し歴史の様なことになりますが、希臘人は埃及から幾何学を輸入して、是れに改良を加えた、又多く發明する所があつた。然るに埃及のアレキサンドリアで大學が出来た時に、ユークリッド Euclid という希臘人が今度は埃及へ渡つて幾何学を教授することになった。其時にユークリッドは、自分より前の時代の数学者タールス Thales ピタゴラス Pythagoras プラトー Plato デモクリタス Democritus ユードキサス Eudoxus 等が発見して置いたところの定理を順序好く排列して、自分自身の發明した所をも加えて、一つの教科書を作つたのであります。特にこのユードキサスと云う人が其の材料を大略準備して置いたのであると云うことであります。完全なる組織を持つて居る一つの幾何学と云う学問を編成した。この点に於てユークリッドは大功があると謂わなければならぬ。ユードキサスは余り其の名が顯れて居らぬ。椽の下の力持をした様な訳でありますが、マアそう云う風で幾何学の教科書が出来たのであります。



ユークリッドという人が、子弟を教授する際には、凡て知識は知識として学得させねばならぬ。其れより生ずる利益を求めてはならぬ。知識より生ずる応用を求めてはいかぬ、と云うことを主張したのであります。ユークリッドの幾何学は、縦い現在の時代から見たら欠点があるにしても、余程完全な理論を説き立てたものであると云うて宜しい。そして其の間に応用と云うことは殆ど眼中に置いてない。それが久しい間欧羅巴で尊重せられて居った。けれども全く応用を眼中に置かない組立の幾何学は、現在の教育に向つては宜いものであるか否か、其れは問題であります。其処に於て教育上から観ての幾何学の改良と云うことが起つて来たのであります。何処の国が一番先であると云うことは後で時間があったら言いましょう。兎に角元の起りは応用に少しも重きを置いてないのである。

ユークリッドは、其の年代を言いますと西暦紀元前三百三十年頃に生れて同二百七十五年頃に死んだのであらうと云われて居る。(此の話をして置かぬと先に行つて少し都合が悪いから言つて置きます)。ユークリッドはプラトニーよりは年少である。時としてはプラトニーに就いて学問を習つたことがあるとも云われて居る。それは確かであるかどうか分らぬが、プラトニーの弟子であるとも云われて居る。ユークリッドの外に希臘に於て特に著しく秀でた学者が二人ある。それは一人はアルキメデスArchimedes他の一人はアポロニウスApolloniusと云う。此の二人とユークリッドを合せて希臘の三大幾何学者と云うことが出来ましょう。アルキメデスは数量的の幾何学(球の面積を測るとか体積を測るとか云う如く)に秀でて居つて、アポロニウスは位置に關した幾何学に特に秀でて居った。例えばアポロニウスの軌跡と云うのががあるが、軌跡は位置に關係して居りましょう。或は三つの円に切する円を描くアポロニウスの問題と云うのががある。是れも数量には關係して居らないで位置に關係して居る。そう云う風に、位置に關係した方が得意であつた。此のアルキメデス及アポロニウスは其の長所に於てはそ

う云う違いがあるが、ユークリッドの幾何学に現れて在る直線及円よりも高等なる曲線例えば楕円、拋物線と云うようなものをも深く研究した。現在は通例楕円、拋物線等を論ずるのに「デカルト Descartes」の解析幾何学の方法に依つて是等の曲線の性質を見出すと云うことになつて居りますけれども、普通の幾何学の様な体裁で其等の曲線の性質を求めると云うことは又其れとは別種の趣がある。解析の助けを籍らない取扱方はアルキメデス、アポロニウスの時分に非常に発達したものであります。アポロニウスのコニック・セクション円錐曲線論の本は極めて有名なものである。それは決して解析幾何学の様に取り扱うのではない。兎に角希臘に於て既に楕円、拋物線、若くは其れ以上の高等な曲線の研究でも可也十分に出来たのであつて、ユークリッドが幾何学を編纂する際にはプラトーの意を承けて其の範圍を直線及円に関するものとした。仮令立体幾何学に這入つても矢張そう云うものだけに關して居る。直円錐直円壩と云うようなものは取扱えど、それを斜に截つたものはモウ取扱わない。と云う様に直線と円とに關係したものに限つたと云うことである。それに対してアポロニウスのコニック・セクションと云う本が出来て居る。コニック・セクションの中には楕円、拋物線等が主となつて居る。そう云う様に分担が出来て居る。併し吾々は教育の上にては於ては何も現在の所でユークリッドの通り範圍を限る必要はありませんまい。彼れ等の時分にはマアそう云う風にプラトーの意を承けてやったのでありましょうが、何も今そう云う風にやらねばならぬ必要はない。楕円のことも簡單なる性質は幼年の生徒に教えて差支ない。差支ないのみならず、応用もあり了解もされます。そう云うことに係つて旧慣を固執するのは一つの弊害に捉われて居るのであります。何でも入用なものは加えて宜い。そうして初等幾何学を組立てて行くことが出来ましょう。話が横途へは入りませんでした。

ユークリッドの幾何原本は、其の初は素よりユークリッドの書いたものでありますけれども、長い

年月の間に段々と多少の変化は受けたのであります。ユークリッドの書いた其儘の本は吾々に伝わっていない。如何様なものがユークリッドの書いたものであるか分らない様になったのであるが、恐らく斯う云う様なものであつたのであらうと云うことを種々の材料に依つて推定しようとした学者が幾人もあります。其の中で信用の置けるもの、正しいものだと思はれて一般に数学者が是認して居る所のもの一つは、仏蘭西人の Peyrard に依つて出来たところの三冊の本であります。西暦千八百九年に其の第二版が出て居る。現在でも其の研究が続けられて居ないのではない。近頃では Euzéby と云う人の研究が出来ました。これは今能く覚えていませぬ、間違つたらいけませぬから調べて来て明日言ひましょう。

其外に、もつと小さい頁数で出版したのもあるが、幾何原本は十三篇から出来て居るのであつて、そう云うものの内容を見るのに純粋の幾何学ばかりではない。其中の一、二、三、四篇は吾々のやつて居る通り、直線、円、面積などを論じてある。五篇は比例論。六編は相似形。七、八、九篇は幾何学でない、数の性質のことを論じてある。特に九篇の中には素数と云うものが無限に多いというようなことを論じて居る。十篇は有名なる不可度量論。十一、十二、十三篇は立体幾何学。是れだけではありません。それで吾々が普通に採用して居る教科書と云うものは無論ユークリッドの幾何原本の儘ではなく、多少変化はして居りますけれども、大体に於ては矢張その幾何原本に習つて、其の一部分をやつて居るのであります。先ず是れがユークリッドの幾何原本に就いての話であります。

この最も信を置く可き研究の結果なるユークリッドの幾何原本に付て見るのに、ユークリッドは幾何学の基礎として九つの普通概念 Κοιναι Ενομοιαι (Common notions) と云うものと、六つの所望 (公準) Postulates (Axioms) と云うものを述べてある。後の方は所望と云つては余り平た過ぎるから、近頃

では公理に対して公準として居ります。それは次の通りであります。  
普通概念

- 一、同じものに等しきものは相等し。
- 二、相等しきものに相等しきものを加うれば其和は相等し。
- 三、相等しきものより相等しきものを減ずれば残りは相等し。
- 四、相等しからざるものに相等しきものを加うれば其和は相等しからず。
- 五、相等しからざるものより相等しきものを減ずれば其残りは相等しからず。
- 六、同じものの二倍なるものは相等し。
- 七、同じものの半分なるものは相等し。
- 八、相合するもの即ち丁度ちようど同じ場処を充たすものは相等し。
- 九、全部は其の各部分より大なり。

公準

- 一、一つの任意の点より他の任意の点へ直線を引くことを得。
- 二、直線は之を雙方に極まりなく延長することを得。
- 三、任意の点を中心とし、任意の半径を以て円を描くことを得。
- 四、凡てすべの直角は相等し。
- 五、若し一つの直線が二つの直線に出会い、其の同じ側にある二つの内角の和が二直角より小なれば此の二つの直線は之を断えず延長すれば遂に和が二直角より小なる二角がある側に於て出会うべし。
- 六、二つの直線は場処を囲込む能わず。

是れだけであります。これは殆どユークリッドのを其儘直訳したのである。是れに従つて見ると、コイナイ・エンノイアイと称する普通概念は一般に量に關した事柄であつて、現在吾々の教科書に於ける普通公理と云うものである。そうして特に幾何學に關する所の事柄は皆アイテマと名づけて總括してあつて、別に之をアキシオムスとポスチュレーツとは區別してない。後に區別をする様になつたのである。それから議論が起る。アイテマと云う言葉の意味が問題になる。アイテマと云う言葉は前に申した通り所望、請求という意味であるが、此の六箇條は經驗的に真理であるとユークリッドが断定して、自分の幾何學を読むに付いては、読む者等が先以て承諾せんことを求めたところの事項である。是れだけは請求所望するぞと云うのであります。若し之を承諾せずとならば自分の幾何學を読むことはならぬ、という意味に於て述べ立てたことでありましょう。是れ丈<sup>だ</sup>けは真であると假定せよと、斯<sup>こ</sup>う云う意味である。若し真としないならば自分の幾何學を学ぶな。斯<sup>こ</sup>う云う意味に於て述べ立ててあります。

## 第四講

普通概念と公準  
の変動

昨日申しました様に、ペイラール Peyrard と云う人の推定したユークリッドの幾何原本に従いますと、普通概念 Common notations と云うものが九つある。それから公準 Axioma と云うものが六つある。此のペイラールのユークリッドの幾何原本と云うものが一時非常に信用を置かれて居った。昔の原本は如何にもそう云う風のものであつたらうと云うことになつて、今も尚其の勢力は保つて居ります。けれども此のペイラールの研究は、昨日も言いました様に、千八百九九年に第二版が出た位で、今から百年以上も前のことであります。極く近頃になつて又非常に精密に取調べた書物が出て居ります。それは昨日は其の名を云わなかつたのでありますが、此処にありますが、三冊の書物であります。是れは千九百八年即ち今から四年前に英吉利のケンブリッジで出来た書物で、Heard と云う人の書かれたものであります。The thirteen books of Euclid's Elements, 1908 というのです。この書に従いますと、ユークリッド自身が基礎とせるものは非常に僅であります。そうしてポスチュレートと云う方が先に出て居る。それが五つある。ペイラールのアイテマに当るのです。ペイラールのアイテマは六つあるが、其六つの中の第六即ち「二つの直線は場処を囲み込む能わず」と云うのを取除いてあります。其他は言葉に於て少し違いがあるだけで順序も何もかも同じです。其の次にコンモン・ノーシオンズと云う方を挙げてある。是れはペイラールの方では九つ挙げてあつたが、大變数が減つて、五つしか挙げてない。その五つを申すと次の如くであります。

- 一、同じものに等しきものは互に相等し（ペイラールの第二）。
- 二、相等しきものに相等しきものを加うれば其の和は相等し（ペイラールの第二）。
- 三、相等しきものより相等しきものを減ずれば残りは相等し（ペイラールの第三）。

四、重ね合わせて相一致する所のものは互に相等し（ペイラールの第八）。  
五、全部は各部分より大なり（ペイラールの第九）。

斯う云う様に五つだけ挙げまして、ペイラールの四、五、六、七と云う四つに当るべきものが抜けて居ります。此の四つはユークリッド自身は書き表わさなかつたので、後の学者が附加したのである。斯う云うことになって居ります。此の四つは何人が加えたのであるかと云うこと、又前のポスチュレートの一番仕舞の「二直線は場処を囲み込む能わず」と云うは何人が加えたのであるかと云うことに付てはヒースの書物に説が出て居ります。素より此のペイラールとヒースと云う人の大著述ばかりではない。其外にもユークリッドの幾何原本を推定した小さい著述はいろいろある。それぞれ著者の見る所を異に致しますから、其の各々の見解に依つて数が違つて居る、又述方も多少違つて居るのであります。我国で行われで居る教科書は多くは沢山の普通概念が挙げられて居る。寧ろペイラールの方に近いのであります。以下ペイラールの方に従つて話を致します。ペイラールの方が日本の教科書に似て居る。其の通りではありませぬが似て居るからであります。

ユークリッドの幾何原本の中世以降の出版に於ては上述の十五箇條を区分するのに、ペイラールの推定した様にはしてなくて、十二個のアキシオスムと三個のポスチュレートと云うものに分をした。其頃迄はアキシオスムと云う言葉は使つて居らぬ。アキシオスムと云う言葉は是れは自明の真理とも取る場合がありますので、この中世以降は時々自明の真理を基礎にするが如く思われるような有様になつた。其の中世以後に於てはアキシオスムが十二個ある。それは九つのコンモン・ノーションと六つのアイテマの中の仕舞三つとを合せてアキシオスムとして、アイテマの中の初三つだけをポスチュレートとした。そうするとポスチュレートと云うものは所謂作図の方法に関する規定になる。直線を

引いたり、円を描くと云うことです。アキシオムスと云う方は現在吾々の云うて居る普通公理と幾何公理とが一緒になつて居るものになる。それで今作図の規矩——作図の手段と云われて居るものは中世以降になつて、それだけのものが別に区分されるようになった。名前は違つて居るけれども、兎も角も外のアキシオムスと分離されて別物に取扱われるようになった。それは中世以降のことであつて、ユークリッドの時からではない。それが分離されたのは宜しいが、一方に於ては一般の普通の量に關したところの普通公理と純幾何学の中に属すべき幾何学公理の類とが一緒になつて居ると云う不都合が生じた。所が、英吉利の幾何学教授法改良協会の決議に従つて見ると、その中世紀以降の分類の仕方が幾分か復旧せられた。ユークリッドの普通概念と云うものを普通公理 (Common axioms) と云うて別に幾何学公理 (Geometrical axioms) という部類が設けられたものである。三つのポストチュレーツが離されて居ることは中世以降の通りである。我国で広く行われて居る菊池さんの教科書などの普通公理と云うものと大同小異である。菊池さんの教科書にも矢張り九つの普通公理が挙げられて居る。唯少し順序が違ふ。それからペイラーの第八が菊池さんの乙と云う普通公理になる。それは「相合するもの即ち丁度同じ場処を充たすものは相等し」と云う所を菊池さんの方では之を抜いて「全量は其の総ての部分の和に相等し」と、斯う云うことが這入つて居る。これは置換えた方が宜しい。それは何故かと云うと、ペイラーにすると「同じ場処を充たすものは相等し」とあつて、是れは図形に關するものであるから取去つた方が宜いと云うので、そう云う交換が出来たのであろう。それからペイラーの普通概念の第六が菊池さんの辛に當る。此辛と云うものは普通概念の第二即ち菊池さんの公理の丁と云うものを用いれば証明の出来るものである。其故に是れは不用のものである。ペイラーの方で云うならば第二に依つて第六が証明し得られるのである。それを省略するのが至当のことである。



れ共、屢々引用することがあると云うので残されて居る。併し之を純粹の理論的に考へるならば都合なことである。しかし菊池さんのでも又其外の教科書でもそうなるて居ります。且又第七と一對になつて居るから置いておくと体裁が揃つて宜しい「同じものの半分なるものは相等し」と云うことが一方にある。この第七の公理と一對になつて居るから、第七を残して置くならば第六も添えて残して置いた方が宜い、と云う極く薄弱な理由に依つて残されて居るのである。併し後に言います様に、公理を述べるときには、其の公理は互に独立でなければならぬと、云うことがある。言換えたならば、一つの公理が他の公理から演繹して来られるようなものであつてはならない。若し演繹して来ることが出来るようなものがあつたならば、それは最早基礎の公理ではない。基礎として値打はない。又言換へたらば、公理と云うものは、そう云う風に重複して居つてはいけないものでありましよう。けれども、ペイラールにしても、又普通我国に行われて居る教科書にしても、そう云う二重になつて居るものがある。それは今言う通り屢々引用するから、或は外に一對になるものがあるからして、置いた方が宜いと云う即ち便宜上から残して置いたと云う様なものがある。それから又此の九つの外に、例えば「相等しき量に相等しからざる量を加うれば其の和は相等しからず」と云うことや「相等しき量より相等しからざる量を減ずれば其の残りは相等しからず」と云うようなものをも普通公理として一向差支ない。第四第五などは少し違う。けれども通例は之を掲げてない。そこで幾何学の中に用いる量に関する普通概念或は普通公理と云うて居るものは、決してあの九つに限るものではない。其故に時としては、唯其の主要なるものを掲げると云う風に、極く曖昧なることを云つて居る。けれども、理論の完全を望む際には、是れはモウ少し詮議して、どれだけが使われるのであるか、どれだけが基本になるべきものであるかと云うことを吟味する必要がありますが無論あります、やかましく云えば其処らにも無

論抜目はある。又時としては、公理であると断言することを憚<sup>はば</sup>かって「公理的に用ゆる」と云う様なことを書いてあることが度々ある。それは誠に困ることですが、どの教科書にもそう云うものがある。例えば菊池さんの教科書の第四編比の処にイからトに至る七箇條を並べてある。符号で書くと次の様なものがある。

$$mA - nA = (m - n)A,$$

$$m \cdot nA = mn \cdot A = n \cdot mA$$

斯<sup>こ</sup>う云<sup>い</sup>うものがある。公理と断言はしてない。けれども、公理的として用いると云う様なことがある。つまり量に関する普通概念の中で、幾何学に用いられて居るもの数には判然たる定めが出来て居らない、頗<sup>すこ</sup>る曖昧なものであります。それは研究を要する所で、研究の結果どうであると云うことを言われる時代が来ましよう。吾々はそう云うことを力<sup>つと</sup>めなければならぬ訳である。

一寸言<sup>ち</sup>落<sup>ち</sup>としましたが、前にペイラールの第八が菊池さんの乙になると云うことがあった。ペイラールの第八は「相合するもの即ち丁<sup>ちやうど</sup>度<sup>ど</sup>同じ場<sup>ば</sup>処<sup>じょ</sup>を充<sup>つ</sup>たすものは相等し」と云うのであるが其<sup>そ</sup>処<sup>こ</sup>へ菊池さんの方では「全量<sup>すべ</sup>は其<sup>そ</sup>の総<sup>すべ</sup>ての部分<sup>ぶぶん</sup>の和<sup>わ</sup>に等し」と云うことが這<sup>は</sup>入<sup>い</sup>つて居る。其<sup>そ</sup>代<sup>しろ</sup>りに此<sup>こ</sup>の第八は菊池さんの方の幾何学公理の第二になつて居る。「全く相合せしむることを得るもの大<sup>おほ</sup>きは相等し」とあつて、図形に関するから幾何学公理の方に追込んである。

普通概念或は普通公理の方は、是れは幾何学の中で用いるには相違ありませぬけれども、特に幾何学に限つて用いられると云う性質のものではない。無論研究はしなければならぬけれども特に幾何学に限つて用いられるものではない。それよりも重きを置いて考<sup>かん</sup>うべき方は所謂<sup>いわゆる</sup>幾何学公理で、ペイラールのユークリッドに従えばアイテマと云うものである。是れは前にも言いました通り、吾々の経験に基<sup>もと</sup>い

て帰納的に設けたところの所望である。其故に確乎不拔の真理であると見ることが出来ない。量の方に關しても即ち普通概念の方に關しても其の通りでありましよう。けれども、それは今抛ほうつて置く。例えばユークリッドの第五のアイテマ即ち中世以降出版になつた幾何原本の第十二の公理と云う様なものは非常に早くから其の真否が疑われた。其れが真であると云うことを証明しようと企てた時代もなかつた。併しかし証明しようと云うのは、もう少し簡単な新たに作れる公理に依り、或は簡単だとして作つて置いた他の公理を土台として証明しよう、それから演繹しよう、斯こう云うような風に企てたのである。併しかし遂つひにはそれが成功せずして此第十二の公理と云うものを取去つてそれを認めない。其公理を認めないで幾何学を組織しようと云う風になつた。其れが非ユークリッド幾何学 Non-Euclidean Geometry の起りとなるのであります。けれども真否を疑われる公理と云うものは必しも平行線に關した公理ばかりではない。即ち第五のアイテマばかりではありません。又ユークリッドの第四のアイテマ即ち「凡すべての直角は相等し」と云うのは其の後証明せらるることになつて居るので、即ち或時代の人には、帰納的に断定したところの事項であるけれども、それは帰納的にやつたことになつて居つた事柄も、後世の人には之を他の公理から演繹的に証明することが出来るようになった。それで其の点から云えば公理と云うものは智識の發達に従つて変化して行くものだと言いわねばならぬ。詮議に詮議をして見ると段々變つて来るから幾何学の基礎は變化するものであると。斯こう云うことが云えます。現在の学者が一般に初等幾何学の基礎として、どう云う様な公理に依るべきであるとして居るかと言うに、それを定める様になつたのはソウ古い時代のことではない。多くの学者は其の基礎をアキシオムスと云うて居る。私はアキシオムスと云う言葉は余り面白くないと思ひます。又アキシオムスと云う言葉は全く用いないで、ポスチュレーツと云う言葉の方ばかりを用いて居るのがある。この方が善いと思ひ

ます。其の点は人に依つて違います。私自身から言うと、ポスチュレーツと云う方が幾何学の詞として宜いように思われる。それは何れにしても近頃其の幾何学の基礎の研究の先覚者となって著しく注目されたのは、それはHilbertと云う人であります。此の人の研究が千八百九十九年に発表されましたが、是れは有名なものであります。其の基礎はどう云う風に述べて居るか概略挙げて見ましょう。全部挙げることは困難でありますが大略述べて見ましょう。

幾何学に於て吾人は三つの異つたる物の群を研究する。第一群に属するものは点と云いABC等にて示される。第二群に属するものは直線と云い $a$   $b$   $c$ 等にて示される。第三群に属するものは平面と云い $\alpha$   $\beta$   $\gamma$ 等にて示される。斯う云う風に冒頭に断言する。決して点、直線、平面の定義は与えない。そうして点は線幾何学の元素と云われ、点及直線は平面幾何学の元素と云われ、それから点、直線及平面は空間幾何学の元素と云われると云うことを述べてある。

吾人は点、直線、及平面の間に相互の關係を認めるのである。相互の關係とは、横わる、間に、平行全等、連続なる五つの言葉で示される。此等の五つの關係の精密にして完全なる陳述は凡て幾何学公理に依つて現わされる。それだけのことを冒頭に置いて、それから幾何学公理を述べて置いてある。

結合の公理

第一、結合の公理。是れは七つに小別する。

一、二つの異なる点AとBとは、一つの直線 $a$ を決定する。二つの点があれば一つの直線が定まる。その定められる仕方に付ては言わない。

二、一直線中に横られる任意の二つの異なる点は其の直線を決定する。外の直線ではない、其れ自身を決定する。只一つに限ると云うことを主張する。

三、三つの同一直線中にあらざる点ABCは平面 $\alpha$ を決定する。

四、一平面中に在りて同一直線中にあらざる任意の三つの点ABCは其の平面を決定する。只一

つに限る。

五、直線  $a$  の上に在る二点  $A$  と  $B$  とが平面  $\alpha$  の中に横われば  $\alpha$  中の各点は皆  $\alpha$  の中に横わる。これは直線がピッタリと平面に引付くと云うこと。

六、二つの平面  $\alpha$  と  $\beta$  とが一点  $A$  を共有すれば、此の二つの平面は必ず一つの他の点  $B$  を共有する。此の公理などは二つの平面の交わりは直線であると云うことを証明する様な時分に必要である。多くの教科書には此の六の様な形の公理を作つてないから議論に抜目が起る。それを防ぐ為にこの公理がある。

七、各直線中には少くとも二点ある、各平面中には少くとも一直線中にあらざる三点がある。それから空間には少くとも一平面中にあらざる四点がある。是れは能く分つたことである。無論公理のことであるから非常に込入つたことが這入つて来よう筈がない。

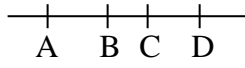
第二、間にと云うことに関した順序の公理。是れが五つに別たれて居る。

一、 $A B C$  を一直線中にある三点とし、 $B$  が  $A$  と  $C$  との間であれば  $B$  は又  $C$  と  $A$  との間にある。

二、 $A$  と  $C$  とが一直線中にある二点なれば、 $A$  と  $C$  との間には少くとも一点  $B$  がある。且つ  $A$  との間に  $C$  を挟むが如き点  $A_1$  あり。

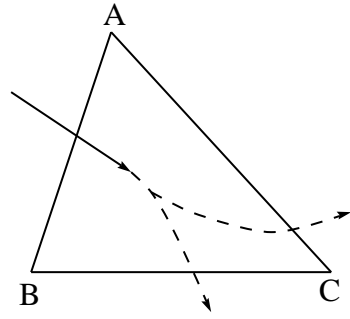
三、一直線中にある三点の中で何れか一つは必ず他の二つの間にあり。

四、一直線中に四点  $A B C D$  があれば  $B$  が  $A$  と  $C$  との間に、且つ  $A$  と  $D$  との間にある。五、 $A B C$  を一直線中にあらざる三点とし、此の三点を含める平面中に  $A B C$  の何れをも通過



第二図

せざる一直線  $a$  取り、線分  $AB$  中の一点を通過すれば、此の直線は必ず又線分  $BC$  中の一点然らざれば線分  $AC$  中の一点を通過すべし (第三図)。



第三図

この公理などは普通の教科書には書いてない。けれども、よくよく調べて見れば斯う云う種類の公理が必要であると云うことを屢々見出した御方は沢山あります。

### 第三、平行の公理

若し一直線が二直線に出会い、同じ側にある二つの内角の和が二直角より小なれば、此の二つの直線は之を断えず延長すれば遂に和が二直角より小なる角のある側に於て出会うべし。

### 第四、全等の公理。是は六つあります。

一、 $A$  と  $B$  とを直線  $a$  中の二点とし、 $A'$  を直線  $a$  中の他の点又は他の直線  $a'$  中の点とすれば  $a$  又は  $a'$  中に  $A'$  より線分  $AB$  又は  $BA$  に全等なる線分  $A'B'$  を定むることを得。

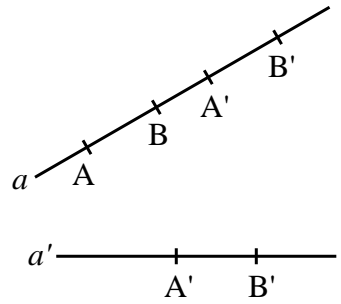
二、線分  $AB$  が線分  $A'B'$  及び  $A''B''$  と全等なれば  $A'B'$  は  $A''B''$  に全等なり。

三、直線  $a$  中の二線分  $AB$   $BC$  が  $B$  の外共通の点を有せずとし、又直線  $a'$  中の二線分  $A'B'$   $B'C'$  も亦  $B'$  の外共通の点を有せずとして、 $AB$  は  $A'B'$  に、 $BC$  は  $B'C'$  に全等なれば、 $AC$  は  $A'C'$  に全等なり (第四図)。

四、第四の二と同様な角に付ての公理。

五、第四の三と同様な角に付ての公理。

六、二つの三角形に於て二辺と其の夾角がそれぞれ全等なれば他の二角がそれぞれ全等である。



第四図

是れ杯などは斯こう云うことに就つての話わを聞かない人であつたならば、非常に奇妙に感ずるでありましょう。普通の幾何学の中では是れは立派に証明して居ることである。併しかしながらヒルベルトの考では公理の中に入れて居る。ヒルベルトは自分の幾何学をやる人は夫それだけのものを本当と見做みなせ。斯こう云うことを宣言して置いて議論を進めるのである。併しかしこのヒルベルトのやつたのが唯一の仕方かたで、是れが完全無欠であると云うことは云えませぬ。

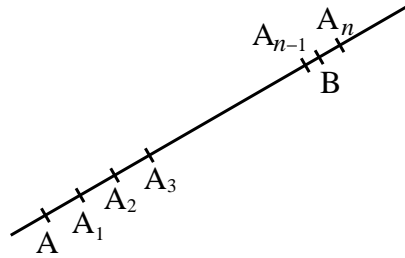
## 第五講

ヒルベルトの研究

昨日仕舞しまいにヒルベルトと云う人の述べ立てた幾何学公理の話を仕掛けて置きました。今日は其の続きを申します。

連続の公理

第五、連続の公理（アルキメデスの公理）。



第五図

$A_1$ を直線 $a$ 中にある任意の二点 $A$ と $B$ との間に取り、 $A_2$ を $A_1$ が $A$ と $A_2$ との間にある様に取り、 $A_3$ を $A_2$ が $A$ と $A_3$ との間にある様に取り、追つて同様に進み、且つ線分 $AA_1$   $A_1A_2$   $A_2A_3$ 等を全等なりすれば点列 $A_2$   $A_3$   $A_4$ 等の中には $B$ が $A$ と $A_n$ との間にあるが如き点 $A_n$ あり（第五図）。

是れは空間に関してそう云う性質を極めて置かぬと困るからである。アルキメデスが数量に関する幾何学を盛に研究する際に此の公理を終始用いて居つた。尤も此処こゝに述べたのは昨日言いました様に、ヒルベルトが其の著述に書いた通り其の儘ままではない。大体は似て居るが其の儘ままを述立てると云うことは少し困難である。

公理の独立と矛盾

完全無欠であるかどうかと云うことは断言することは出来ない。此の如き公理の一群を基礎とするならば、第一に其等の公理は互に矛盾することのないと云うことを証明せんければならぬ。と云うのは、此等の公理の或者を基礎として演繹して導き出だした結果即ち定理と、又他の或者から導き出だして出て来た結果即ち定理とが反対の事項を現わすと云う様なことがあつてはならぬ。そう云うことは決して起るものでないと云うことを証明して置かなければならない。又此等の公理は重複して居らぬ、互



に独立のものであると云うことを証明せんければならぬ。尚一層くわしく言うと、或一つの公理は他の公理を基として其れから演繹して導き出だして来ることは出来ないと言うことを証明して置かなければならぬ。然るに、そう云う研究はなかなか困難である。例えば第二の四（順序の公理の四）の如きものは他の公理から実際に導き出だすことは出来るのである。つまり他の公理に基いて証明すると云うことが出来るのである。それは日本には能く聞こえて居る人であるが、亜米利加の G. B. Halsted と云う人の弟子の R. L. Moore と云う人がやった。其外にもいろいろのことがある。其の研究に付ては今くわしくは言いませぬが、其れが一例である。或者は他のものから導き出すと云うことが出来るのである。そこで、そう云う研究を十分に仕遂げた後でなければ愈々其れが学問の基礎であると云うことは出来ない。随分むずかしい仕事でありましょう。

前々からたびたび言う通り、此等の公理と云うものは絶対的に確實なものと云うことは出来ない。或假定である。先ずそう云うことを本当だとしたらばと云う積りで述立ててあるのである。其故に此等の中の何れか一つでも或は二つでも、それを幾何学の基礎として任意に採用しないと云うことが出来ましょう。第三の平行の公理を採用しないことにして幾何学を組立てる。其処に前に言うた通り非ユークリッド幾何学が出来るのである。第五の連続の公理を採用しないことにすると、其処に非アルキメデス幾何学が出来るのである。そう云うような風で、或公理を用いないことにすると云うと新しい幾何学がズンズン出来る。斯う云うことになる。ヒルベルトの話はそれだけにして置きましょう。

斯の如く、吾々が常に公理として幾何学の基礎にして居るものを採用しないと云うと種々の幾何学が出来るると云うことを知り出したのは、ユークリッドの立てたアイテム（所望）の中で彼の所謂平行線の公理なるものが、他のアイテムに比べると様子が違う。文章から云つても非常に其の有様を異にして

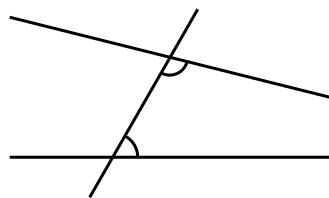
平行線の公理に  
関する研究

ロバチエヴス  
キーとボリアイ

居ると云うことから起つて来たのである。此の公理を疑つて他の公理に依つて証明しようと云う様なことを力めたことは度々であつたと云うことを前に言いましたが、それは極く古い希臘ギリシアの時代からもう云う風があつた。其の平行線の公理に就いて研究した人はトレミー Ptolemy、それからプロクラス Proclus 降つて英吉利イギリスのワリス Wallis、伊太利イタリアのサツケリー Saccheri、それから独逸ドイツのラムバート Lambert、フランスの仏蘭西フランスのルジャンドル Legendre 等である。其外にもいろいろありますけれども、主なる人を挙げるとそう云う人です。これ等の人々は此の公理に関して疑を抱いて、いろいろの事を始めた。併ししか愈々いよいよこの平行線の公理を取去つても新しい幾何学を組立てることが出来て、論理に於ては少しも誤りはないのであると云うことを示すことが出来たのは、露西亞ロシア人のロバチエヴスキー Lobatschewsky と云う人である。此の人が千八百二十六年に論文を公にした。それから、其れと殆ど同時に匈牙利ハンガリーのボリアイ Boljai と云う人が研究の結果を發表した。それは千八百三十二年です。是れは互に独立にやつたのである。時としては兩人とも独逸ドイツで有名なガウス Gauss と云う人から其の思想の土台を得て、それを發展せしめたものであるとも云われて居る。ガウス自身は余り其の事をやつたのではないけれども、此の人に聞いて思想の土台を得て、そうして兩人が段々發展せしめたのであると云う説もある。併ししかそれは今此処ここで詮議する必要はない。それが非ユークリッド幾何学の初である。それから後と云うものは、この平行線の公理に限らず、其他の公理をも取去つて幾何学と云うものを作ることが出来るのである。と云う極く広い考になつて来たので、種々の基礎の幾何学が出来るようになった。それ等の事業に関係をした偉い人を云うて見ると、リーマン Riemann、ヘルムホルツ Helmholtz、ケイリー Cayley、クライン Klein と云うような人です。そこらの研究は少しむづかしいから、今 Lobatschewsky 及 Boljai などがやつた幾何学の一部分を少し述べて見ましょう。そうしたら斯うこ云う風にして組立くみつて行くの

リーマン、ヘルム  
ホルツ、ケイリー、  
クライン等の幾  
何学

だと云うことが分りました。それが講演の主題でないからくわしく言うことは出来ませぬが、少し述べて見ます。



第六図

平行の公理と云うのは、二つの直線があつて、其れを第三の直線が切つて居る、其の同じ側にある内角を加えたものが二直角より小さいとき、その内角のある側の方に断えず延ばして行く。延ばして行けば何時かは出会うと云うのです（第六図）。

斯う云うことが本当のものであると仮定してやったのである。けれども、それが果して出合わないかは分らない。出会うと云う仮定を置いてやったのが吾々の普通にやつて居る幾何学である。

次に定理第一として斯う云うことを証明して見ましょう。

**定理第一**、二つの直線が第三の直線にて切られ、其の同じ側にある内角

の和が二直角に等しきときは二つの直線は出会わず（第七図）。

これは普通の幾何学で云うて居ることでありませぬ。AB、CDがPQに依つて切られ  $\angle APQ + \angle CQP = \text{二直角}$  とするとABと云う線とCDと云う線とは出会わないと云うことを証明しようと思ふ。

仮説により  $\angle APQ + \angle CQP = \text{二直角}$  (1)

故に  $\angle BPQ + \angle DQP = \text{二直角}$  (2)

然るに  $\angle APQ + \angle BPQ = \text{二直角}$  (3)

又  $\angle CQP + \angle DQP = \text{二直角}$  (4)

故に(1)と(3)より  $\angle APQ = \angle DQP$ ,

又(2)と(4)より  $\angle BPQ = \angle CQP$

其故に図形  $APQC$  を取って回転して図形  $DQPB$  の上に重ねると全く重ね合わせることが出来る。其故に  $PA$  と  $QC$  が相交わるとしたならば  $PB$  と  $QD$  とも亦延ばしたとき交わらなければならぬ。然るにそれは二つの点を過ぎ一つの直線を引くことが出来る、そうして一つに限ると云うことを外に公理として極めであるとする不合理になる。其故に  $AB$  と  $CD$  とは交わることがないと云うことの証明が出来た。

此の証明には平行の公理を少しも用いてはない。此の定理は、同一の平面上には相交わらないところの二直線が必ず存在すると云うことを主張する定理である。只一つ存在するかどうか、そんなことは別の話であるが、兎に角交わらないのが必ず存在することだけは分る。其故に次の系が証明されたことになる。これは殆ど前の定理を言直した様なものであります。

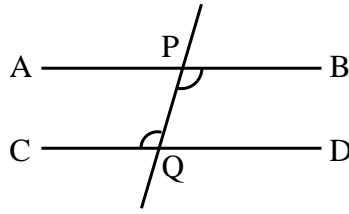
**系。** 同一の平面上に於て一つの点を過ぎ一つの与えられたる直線に出会わざる直線は一つあり。と云うことが証明出来たことになる。是れは平行線の公理に關係なしに出来る。然りと雖も此の定理より、同一の平面上に於て一つの点を通り一つの与えられたる直線に出会わない所の直線は只一つに限ると云うことを断言することは出来ない。之を断言するには所謂平行線の公理と云うものが要るのである。時としては此の只一つに限ると云うことを公理にすることもありません。そう云うことは証明が出来ないから直に其儘公理にしてしまふ。証明するのではない。しかし通例はそうしないで、矢張りユークリッドのやった通りの形に於て平行線の公理を述べてある。それは前の通りであります。一直線が二直線に出会い同じ側にある二つの内角の和が二直角より小なるときは、此の二つの直線は之を断えず延長すれば遂に其の和が二直角より小なる二角のある側に於て出会うべし。

斯う定めて置く。こうすれば先きの只一つに限ると云うことは縁がない様であるが、それは後で関

係がついてくる。

此の公理を定めると云うと次の定理の証明が出来ます。

**定理第二**、平行線の公理を真なりとすれば同一の平面上に於て一つの点を過ぎ一つの直線に出会わざる直線は只一つに限る (第八図)。



第八図

直線 AB CD が PQ に依つて切られたとする。然らば角 BPQ は角 CQP より大なるか、小なるか、若しくは是れに等しかるべきものである。

若しも  $\angle BPQ > \angle CQP$  としたならば

$$\angle APQ < \angle DQP$$

故に  $\angle CPQ + \angle APQ < \text{二直角}$

其故に AB と CD とは出会う。此図で云えば左の方で出会う。次に

若しも  $\angle BPQ < \angle CQP$  ならば

$$\angle APQ > \angle DQP$$

故に  $\angle BPQ + \angle DQP < \text{二直角}$

となつて、是れは右の方で出会う。其故に AB と CD とが出会わないと云うのは第三の場合である。

即ち

$$\angle BPQ = \angle CQP$$

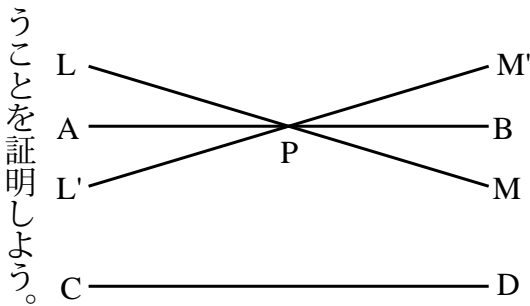
即ち

$$\angle BPQ + \angle DQP$$

及び

$$\angle CQP + \angle APQ$$

が共に二直角に等しき場合である。



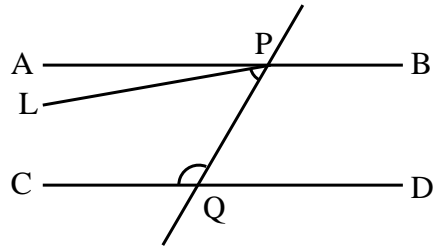
第九図

其れだけの時に限る。其故に平行線の公理を真とすると、 $P$  を通過して  $CD$  に出会わない直線と云うものは、前の定理に依つて一つあるのであつて、今やった定理第二に依つて只一つに限ることになる。非ユークリッド幾何学に於ては、この定理第二の終結即ち「一つの点を過ぎ一つの直線に出会わざる直線は只一つに限る」と云うことを認めないのである。即ち一つの点を過ぎて一つの直線に出会わない直線は只一つではない、と斯うする。けれども一つはある。一つもないことはない。只一つに限ると云うことを否認する。だから二つ以上あるとするのである。定理第一の終結を否認する。と云うことは即ち是れは平行線の公理を認めないことであつて、若し平行線の公理を認めたらば、只一つに限るとなる。只一つに限ると云うことは平行線の公理を認むる結果である。斯うなる。随つて非ユークリッド幾何学に於てはその仮説たる平行線の公理を認めないと云うことになる。

同一の平面上に於て  $CD$  に出会わない直線は、一つはある。一つもないことではない(第九図)。 $P$  を通過して  $AB$  と極めて小なる角を成すところの直線  $LM$ 、 $L'M'$  を引く。そうして此の二直線依つて挟まれた狭き部分に  $P$  を通過して引かれた直線は凡て  $CD$  と出会わないものとして幾何学を組織すると非ユークリッド幾何学が出来る。

**定理第三**、同一の平面上に於て一つの点を過ぎ一つの直線と出会わざる直線が只一つに限るとすれば平行線の公理は真である。

只一つに限ると云うことを仮定したならば平行線公理は真であると云うこと。即わち内角の和が二直角より小さい方に於て必ず出会うと云うことを証明しよう。



第十図

今ABをPを過ぎてDに出会わない只一つの直線とする(第十図)。そうしてABとCDとを第三の直線PQに依って切つて見る。そうすると

$$\angle APQ + \angle CQP = \text{二直角}$$

Pを通じてABとは一致しない所のPLを引いて見ると、PLが図形APQCの間に挟まって居る。そうすると

$$\angle LPQ < \angle APQ$$

従て  $\angle LPQ + \angle CQP < \text{二直角}$

仮説に依つてPAとQCとは出会うことがない只一つの線であるからPLとQCとは出会わなければならぬ。内角の和が二直角より小さくなる様に此の線を引いたので必ず出会う。そこで平行線の公理は証明せらるる様になる。

其故に今次の二つの陳述を并べる

A 平行線の公理。

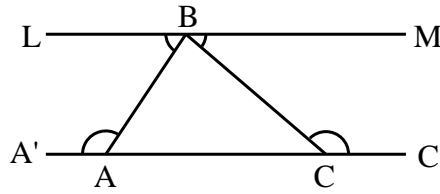
B 同一の平面上に於て一つの点を過ぎ、一つの直線に出会わない直線は只一つに限る。

此の二つの陳述に於てAを真としたならば、其の結果としてBは真である。逆にBを真としたならば、其の結果としてAは真となる。是れは孰れを真としても他のものが其れから出て来ることになる。孰れか一つを土台にとると他の方はそれから必ず証明が出来るのである。今其のBを真なりと仮定して見ましよう。

Bを真なりとすと云うのは、出合わない線が只一つに限ると云うことを仮定する。そうすると、三角形の三つの内角の和は二直角に等しいと云うことを証明することが出来る。言換えたならば、Bを

真なりとするのは即ち A を真なりとするのと同じであるから、平行線の公理を許すならば三角形の内角の和は二直角に等しいと云うことになる。それを定理の形で述べると斯う云うて宜しい。

**定理第四** 同一の平面上に於て一つの点を過ぎ一つの直線に出会はざる直線が只一つに限るとせば、三角形の三つの内角の和は二直角に等し。



第十一図

斯う云うことになる。つまり三角形の内角の和は二直角に等しいと云うことは、この只一つに限ると云うことを仮定した結果である、或はこの平行線の公理を許す結果であると云うことを示す。若しそれを許さなかつたならば三角形の内角の和は二直角に等しいと云うことはなくなる。其処までやってみよう。

三角形 ABC に於て AC を雙方へ延長して A'C' とする。それから B を過ぎて AC に出会わない只一つの直線 LM を引いて見る。是れは普通の幾何学です。そうすると前の定理に依つて

$$\angle LBA + \angle BAA' = \text{二直角}$$

$$\angle MBC + \angle BCC' = \text{二直角}$$

然るに  $\angle BAC + \angle BAA' = \text{二直角}$

$$\angle BCA + \angle BCC' = \text{二直角}$$

故に  $\angle LBA = \angle BAC$

$$\angle MBC = \angle BCA$$

然るに  $\angle LBA + \angle CBA + \angle MBC = \text{二直角}$

故に  $\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = \text{二直角}$



斯<sup>こ</sup>う云<sup>い</sup>う風<sup>かぜ</sup>にして証<sup>しやう</sup>明<sup>めい</sup>する<sup>こと</sup>が出来<sup>こ</sup>ます。

## 第六講

昨日は平行線の公理を採用しないとすると如何なる幾何学が出来るかと云うことに付て話を致しました。昨日言いました通り、平行線の公理に依らないでも、定理第一の系「同一の平面上に於て一つの点を過ぎて一つの直線に出会わざる直線は一つある」と云うことは証明が出来る。併し唯一つに限ると云うことは、定理第二に依つて、平行線の公理を真だと見ると出来る。それから定理第三（定理第二の逆）で一つに限るとするならば平行線の公理が真でなければならぬ。定理第二だけでは面白くない。定理第二だけでは、平行線の公理を真だとすると交わらない線は唯一つに限るが、第三がある為に面白くなる。それから定理第四に於て、同じ平面の上に於て一つの点を過ぎて一つの直線に出会わない直線が唯一つに限るものとしたならば、三角形の内角の和は二直角に等しい。是れは通例の幾何学でやる所である。平行線の公理を認める。平行線の公理を認めれば唯一つに限る。唯一つに限れば三角形の内角の和は二直角に等しい。斯う云うことになる。

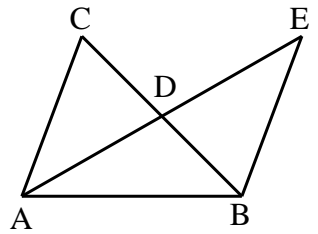
### 定理第五

**定理第五**、三角形の三つの内角の和が二直角に等しからざるときは、同一の平面上に於て一つの点を過ぎて一つの直線に出会わざる直線は唯一つに限らず。

是れは前の定理第四の対偶でありましょう。定理第四は唯一つに限るとしたならば内角の和は二直角に等しいと云うのである。今此の第五は、二直角に等しからざるときは同一の平面上に於て云々と云うのであるから、是れは対偶である。是れは証明を要しないで本当でありましょう。前の定理が証明されて居る以上は其の対偶は最早証明を要しないで真である。

### 定理第六

**定理第六**、其の二つの内角の和を、与えられたる三角形に等しくせる三角形は作ることを得。



第十二圖

即ち斯の如き三角形は存在すると云うても宜しい。斯の如き三角形は一つあると云うても宜しい。是れは話が変わって居るようであるが、後で入用になるから今やって置きます。

ABCを与えられたる三角形とする。そうしてA角に等しき和を有する二角をもつところの三角形を作ろうと思ふのである。作ることが出来れば則ち存在するのである。それは平行線の公理に依らないでやるのであります。

BCの中点をDと為し、ADを連ねて之れを延長し、DEをADに等しからしむる。然らば二つの三角形ADC及びEDBに於て二辺と夾角が相等しい。其故に全く相等しい。

此処へ註解の様にして言つて置きます。

吾々は今平行線の公理に関して話をして居るが、素よりヒルベルトの公理と云うことを前に話したからとて、あの基礎に依つて居るのではない。やはり普通の基礎に依つて居るのであります。今言つた全等の定理は現にやつて居る定理第六を証明する迄に或方法で証明して来たものと見る。今は引抜いてやつて居るのであるからそう云うことにする。此の定理第六をやる前にどうかして或方法で証明して居ると見る。それを証明するには普通の幾何学を調べたら直に分るので、決して平行線の公理を用いて居るのではない。此の全等のことをやるには平行線の公理を用いたのではないと云うことは容易に分る。ヒルベルトの話は別の話にしなければならぬ。ヒルベルトの公理には二辺と夾角とが等しい三角形云々というのが公理になつて居つたけれどもそれは別の話であります。

其故に  $\angle DAC = \angle BED$

故に  $\angle DAC + \angle DAV = \angle BED + \angle DAB$

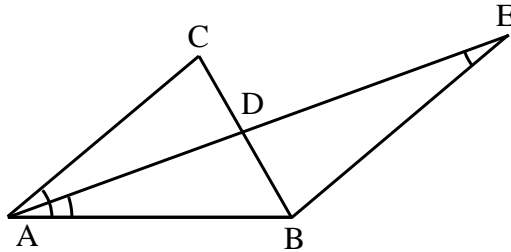
即ち  $\angle A = \angle BED + \angle DAB$

其故に三角形 EDB は求められた三角形である。

此の定理の証明に於ては決して平行線の公理を用いて居ないと云うことを注意しなければならぬ。普通の幾何学中の或定理は平行線の公理を用いて居るが、是れは平行線の公理を用いないでやった。其処を注意しなければならぬ。

定理第七

定理第七、三角形の内角の和は二直角より大ならず。



第十三図

是れは平行線の公理を用いないで証明の出来ることである。先きに平行線の公理を用いたならば内角の和は二直角に等しいと云うことを証明してある。今此処こゝに云うのは、平行線の公理を用いなくして二直角より大きくないとまでは証明が出来ると云うのであって、今其の証明に移ろうと思つ。

A 角を三角形 ABC の三つの角の中で最も小さいものとしてやる。前の定理第六に於けるが如く、他の三角形 EAB を作る。然らば前の通りにやれば

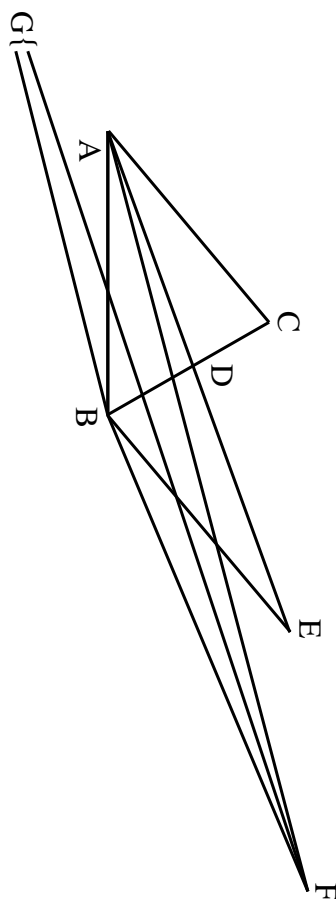
$$\angle BAC = \angle BEA + \angle EAB$$

然るに  $\angle DCA = \angle DBE$  なるを以て

$$\angle DCA + \angle DBA = \angle DBE + \angle DBA$$

故に  $\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = \angle ABE + \angle BEA + \angle EAB$

即ち三角形 ABC の三つの内角の和は、今新たに作った三角形 EBA の三つの内角の和に等しいのである。こんな方法でやって行くと三角形の内角の和は変らぬと云うことになつて居る。そうして角 BEA 及 EAB の中何れか一つは、角 BAC の半に等しきか、然らざれば其の半より



第十四図

小さいと云うことになる。故に其和は  $A-2$  より大ならずである。

次に三角形 EAB の三つの角の中で最も小なるものを求める。それはどの角になるでしょう。必ず BEA が EAB の中に相違ないでしょうけれども、どれと云う訳に往かない。が其の中の小なる方をとる。若又この二角が等しきこともあろうがそしたらばどちらでもよい。その小なる角を定めて前と同じ方法を繰返して第三の三角形を作るといふと、其の第三の三角形の内角の和と云うものは、尚亦元の三角形 ABC の三つの角の和に等しい。しかし其の二角の和は前の三角形 EBA の最も小なる一角より大きくない、従がつて  $A-2^2$  より大ならずである。次に又同様に第四の三角形を作る。順次此の如く進んで行く。其の適用はいつ迄でも出来る。第十番目の三角形に至りますと其三つの角の和は矢張り元の三角形 ABC の三つの角の和と等しくして其の中の二角の和は  $A-2^{n+1}$  より大ならずである。適用の回数即ち  $n$  を大きくすれば二角の和は如何程でも小ならしむことが出来る。

其故に若し一つの三角形ABCの三つの内角の和を二直角よりも大きいと仮りにして見る。これから論法は帰謬法による。即ち元の三角形の和が $180^\circ + \alpha$ であるとすると、そうすると $\alpha$ が如何に小なりとも零とは違ふ。零と異なるものがあつた時分には、其の三角形ABCより進んで前述の如き方法に依つて、仕舞には二角の和がどれ程でも小さくなると云うことが出来るから、 $x$ は随分小さいのでしようが、どれ程でも小さくすることが出来るものよりは大きいでしょう。からして、二角の和が此の $x$ より小さくなつた三角形を作ることが出来る。そして其時に二角の和が $x$ より小さいのに三内角の和は変らなかつたと云うことを注意しなければならぬ。そうするとそのとき第三角は二直角より大きくならねばならない、是れは出来ることではありませんまい。それは有るべからざることである。そのときは三角形が反り返つてしまふ。裏手にある三角形が出来て来る。之れは不都合でしょう。

其故に平行線の公理に依らないで、三角形の和と云うものは二直角より大なることはない。二直角に等しいか、或は二直角より小さいものの中であると云うことの証明が出来る。然るに前の定理第五に依ると三角形の三つの内角の和が二直角に等しからざるときは、同一の平面上に於て一つの点を過ぎ一つの直線に出会わざる直線は唯一つに限らずとある。而して定理第七に依れば、三角形の内角の和は二直角より大ならずとある。其故に定理第五は變じて次の如くになります。

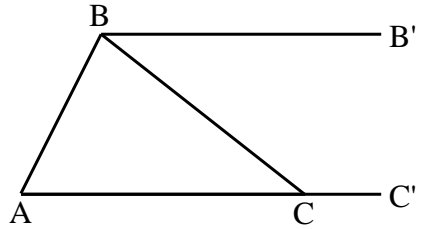
#### 定理第八

ぎ一つの直線に出会わざる直線は唯一つに限らず

と云うことになる。即ち二つ以上あることになりす。

#### 定理第九

定理第九、 三角形の三つの内角の和が二直角に等しきときは同一の平面上に於て一つの点を過ぎ一つの直線に出会わざる直線は唯一つに限る。



第十五図

是れは定理第四の逆であるから別に証明することを要するのである。其の証明は次の通りである。

三角形 ABC に於て B を過ぎ AC に出会わざる直線が限りなく多くあったとし、其の中出会う直線に最も近いものを BB' とし AC を延長して AC' とする。

然らば  $\angle C'AB + \angle B'BA = \text{二直角} - x$

即ち  $\angle C'AB + \angle B'BA + x = \text{二直角}$

而して与えられたる三角形 ABC に於て角 BCA は定理第七の方法に依りて  $x$  より小さくなつた時を択んで置かれたのであるとする。即ち

$$\angle BCA < x$$

とする。然らば

$$\angle C'AB + \angle B'BA + \angle BCA < \text{二直角}$$

然るに BC は AC と出会わざる所の線 BB' と BA との間にあるべければ

$$\angle B'BA < \angle CBA$$

故に  $\angle CAB + \angle CBA + \angle BCA < \text{二直角}$

この二直角より小さくなると云うことは仮説に反する。斯う云うことになる。それで定理の証明が出来た。即ち帰謬法に依つて証明が出来たのである。帰謬法という言葉に就いては明日お話しする積りであります。

然るに定理第九の対偶は真なるが故に、一つの与えられたる直線に出合わない直線は唯一つに限らずとしたならば、三角形の内角の和は二直角に等しからざることになる。即ち三角形の内角の和は二

直角より小さい。故に定理第十が得られる。

**定理第十**、同一の平面中に於て一つの点より一つの直線に出合わざる直線が唯一ただつに限らずとすれば三角形の内角の和は二直角より小なり。

是れ吾々が初めから証明しようとならした所のものである。

茲こゝに於て今迄述べた事柄を総括して見ると次の様になる。先まず二つの命題を挙げて置きます。

(A) 平行線の公理。

(B) 同一の平面上に於て一つの点を過ぎ一つの直線に出合わざる直線は唯一ただつに限る。

(C) 三角形の内角の和は二直角に等し。

斯か様ように三つの陳述を掲げて置くと、

(1) Aが真なりとすればBは真なり (定理第二) 随つてCは真なり (定理第四)

(2) Bが真なりとすればCは真なり (定理第四) 又はAは真なり (定理第三)

(3) Cが真なりとすればBは真なり (定理第九) 随つてAは真なり (定理第三)

即ち此の三つの陳述の中で何れか一つが真であるとしたならば、他の二つと云うものは其の結果として真である。此の三つの陳述の中で何れか一つを真なりとせしものがユークリッド幾何学 Euclidean Geometry である。又其の中の何れをも真としないと云うことにすれば非ユークリッド幾何学 Non-euclidean Geometry である。茲こゝに於て三つの内角の和が小なる如ごとき三角形の成立と云うものを認めなければならぬ幾何学が起る。しかも其の幾何学に於ては、三つの内角の和が如何いか様とも吾々が望むだけ小さい、極端に云うならば三つの内角の和が零であると云うような三角形を作ることが出来る。公理に関しては是れ丈だけの話に止めて置きます。



## 第七講

公理なき幾何学  
と定義なき幾何学

是迄話して来た所に依りますと、基本の概念の定義と云うものは不要である。公理が基礎となると云うて宜しい。併し又一面から観ると、其の基礎にした一群の公理は基本の概念の定義と云つても宜しい。公理其者に依つて基本の概念の意義と云うものが定まつて居る。定義無しの幾何学は是れは成立ちます。殊に前に言つたようなノミナルデフィニションと云うようなものは是れは無くても構わぬ。定義無しの幾何学と云うものは成立つても、公理無しの幾何学と云うものは成立つものでない。所が平行線の公理と云うものは其の真否が早くから疑われたので、或時代には公理の無い幾何学と云うようなものを企てたこともある。Thompsonと云う人の Geometry without axiomsと云うのは有名な本でありますけれども無論失敗に了つて居ります。

定理と系

今度は定理に就いて言います。幾何学の基礎が定まつたならば、それから演繹約推理に依つて種々の結果を導き出す。其の結果は定理として順を逐うて掲げられて居るのである。時に系と云うものがある。系と云う名で掲げられてある陳述があつても、是れ皆定理に外ならぬものである。又普通の教科書に於て問題或は例題として掲げられて居るものも多くは定理である。同じく定理であるけれども、或ものを系とするのは、其の主なる定理から容易に導き出し得る定理であるからである。之れを独立させたことにしても一向差支ない。所が、容易に出ると云うけれども、實際は普通の教科書にでも容易に出ないのがある。それから問題の中の定理は、之を引用して他の定理を証明することの機会が少いと云う様なもので、多くはそうである。けれども、それも其の幾何学を建設する者の考に依つて番号を附けた主なる定理に引き直しても、それは一向差支ない。

定理の形

次には定理の種類に付て話をして見ましょう。近頃では、我国に於ては一般に定理の形は、甲が乙

なれば丙は丁なりと云う形になるものとして取扱つて居る。凡ての定理が斯の如き型式に為さるることが出来るかと云うと、それは出来ないでない。けれども、それが為には非常に無理だと思われる程のことを忍ばなければならぬと云うことは御承知であろうと思う。それが為には、余計な言葉である様な、例えば「吾々の考うる所のものが四辺形であるならば」として「吾々の考うる所のもの」と云うことを入れなければ困ることがある。斯う云う様に「吾々の考うる所」と云うことを入れて来ないと形が調わないと云うことがある。特に簡單なる定理をこの形に直すと云う時分に、そう云うことを何か入れないと具合が悪い。自然には甲乙丙丁と云う四つが揃わないと云うことがある。併し私の考は、左程に困難を忍んで迄も定理というものを一つの形式の下に置かなければならぬとは思ひませぬから、少し変わった説を言ひましょう。

定理と云うものは、私が真だとする所の主張を述べたらそれで宜しい。甲が乙ならば丙が丁なりと云う表わし方は、文法で謂う所の接続法である。吾々の主張は必ず接続法に依らなければならぬと云うことは少しもない。それに直さなければならぬと云うことはあるまい、吾々の主張は常に使う言葉でも何でも皆接続法でなければならぬと云うことであるでしょうか、そんなことはないでしょう。

定理を分類すると先ず四通りに分れると思う。幾何学で謂う所の定理は、自分が真だと思ふ所を主張することが出来たら皆其れは定理である。

### 第一種 存在に関する定理

例えば、一つの点より一つの直線に至る垂線は一つある。そうして唯一つに限る。今之を甲が乙なれば丙は丁なりと云う形に直そうとすると非常に難しいことになる。併し直して考えなければならぬと云うことは面白くないと思う。吾々の主張が現われたらそれで沢山である。其外こう云う風なこ

存在に関する定理

定理の種類

第二種 計量に関する定理

とは幾つもある。此の存在に関する定理に向つても其の逆を取扱かいたいことがある。逆と云うのは通例の意味に従つて云うのですがこの存在の定理の逆と云うものは意味がない。どの定理にでも逆があるかと云うと、此の定理などに向つては、逆は非常にコジ付けたら出来るかも知れぬが、そんなものは要らない。どの定理でも皆逆がある杯などと云うことは、殆ど無理なことであると思う。

是れは等不等に関する定理と云つても宜よろしい。その方が能く分る。それは、甲は乙に等し、斯こう云う方は、之を大小に依つて區別すれば二つある。甲は乙より大なり。乙は甲より小なりと云う二つある。例えば、直角三角形に於ては斜辺の上の正方形は他の二辺の上の正方形の和に等し。是れは立派な主張である。それを殊更に苦しんでまで、甲が乙なれば丙は丁なりと云う形にせんでも宜よろしい。或は、鈍角三角形の鈍角に対する辺の上の正方形は他の二辺の上の正方形の和より大なり。是れも立派な主張である。真理である。それを苦んで、甲が乙なれば丙は丁なりと云う様な形に直す必要はない。あれで十分な主張である。此種の定理「甲は乙に等し」或は「甲は乙に等しからず」に於て甲と乙とを取換えて一向差支さしつかえない。しかし通例の逆と云うものとは少し違ふ。甲が乙に等しいと云うことが分つて居おつたならば直に乙は甲に等しいと云つて差支さしつかえない。AがBに等しかったらばBがAに等しいと云うことは極まつて居ることである。それを逆と云えるか云えないかは別の話である。若もしそれが、甲は乙より大なりと云われて居つた時分には、乙は甲より小なりと云うことが出来る。即ち甲と乙とを取換えることに就つては更に苦む必要はない。若もしそれを逆と云えば其の逆を述べるのに一向躊躇することはいらぬ。今言つたのを、直角三角形の二辺の上の正方形の和は

斜辺の上の正方形に等し。斯う云うても差支ない。或は第二の方でもそうである。鈍角三角形の二辺の上の正方形の和は鈍角に対する辺の上の正方形より小なりと云えば宜しい。大なりとあつたら小なり。等しからずとあつたら、等しからず。と云えば宜しい。

### 第三種 包含に関する定理

是れは常に云うものです。是れは二種類に別ける。

(1)直説法的定理 (2)接続法的定理

(1)直説法的定理　これは甲は乙なりと云う形の定理である。強いて直せば矢張り、甲が乙なれば丙が丁なりと云う形に直るには直る。けれども前に言う通り大分苦しまなければならぬ、余計な言葉を入れて来なければならぬと云う様なことがある。甲は乙なりと云えば、「なり」と云うのは、甲は乙の中に含まれると、斯う云う意味であるから、此の場合に於ては直に取換えることは出来ない。それを若し取換えるとしたならば証明を要する。

(2)接続法的定理　是れは又次の四つに別けることが出来ます。

- (イ) 甲が乙なれば丙は丁なり。
- (ロ) 甲が乙に等（不等）しければ丙は丁なり。
- (ハ) 甲が乙なれば丙は丁に等（不等）し。
- (ニ) 甲が乙に等（不等）しければ丙は丁に等（不等）し。

斯う云う様に二つの言葉を区別するには「なり」或は「等不等」と云う言葉に依つて結付けてあるのが幾何学に於ては最も多い。そうして後の三つと云うものは、之を初の(イ)の形に直されぬことはないけれども、前にも言う通り、苦んで迄直さぬでも宜しい。此の接続法的の定理も亦逆は直に述

選出に関する定理

#### 第四種 選出に関する定理

べていかぬことは分つて居る。それは証明しなければならぬ。

是れは、甲は乙なるか或は丙なりと云う形である。甲が乙なれば丙は丁なるか或は戊なり。斯う云う主張をすることがある。例えば、何々の性質を有する三角形は二等辺三角形であるか或は直角三角形であるかなりと云う。それを逆にすれば二等辺三角形でなかったら何々の性質を有する三角形である、直角三角形でなかったら何々の性質を有する三角形である。斯う云うことを主張することとなる。しかしこれは明白に純然たる逆ではないでしょう。此種の定理に向つては逆はこしらえる訳には行きませぬ。逆を拵えようと思つたら、それは逆でないものを作らなければならぬ。

定理には斯う云う四種類があるうと思われます。併し前に言います通り、現在は定理の形は接続法的の(イ)にすると云うのが広く行われて居るのであるから、教育の上には於ては、今私が言つたような風のを直に全国に実行して宜いか悪いか。それは教科の統一を破ぶる恐れがあるから能く考えた上に判断しなければならぬ。

定理の証明法

次は、勿論御承知のことでありましようけれども、包含に関する定理の証明法に就て述べましよう。其の定理を証明する方法にはいろいろある。

総合的証明法

(1)総合的証明法 (直接証明法) 是れは仮説から終結を段々と導き出だす普通の方法である。直説法的定理で云えば主位の中に含まれた性質から賓位の中に含まれた性質を導き出す。

解析的証明法

(2)解析的証明法 是れは終結が成立つには斯の如き条件なかるべからすと云う風にやる。尻からやる。仕舞の方が成立つものとしたならば斯う云うことがなければならぬ。其の条件が成立つには又斯の如くでなければならぬと。順次あとへ戻す。然るに、斯の如き仮説が与えられて居る、其故に終結は成

立するのである。斯う云う風に証明する。即ち証明せんとする事項を分解して進んで行く。そう云う方法もありましょう。前の総合的証明法とは議論の方針が逆である。時としては総合的と解析的と此両つの方法が併用されることも差支ない。雙方から出て来て出会うことにする。一面に於ては仮説から終結に向わしめ、他面に於ては終結から仮説を出さんとし、途中で両者をつなぐこととする。

定理の証明法を案出するに当つては通例第二の解析的方法が宜しい。例えば如何にして其の証明法が得られたかと云うことを生徒に示す時などは解析的証明法が宜しいとせられて居る。解析的証明法は結果の知れて居る場合に於ける好き証明法である。併し事を発明する時分には常に結果が知られて居るのでない、結果が知られて居つて発明するならば是れは楽な話である。

時として解析的証明法のことを間接証明法と云うことがあります。併しそれは普通ではない。通例間接法と云うのは今言う解析的証明法を云うのではなくて、その解析的証明法の変形したものを云つて居る。と謂うのは、或る定理を証明するには其の対偶を証明したら宜しいのである。即ち終結が成立たざれば仮説が成立たないと云うことを証明する。それを間接法と云うて居る。

(3) 帰謬法 是れは間接法に似た所がある。間接法に於ては終結が成立たないとすると仮説が成立たないと云うことを示す。然るに帰謬法に於ては終結が成立たないとすると、仮説が真なる場合に於ては他に証明して置いたところの定理、若くはズット遡つて当初の公理と矛盾した結果に到着すると云うことを示す。

(4) 同一法 是れも御承知のことでありましようが、前の間接法がありさえすれば別に之を独立の方法と認めるには及ばないのでありますが、多くの定理の逆を証明する場合に此の如き独立の証明法があるかの如く思うて居ると直に其の定理の真であることを知ることが出来るから、そう云う名を附けた。

(5) 転換法 是れも亦多くの定理の逆を証明する時に、一つの定理が真であると云うことが分つたならば、其の逆を証明する時分に入用なものであつて、仮説及終結が数多くある時に、二つ以上ある時に用いる方法である。やはり是れは間接法に基いて居るのである。だからして、間接法と云うものを一つの独立した証明法と見るならば転換法と云うものはなくても宜しい。けれどもそう云う別の方法があるかの如くに思うと云うと直に其の逆が真であると云うことが出来るから斯うやつてある。転換法の論法が正しいと云うことを証明しようと思えば間接法に依る外ない。

先ず其れだけであります。そうして間接法と帰謬法と転換法とには、終結を許さないとするならばと云う考が這入つて居る。斯う云う所が共通になつて居る。物は皆別々に違ふ。各々違ひますけれども、間接、帰謬、転換に於ては終結が悪いとするならばと極めて掛かる点が同じであると云うので、初等の教育に於ては時々之を同一のものとして看做してやつて居ることがある。けれども、それは嚴格に云えば不正当である。寧ろ別けるべきものである。けれども例えば代数学で不尽根数のみが無理数ではないが、之であるかの様に云うて居るが如き便法を取つても教育上には反つて宜しかろう。

次には計量に関する定理の証明法。それは等しいか等しくないかの証明である。是れは重置法に依つて証明すべきものである。是れも詳しく言うたらば宜しいが、時間が無いからザツと申します。その重ね置くのに種々なる方法がある。眼前にある二つの図形を其の儘重ねて置くことでもあります。或はそれを多くの部分に切つて、各部分を重ねてやることでもあります。或は第三の図形を其の眼前にある二つの図形に付け加えて重ねたり又は切つて重ねたりすることもあります。或は予め等しいと云うことを知つて居る第三と第四とを眼前にあるそれぞれに付け加えて重ねる或は切つて重ねると云う様なこともありませう。兎も角も重ねると云う方法に依らなければ等しいか等しくないかは

分りませぬ。

それから存在に関する定理は主として重置法と帰謬法によりて証明する。それから選出に関する定理の証明法は全く是れは何とも云うことは出来ませぬ。包含の定理の時分につかつたのをを用うることもあるし重置法を用うることもあるし、いろいろ併用して居ります。

極大極小に関する定理

それから定理の中で極大極小に関する定理と云うのがある。若し其の極大極小の図形が与えられなく探がすのであると其の儘では定理の形でないけれども、終結を添えさえすれば何時でも定理の形になるべき性質のものである。唯それを吾々の練習の問題とするならば終結を匿して置いた方が宜しいと云うので匿してあるだけである。

軌跡に関する定理

それから軌跡に関する問題も矢張り其の通りで、何々の軌跡を求めよと云う風にして匿してある。けれども終結を添えさえすれば矢張り定理の形になる。軌跡に関する定理は通例云う所の定理が二つ以上含まれて居るのである。このことは軌跡に関してのみではない。軌跡に関して居らぬ定理にも一つのような形に述べてありながら、実は分解して見ると二つ以上の定理であること云うことがある。軌跡に関する定理は必ず二つ以上の定理が含まれて居る。軌跡の普通の定義に依ると、或條件に適する点は或図形の上であり、其の図形の上にある点は其の條件に適すると云う。それ故二通りの証明を要するのである。二つ以上と云つたのは次の意味に於て云うのである。其の第二の部分、点が或図形の上にあるならば、其の点は或條件を満足すると云う。其の條件が沢山ある、二つ以上あると云うと斯うなつて居るのである。少し説明を委しくしましょう。

軌跡なりと断定するに当りて心得べき極めて重要な注意



AがBなれば  
CがDなれば  
EがFなれば

Gなる点はHなる図形の上にあり

それが最初の部分です。是れは一団となつて居て碎くことは出来ない。けれども其の第二の部分を証明しようとする時分には、

Gなる点がHなる図形の上にあらば

AはBなり  
CはDなり  
EはFなり

斯う云うことはどうしても証明することは出来ない。

條件が一つ例えば「AがBなれば」のみなればそれは直ぐやつても宜しい。例えばGなる点がHなる図形の上にあればAはBなりと証明すれば宜しい。けれども、條件が沢山となればそうはならぬ。その第二の部分を取扱うときには必ず前に仮説であつた数多の条件の中の一つを採つてそれを終結とし他を矢張仮説のままとせねばならぬ。そうすると条件の数に応じて幾つも沢山の逆の場合が出来る。

例えば、

点Gが図形Hの上にあれば

AがBなれば

CがDなれば

EはFなり

点Gが図形Hの上にあれば

AがBなれば

EがFなれば

点Gが図形Hの上にあれば

CがDなれば

EがFなれば

CはDなり

AはBなり

此の三つを一々証明せねばならぬ（委細は拙著数学叢書第四編軌跡問題第十頁を参照されたい）。

元來軌跡の定義は一つの條件を与えられて居るが如くに述べられて居るのです。併しその曖昧の定義をそう云う様な二つ以上の條件の場合にも適用しようと思つと云うと、此等の凡ての場合を取扱うのであるとしたのが一般に正当であると思う。併しながら、定義の中にそう云う曖昧なことがあつてはいけないとして何れか一つの逆の場合を取扱つたら宜しいと、斯う云う風に述べてあつたらばそれは無論事が簡単となりて都合がよい。併しながら又若しそう云うことをやって置くと何れの逆を扱ふべきかと云うことが實際上問題になりましょう。時としては次の様な説を述ぶる人がある。それはこの逆の場合に於て何れか一つやつて置いたならば即ち定義の通りにしたことになると思つと云うのです。例えば

点Gが図形Hの上にあれば

AがBなれば

CがDなれば

EはFなり

を証明すれば

点Gが図形Hの上にあれば

AはBなり  
CはDなり  
EはFなり

を証明せしことになる。と云うのです、しかしそれでは点Gが図形Hの上にあつても必ずAがBなりと、CがDなりとが証明せられて居ない、図形Hの上の点でAがBなりと、CがDなりとの条件を満足せざるものがあつたらば何とも致し方がない。そんな点はあるかも知れないから、此論者の説は立たぬと思う。而して実際の場合には此の条件の数が二つなるか三つなるかを判断するのに困難なることが随分ある。それが為め誤に陥いることもある。よく注意せねばならぬ。

作図題

次は作図問題に付て言います。或図形を作れよと云う問題がある。是れは無論定理でない。所謂作図の規矩或は作図の手段と云われて居る、吾々に許容された三つの方法に依つてやるべきものである。此の三つの方法は前に言うた通りユークリッドがプラトーの意を承け継いで定めたものである。方法が此の如く制限せられて居る上に之を用いる回数が有限でなければならぬ。それは書表わしては無いけれども有限でなければならぬ。無限の回数之を施しても宜いと云うことは、口で言うべくして實際に行うべからざることである。其の制限の為に作図問題が可能と不可能の場合に別れるのである。だからこの初等幾何学の範圍を脱しては不能問題も可能問題となる（拙著数学叢書第二編初等幾何学作図不能問題参照）。

作図題の能不能

作図問題を解くに當つては四つの部分を作るべきものであると云うことは常に知られて居ることである。

## (1) 解析

- (2) 作図
- (3) 証明
- (4) 吟味

斯う云う部分を作るべきものであると云うことが通例云われて居る。

解析に於ては、求められたる図形が成立つときに存在する所の一つの条件を見出たのである。解析は作図の方法を案出するのに必要なばかりではない。寧ろ之を案出するに用いるだけのことであれば、必ずしも作図題の解答の中に入れべき性質のものでありませぬ。案出するだけならば、どうしてやつても構わぬのです。発明をする人が、発明するに至つた来歴とか動機とかをすつかり云うには及ばぬ、其の方法を夢に見たのでもよい。出来上がった処だけ云つたとて其れで沢山なものである。併し解析は其れよりか重大な任務をもつて居るのである。それは解析に於て求められた所の条件に従えば、求められた図形のあらゆるものが皆出来る。その条件に従つてやりさえすれば有らゆる図形が出来ると云うことを断定するのに必要なものである。それで之を略してはならない。作図は唯作図の方法を述べるに止まるのである。それから解析に於て求められた所の条件に従つて作つた図形が果して与えられたる条件に適して居るかどうかと云うことを調べなければならぬ。之れが所謂証明の部分である。吟味に於ては能不能の場合を別ち、作図の方法がどう云う条件の下に於ては能である、どう云う条件の下に於ては不能である、と先ず能不能の場合を別ける。又作図可能の場合に於て作り上げられたる図形が一つであるか、二つであるか、又有限であるか或は無限に多いかをしらべる。此の吟味の部分は其の範囲が甚だ曖昧であります。今言つた丈けならば極まつて居ります様ですが、其外に尚特段なる場合には、如何なる特段な方法で作つたら宜いかと云うこと迄も吟味の中で述べて置くこと

教育上作図題を  
如何いかに教授すべ  
きか

があります。其の辺から言う吟味の範囲は頗すこぶる曖昧であります。

そこで数学教育の上に於ては此の四つの部分を作図の解答に常に備えさしておくことがないのみならず、それは出来ないことである。特に吟味などに至つては、外觀の上に於ては簡単な問題であつても、非常に困難であつて吾々でさえも出来ないと言ふ場合が沢山ある。それを中等学校の学生に向つて望むと云ふことは無理である。或る時には理論に少しも抜け目がない様に色々のことを教えて置き、言つて置きますが、何時いつでもそれを嚴格に守つて居ると云ふことが出来ないことが甚だ多い。吟味の方は非常に困難なことが多いからやつたりやらなかつたり、好い加減にして置く。解析の部分も略して居ることがあります。解析はしないでいきなり図形の方法が得られた如ごとくに解答の部分として第一に作図をやつて居る。それは課せられた問題が簡単であるからそれでもよろしい。作図と証明に至つては、是れはどんなことがあつても略することは出来ない。作図題に就つては其の解答に時として此の四つの部分があると云ふことを教えるは宜よろしいが、併しかしながらそれを常に守らせると云ふことは出来ないことでもあります。生徒と云ふものは具合好く時々前に言つたことを忘れて呉れるものである。それで教師は誠に都合が好い。

是れで止めて置きます。(完)

## 附 録

### 第一、非ユークリッド幾何学について

数学は大体二つに分れる。数の方面と空間の方面となり。フランスの人ポアンカレ<sup>H. Poincaré</sup>（一八五四—）は数学の基礎について次のごとくいえり。

旧来、吾人は整数、分数、連続量、空間、点、線、面、などの非常に多数の概念を原始的なるもの、分解し難きもの、直観的のものと考え、これらを数学の基礎としたりき。しかるに今日はただ一つの整数の概念のみを存し、他の諸概念はみなこの聯合より生ぜるものとなす。かくのごとくにして初て、吾人は完全なる厳正に到達し得たり。

誠にかくのごとくにして、点、線、分数などは勿論時間も空間も整数に帰するをうるものなれば実は数と空間との差はなきなり。この考は氏にさきだちてワイヤーストラス氏 Weierstruss の常に保持せる所にして、後にクライン氏 Klein 「数学の整数論化」とこれを名づけたり。しかれども今空間についてのみ専ら述ぶることとすべし。厳密なる計算証明にいたりてはここにはなすをえず。

元来幾何学は空間における図形の性質を論ずる者なり。その幾何学は今より二千何百年という前にかの有名なるユークリッド氏 Euclid によりて組織せられたるものなり。されど氏はその「幾何学原本」中にある総ての証明の発見者にあらず。氏以前に出来居たるものと氏自身のものとを合せて、それらを順序的に排列せる所に大なる価値あり。その幾何学の基礎となるものは、

#### (1) 定義。Oroi (Definitions)

(2) 公準。Axioma (Postulates)

(3) 普通概念。Koinai Ennoiai (Common notions)

の三者なり。定義については古来大なる異議起らざりしかば、この原本の版を異にするもその形大同小異なり。しかるに公準と普通概念との名称、区別およびこれらの中に羅列せられたる事項は時と共に変化して、遂にいわゆる非ユークリッド幾何学 Non-Euclidean Geometry というが起るに至りたるもこのうちの一事項の研究が基となれるなり。

仏人ペイラール氏 Peyrard が一八一四年に著したる「ユークリッド著作集」Les Oeuvres d'Euclide, en Grec, en Latin et en François が最も古き有様のユークリッドの原本の信憑すべきものとせられおるものなるが、これに従えば六つの公準と九つの普通概念とあり。現時行われおる中等教育の教科書、たとえば菊池氏「平面幾何学」などには、普通公理 Common Axioms 幾何学的公理 Geometrical Axioms および作図の規矩 Means of Construction の名の下に排列せられたり。尤もユークリッド第四公準「すべ総ての直角は相等し」というがごときは他の公理によりて証明するをうるがゆえに最早、公準とせられおらず。いわゆる公準(要求仮定)とは幾何学構成上において必要なる事項にして、証明なしにその真なることを承認せむことを願う所の著者の所望をいい、普通概念とはたとえば「同一の量に等しき二つの量は相等し」とか「等量と等量との和または差は相等し」というがごとき、すべ総ての量に通じてなにも疑を容るべからざる普通概念をいう。後者は普通にいう所の普通公理にして、前者は今いう所の幾何学的公理と作図の規矩とを合せたるものなり。今ペイラール氏に従つてその六つの公準を書けば次のごとし。

(1) 二点の間に直線を引くことを得。

- (2) 有限直線を延長することを得。
- (3) 任意の点を中心とし、任意の半径を以て円を画くことを得。
- (4) 総ての直角は相等し。
- (5) もし一つの直線が二つの直線に出会いその同じ側にある二つの内角の和が二直角より小なれば、これら二つの直線は之を絶えず延長せば、終に和が二直角より小なる二角がある側において出会うべし。(これが問題となれるもの)。

(6) 二直線は場所を囲むこと能わず。

始の三つが作図の規矩となり、終の二つが幾何学的公理となれり。いつの頃より公理 axiom という詞がユークリッドの中に入り来りしや分明ならずといえども、この詞が用いらるるようになりてより、公理を自明の真理なりと思ふもの多くなれり。しかれども公理は仮定に過ぎずして公準という詞が遙に優れる所より、極めて近き頃に表れ来る論文著書にはこれを用いること多し。勿論論理学にいう所の公理とは大差あり。

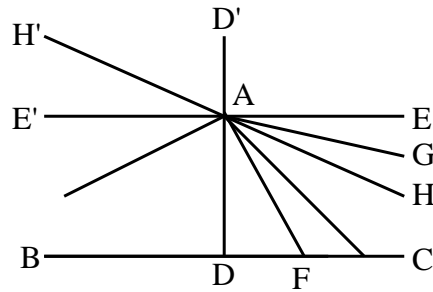
哲学雑誌の第二四二号において元良氏が「第十二番の確言」(確言なる詞は通例用いず)すなわちペイラール氏の第五の公準が他と余程異なる様子のある所より多くの学者に注意せられたり。ユークリッド氏が「三角形の二辺の和は第三辺より大なり」という定理を証明せるをエピキュロス氏 Epicurus (紀元前、三三七か三四一—二四〇)は「驢馬でもわかる」Manifest oven to asses といつて罵れるほどなりき。しかるにこの第五の公準はこの定理よりも複雑なる形を有するにかかわらず、証明なきは奇なりとの考を起すものあるに至りたり。この第五の公準は通例、平行線公準と称するものなるが、その二つの徐々に接近する直線の相交るや否やは観察の範囲あるいは作図の範囲を超越せるものなり。始めて



この平行線公準を他の仮定に拠りて証明せんと企てたるはトレミー氏 Ptolemy (紀元前一六八年死) なり。しかし要用なる研究として認めらるるはイタリーのサツケリー氏 Saccheri が今より約百七十年前すなわち一七三三年その死するまえに出版したるものなるが当時はだれも注意するものなかりき。一八八九年に同じくイタリーの人ベルトラミー氏 Beltrami (紀元、一八三五—一九〇〇) がこれに関する小引を世に公にするに至りて、非ユークリッド幾何学が既にこの頃起りつつありしことを知らるるに至れり。しかれどもサツケリー氏の意はユークリッドを金科玉條として崇むるにありたれば、その結果は十分ならざりき。カント氏が「無雙の人」と頌めたるベルリンの数学者ラムバート氏 Lambert (一七二八—一七七七) はサツケリー氏のごとくユークリッド崇拜に陥らずしてこれに貢献する所ありたれども、矢張<sup>やはり</sup>十分ならざりき。この後ドイツのガウス氏 Gauss (一七七七—一八五五) およびフランスのルジャンドル Legendre (一七五二—一八三三) も亦この方面に勉めたり。元良氏はガウスの著述を大にむずかしきようにいわれたれども発表せられたるものはそれ程のものにあらず。かのシワイカルト氏 Schweikart も亦ここにその名を列せらるべき権利あり。

遂にロシアの人口バチエヴスキー氏 Lobachewsky (一七九三—一八五六) に至りて完全なる非ユークリッド幾何学出来あがり。「完全なる平行論を有する新幾何学初歩」 New Elements of Geometry with a Complete Theory of Parallels (Halstat 英訳) はすなわちこの書なり。氏はかの平行線公準を次のごとく置換せり、一つの平面内における一点より出行く<sup>すく</sup>総ての直線はその平面内にある一つの与えられたる線に関して二種類に分たる、すなわち相交線と不相交線とこれなり。もし吾人がいずれか一方の種類に属する直線を取りこれを回転して他の種類の方に動かすときは、吾人は終<sup>つひ</sup>にこの二種類の間の境界位置にある一直線に到達すべし。この直線は勿論<sup>もちろん</sup>、唯一にして、しかもその与えられたる直線に平

行なるものと云いぬ。



第十六図

上の図に於てAを一平面中の一点とし、BCを同一平面中の一直線とす。ADをBCの垂線とし、AEをADの垂線とす。AEが延長せられたるときDCと出会わざる所の唯一の直線なりや否やが不確定なるを以て、AEの外にAGのごときものありて、いかに延長するもDCに出会うことなしとす。Aを過ぐる一つの直線を引き、初はAGのごとくDCと出会わざるものとし、これを回転してADの方に近かしむれば、いつかはDCと出会う所の直線AFのごときものとなるべし。かくして不相交線の範囲中、相交線に最も近きもの、すなわちその境界線を点Aを通り、線DCに平行なりというなり。これはADの右側について云いたることなるが、ADの左側についても亦点Aを過り、線DBに平行なる一つの線を生ず。角HADを平行

線HAの平行角なりという。垂線ADの函数にして、ADが零に等しきときは角HADは直角にしてADが無限に増すときは、角HADは無限に減ず。ADの値のいかに拘わらず、角HADが直角なりと仮定すれば、ユーク

リッド幾何学を生じ、角HADが直角より小なりと仮定すれば非ユークリッド幾何学を生ず。勿論角HADが

直角より大なりと仮定する必要はなし。ロバチェヴスキー氏は角HADが直角より小なりとの仮定の下に自分の幾何学を建設して種々の定理を証明せり。中には人を驚かすがごときものをえたり。たとえば

- (1) 一つの直線はその上のあらゆる点において他の直線との平行性を維持す。
- (2) 二線は互に相平行す。

- (3) 一つの直線三角形の内角の和は二直角より小なり。
- (4) 平行線は互に相接近す。(その距離が終に零となることは予が昨年証明したる処なり。)
- (5) もし任意の三角形の三角の和が二直角に等しきときは、総ての三角形においても亦然り。
- (6) 一つの直線より等しき距離にある点の軌跡は一つの曲線なり。

(3)の内角の和が丁度二直角に等しき場合がユークリッド幾何学にして、小なる場合が氏の始めて建設せる幾何学なり。(6)も普通には直線なりとせらるるも、氏の幾何学においては曲線となる。氏はその幾何学を虚数幾何学 Imaginary Geometry と名づけたり。これその中において作られたる諸種の公式が虚数半径  $\sqrt{-1}$  を有する球面の三角形の諸公式と一致すればなり。かくしてロバチエヴスキー氏はこの時まで絶対的真理として崇拜せられたるユークリッドを破壊し、新奇にして示唆的なる諸問題の遠景を提供しつ。

しかれどもいまだ、この発見の認識論的意義については知らざりき。ホンガリーの人なるヨハン・ボリヤイ氏 Johann Bolyai (一八〇二—一八六〇) も独立に研究して、ロバチエヴスキー氏と同様の結果をえたり。英のラッセル氏 Russel や独のクライン氏 Klein はこの兩人は共にその発見をガウス氏によりて鼓吹せられたるならんといえども、証拠不十分なり、ヨハン・ボリヤイ氏の論文は僅に二十四頁より成立しその父のフルフガング・ボリヤイ氏 Wolfgang Bolyai (一七七五—一八五六) の著書の後に添えられたり。その考は一八二三年頃よりありたるが出版せられたるは一八三一年なり。その表題を絶対空間学 Science absolute of Space (Halstad 英訳) という。ボリヤイ氏がえたる諸公式中には常に一つの定数  $k$  が入こみて、その幾何学が確立せらるべき空間に応じて、その値は一定せるものなり。 $k$  が無限に大ならば、その諸公式はユークリッド幾何学のものとなり、すなわちいわゆる「ユークリッ

ド氏の空間」において真となる。 $k$ が有限の値を有すればその諸公式は「ロバチェヴスキー氏の空間」において真となる。 $k$ の値が虚数を有すれば、その諸公式は「球面状空間」において真となる。ロバチェヴスキー氏よりもポリヤイ氏が自己の幾何学建設を重大視せるを以て、その研究の範囲はなはだ広し。円の面積を表わす所の公式を作り、また一つの鋭角の一辺中の一点を通過し、この辺には垂直にして、他の辺には平行なる直線を引く所の方法を解して、大にいわゆる平行角の概念を確め、なおまた氏の新空間において総ての辺が互に平行なる三角形が存在し、その三内角の和は零となることを示し、かつその面積を表す公式をもえたり。ポリヤイ氏はロバチェヴスキー氏のごとく、ユークリッド氏の体系が自己の一層概括的なる体系の特殊的極限の場合なることを示し、はなはだ小なる空間における幾何学が常にユークリッド氏のそれなることを示し、またこれらの種々なる空間中いずれが真なるかを決定する先天的理由の存在せざることをも示し観察なるものはただ僅に近似的解答を与ふるに過ぎざるをも示せり。

公準すなわち根本仮定の異なるより生ずる諸種の幾何学においては、そのうちに羅列せられたる諸種の定理の系統がたとえ全然矛盾せることありとするも、いずれが真なるかいずれが偽なるかを判定するの途なし。みなその各自の空間において真なるものと見ざるべからず。ロバチェヴスキー氏とポリヤイ氏との目的は自己らの新幾何学とユークリッド幾何学との真偽を判定せんとするにあらず。その動機はあくまで論理的、数学的にして決して、認識論的にも本体論的にもあらず。かの平行線公準を、非認することより起る結果が矛盾的なるか非矛盾的なるかということがこれら兩人の主たる問題なりき。これを非認するもこれより生ずる定理は無数に多く、氏らおよびその後継者らが進みえたる所にては決して矛盾はなきなり、なかりしなり。すなわち今までの所にては平行線公準と他の仮定と

は論理上独立のものとせらる。以上は実に非ユークリッド幾何学の第一時期といふべきものなり。

その後、リーマン氏 Riemann (一八二六—一八六六) およびヘルムホルツ氏 Helmholtz (一八二一—一八九四) 出でたり。氏らの研究は前時期と大に趣を異にし、最早攻撃の目的が平行線公準のみにあらず、問題は大に一般的に拡張せられぬ。ロバチエヴスキー氏とボリヤイ氏との研究方法は綜合的、直觀的なりしも、リーマン氏とヘルムホルツ氏との方法は解析的、代数的なりき。リーマン氏が一八五四年に書ける就職論文の「幾何学の根柢に横れる仮説」Die Hypothesen welche der Geometrie zu Grundeliegen は有名なるものにてそのうちにごとく書けり。

空間を他の考えうべき三重に拡れる大きさより區別する空間の特性はただ経験より推知しうるのみ、さればそれによりて空間の次元を決定しうべき最も簡單なる事実を發見せんとする研究始まる(中略)。しかるにこれらの事実たる総ての事実の例にもれず、必然的にはあらずして、ただ經驗的の確實たるのみ。

すなわちリーマン氏以前の研究は多くユークリッド氏の公準を先天的なるものと認め居たるを、氏に至りて漸くその性質の經驗的なることを主張するに至れり。また氏はいわゆる複素体という概念を導入したり。空間はこの複素体のうちに属する一つの原素に外ならず。複素体とは原素の群集をいうものにて、これを分ちて連続的と不連続的との二種とすべし。前者はその複素体に属する原素の間にそれらの一より他に移るべき連続的行程が存在するものにして、後者はこの行程なきものなり。特に要用なるは前者なりとす。いま茲に一つの連続的複素体ありて、一定の仕方において一つの原素より他の原素に移りうるものとし、しかしてその連続的行程がただ前方または後方に限り出来るものなるときは、その複素体を「単一に拡れる」それとも、「一次元的」のそれともいう。またもしかかる原素

の群集が全く異なる他の群集にむかつて一定の仕方において移り行くならば、かかる原素の無限に多くはまた「二種に拡れる」すなわち「二次元的の」複素体を作るべし。次にこの二次元的複素体が他の二次元的複素体にむかつて移りゆくならば、かくのごとき複素体の無限に多くが「三重に拡れる」すなわち「三次元的の」複素体を作るべし。全く同様に以上の方法を任意の回数だけ繰り返すことをうるがゆえに、因て得る所の次元の数は限なし。吾人の認識する空間は三次元的複素体の一種にして、その原素すなわち成素は点なり。されどこれを先天的に認識するにはあらず、全く経験の結果なり。線は一次元的点聚合なり。面は一次元的線聚合にして、かつ二次元的点聚合なり、空間は二次元的線聚合にして、かつ一次元的面聚合なり。しからば一次元的空間聚合—二次元的面聚合—三次元的線聚合即ち四次元的点聚合は存在するかというに、これは経験的に存在せず。ここにおいて吾人は経験を超越し、いかなる方法を用いるも、その結果を見うべきようになすあたわず。しかれども吾人はかくのごとき複素体の存在を承認す。一般に $n$ 次元の複素体においてはその原素を定限するには $n$ 箇の坐標を要す。

次に予はリーマン氏が空間の「曲率測定」に関する必要について述べべし。幾何学上の測定においては厳密なる図形の合同を必要とするがゆえに直線は直線によりて計られ、円のごとき定曲率の平面曲線はその円自身の一部によりて計らる。しかれども常に円弧を直線単位にて表わすこと必要となり来る。この時は円弧の極小分を直線と見ざるをえず。しからざれば通例いう所の円弧の長さと言ふことは無意味となる。これと全く同様に任意の曲線の曲率の概念はその曲線の極小分を円弧なりと考ふるより起る。すなわちその曲線上の相接統せる三点を通過して一つの円弧を画き、その円の半径 $r$ の逆数を曲率という。円の半径が無限大なれば曲率は零なり。これと同様に任意の面の曲率を決定する

をう。これガウス氏の企てたる所なり。今曲面上に任意の一点をとれば、この面上においてこの点を通過し其周囲にある無数の点に至る最も短き距離の線すなわち最短線 (geodesic lines) を引くこととせばこれらの線の曲率はみな相異なれり。かくのごとくにして得たる最短線の弧の一次元的複素体中には曲率半径の最大なるものと最小なるものとあり。これらを  $r_1$  と  $r_2$  とにて表わせば  $\frac{1}{r_1 r_2}$  をこの点における曲率という。球面の場合に於てはこの球の半径を  $r$  とすれば  $r_1 = r, r_2 = r$  にして曲率は  $\frac{1}{r}$  なり。平面の場合には曲率は零、錐体または柱体の場合には一つの最短線が直線なれば  $r_1$  か  $r_2$  かの一つは無大なるがゆえにその曲率は零なり。次に三次元的複素体すなわち空間において一点をとれば、これを通過する面は一次元的複素体を形作るゆえに、その中より最大曲率半径を有するものと、最小曲率半径を有するものとを<sup>えら</sup>びて、その三次元的複素体の曲率を定む。實際この考案を拡張して  $n$  次元的空间の曲率を定むることをう。かよりの考より出立して多次元空間の幾何学が種々雑多に作らる。

三次元的複素体すなわちいわゆる空間の曲率が正なるか、零なるか、あるいは負なるかに従いて、換言すればその曲率が零より大なるか、零に等しきか、あるいは零より小なるかに従いて、三種の幾何学が作成せらる。すなわち、

- (1) 曲率が正なるときは三角形の三角の和は二直角より大なり。
- (2) 曲率が零なるときは、三角形の三角の和は二直角に等し。
- (3) 曲率が負なるときは、三角形の三角の和は二直角より小なり。

第二種がすなわちユークリッド氏の空間にして、第三種がロバチエヴスキー氏とボリヤイ氏との空間なり。第一種はリーマン氏に至りて特に顕著となりたるものなれば、リーマン氏の空間ともいう。三角の和が二直角より大なりということは球面三角形にありて古来よく知られたる所より球面幾何学と

もいわれ、これに対して第三種のを擬球面幾何学という。共にベルトラミー氏の与えたる名称にして、氏はこれらの標本を大体わかるように作れり。クライン氏はこれらの第一種、第二種、第三種にそれぞれ「橢円の」<sup>だえん</sup>「拋物線的」<sup>だえん</sup>「雙曲線的」という名称を与えたり。今ここにこれらについて詳説するをえず。

先に予は雙曲線的幾何学における奇異なる結果について述べたり。次には橢円の幾何学における奇異なる結果を挙げん。勿論その証明をここにする訳にあらず。三つの幾何学の結果を対照するは興味あることなるべし。(以下 E 空間とあるはユークリッド氏の空間、L-B 空間とあるはロバチエヴスキー氏とボリヤイ氏との空間、R 空間とあるはリーマン氏の空間なり)。まず既に述べたるがごとく、

第一、三角形の三角の和は

E 空間においては二直角に等し。

L-B 空間においては二直角より小なり。

R 空間においては二直角より大なり。

第二、有限直線の両端に立てたる等長の垂線の端を連結する直線がこれらの垂線となす角は

E 空間においては直角なり。

L-B 空間においては鋭角なり。

R 空間においては鈍角なり。

第三、定点を通過し直線を引くときは定直線に交らざるもの、すなわちいわゆる平行線は(総じてかく云うこともあり)

E 空間においては唯一にして、他はみな交る。



L-B 空間においては無数にして、交るものも無数なり。

R 空間においては皆、無にして全くみな交る。

第四、E 空間において直線は無量大の長さを有し、無限遠の所に二点を有す。

L-B 空間において直線は無量大の長さを有し、無限遠の所に一点を有す。

R 空間において直線は有限の定長を有し、無限遠の所に点を有せず。

第五、E 空間と L-B 空間とにおいては一平面上において同じ直線に垂直なる二つの直線は交らざるも、

R 空間においては相交る。その交点より垂線の足に至る長さは一直線の二分の一なり。

第六、E 空間と L-B 空間とにおいては一つの直線はこれを含める平面を二部分に分てども、

R 空間においてはしからず。(すなわち直線を横切らずしてその一側より他側に至ることをう)。  
第七、一つの定直線より等距離にある点の軌跡は

E 空間においては直線にして、これら二直線は同一の平面上にあり。

L-B 空間においては、曲線にして、この曲線と定直線とは同一の平面上にあり。

R 空間においては直線にして、これら二直線は同一の平面上にあらず。

なおこの外にも種々あれども、茲には、これらだけに止めおく。

リーマン氏の次に注意すべき論文を書きたる人はヘルムホルツ氏なり。特に二つの論文が注意すべきものなり。一は「幾何学の事実的基礎に關して」Über tatsächlicher Grundlagen der Geometrie 1866 として、一は「幾何学の根抵に横われる事実に關して」Über die Thatsachen, der Geometrie zum Grunde liegen 1868 なり。その論法はリーマン氏と反対にして結果は等し。リーマン氏はまず曲線の微小弧の一般数学的公式を作り置きて、これに自由可動性の公準を加えて格段の場合に入り、いわゆるリーマ

ン幾何学を構成したりしが、ヘルムホルツ氏はまず自由可動性の公準を据えて、これよりリーマン氏の式を出したり。ただしその証明の方法は不精密なりしゆえ後リエ氏がこれを正したり。ヘルムホルツ氏が幾何学の必要にしてかつ十分なる基礎として列挙したる仮説は次の四箇條なり。

- (1) 空間の連続性および次元、
  - (2) 可動的固体の存在、
  - (3) 自由可動性、
  - (4) 固体の形を變うることなく廻転しうること、
- 氏は第二の論文においてなお二箇條を加えたり。

- (5) 空間が三つの次元を有すること、
- (6) 空間の無限なること、

かくして氏はユークリッド幾何学と非ユークリッドすなわちロバチェヴスキー、ボリヤイ幾何学とを同位的共存的のものに過ぎずとせり。しかるにリエ氏はこの両幾何学を作るにはヘルムホルツ氏の第四の仮説の不要なることを明にしたり。リエ氏がこの研究は一八九七年にロバチェヴスキー賞典をえたるものにして、ヒルベルト氏の一九〇二年の論文は、これに続きたるものなり。ヘルムホルツ氏に帰せざるべからざる功績はその空間の性質を経験的に「さもあるべし」とおもわるる所より定めたることにあり。すなわち連続性、図形の合同性、自由可動性、純一性などのことどもを特に掲げて幾何学の基礎とせることにあり。しこうしてこれらは余程認識論に傾けるものなり。その後かのベルトラミー氏出でたり。この人が非ユークリッド幾何学の解説 *Saggio di Interpretazione della Geometria non-Eucliden* 1869 という論文を書き前に述べたる三つの幾何学が密接の関係あることを知らしめぬ。氏は任意の次

元を有する一つのリーマン氏の空間は一つだけ多き次元を有する一つユークリッド空間における一つの軌跡なることを示せり。これ単に別々の独立せるものと見られたる三つの幾何学が次元の異なるときにおいて甲乙相関聯することを示されたるによるなり。以上を非ユークリッド幾何学の第二時期となす。

次にこの種の幾何学の發達の第三時期起れり。ここに至りて自由可動性をすてて幾何学を組織したり。数学者は射影法を用いる時代という。これ小なる図形も射影すれば、大なる図形となることあるがゆえなり。この時代の先駆者は英国のケーリー氏 Cayley (一八二一—一八九五) にして、その著「第六多元式論」Sixth Memoir upon Quantics 1859 は有名なり。また氏は英国科学聯合会の総裁演説 Presidential Address to British Association 1883 において次のごとく云えり。

通常の限なく拡れる一平面を考えよ、その上における距離の概念を変ぜしめよ、かりに吾人が一つの尺度を以て距離を測定すとせよ。次にこの尺度の長さが絶えず変化するものと想像せよ(恰も温度の変化によりて生ずるものごとく) ただしその真の長さはただその平面上における位置と方向とのみ関すべしという条件の下においてかく想像せよ。換言すればその長さが一つの与えられたる位置と方向とに關してある値を有するものなるときは、それがいか様にいかなる方向より來るに拘らず、この位置に歸れば常に同一の値を有すとす。……その平面上の一つ定まれる中心点より動き出せる尺度が進むに従いて益々短くなり行くと想像せよ、もしこの短くなることが十分迅速に起るときは、この語の通常の意味においては距離は有限大なるも、新意義においては無無限大なること明なり。なんとなればこの絶えず短くなる尺度の長さはいくたび燥返すもその距離を覆うに至らざればなり。さればその中心点を圍繞せるある有限の面積ありとせば、その界線上のあらゆる

点は、この理論に従えば、その中心点より無限の距離にあるべし。この界線以外には一の不可知界あり、数学上の語にていえば虚なる空間もしくは不成立の空間といふべきものなり。

こはケーリー氏がその距離論を通俗的に述べたるものなるが、この可変尺度に適當なる変化の法則を附与すれば、幾何学の種々なる形式がユークリッド氏の平面上において得らるることを示したり、空間に向いても亦同様なることを示したり。

クライン氏 Klein (一八四九—) はその講義「非ユークリッド幾何学」Nicht-Euclidische Geometrie 1893において更にケーリー氏の理論の研究を示せり。ケーリー氏がいう絶対というものが変化するに従いて、種々の形而上幾何学の成立することを示したり。第一はロバチエヴスキー氏のものにて、クライン氏の云う雙曲線的幾何学。第二はユークリッド氏のものにて、すなわち拋物線的幾何学。第三は橢圓的幾何学だえんというものなるが、これは二つに區別せられ、一は雙橢圓的幾何学だえんと称し、リーマン氏のものにて、他は單橢圓的幾何学だえんと称し、ときにはクライン氏の幾何学とも称せらる(アメリカのニューカム氏 Newcomb も亦独立にこれを作れり)。要するにこれら第三時期の研究は大体の所が数量的、測度的にあらずして、性質的、射影的なれば、前の二期とは大に趣を異にす。

次に最近の發達すなわち第四時期の研究に入る。さきにリエ氏 Liouville (一八四二—一八八九) の研究のつづきを成遂げたるヒルベルト氏 Hilbert (一八六二—) は一八九九年に「幾何学の基礎」Grundlagen der Geometrie を書いて余程世人を驚かせかり。幾何学に必要な基礎の公準の正確なる数と意義と關係とを決定せんと勉めたり。その公準は五種に分たれ、第一種は結合の公理と云い七箇あり。その第一は「二つの相異なる点は一つの直線を定む」にして、その第五は「一つの直線上の二点が一平面中に在らば、その線中の他の諸点もまた然りしか」なり。第二種は順序の公理と云い五箇あり。その第一は

「三点  $A B C$  が一直線中にありて  $B$  が  $A$  と  $C$  との間にあらば、 $B$  は  $C$  と  $A$  との間に在り」にして、亦その第五は「一直線中にあらざる三点  $A B C$  および平面  $A B C$  中に一つの直線  $a$  ありて、かの三点中のいずれをも通過せずとし、直線  $AB$  と  $a$  とが交わるならば  $a$  は直線  $BC$  あるいは  $AC$  と交わるなり。第三種は平行の公理にして、「一平面  $\alpha$  中に直線  $a$  ありて、またこの直線外に点  $A$  あらば、 $A$  を通過し  $a$  に交わらざる直線は一つあり、しこうして唯一に限る」なり。第四種は、合同の公理と云い六箇なり。その第一は「一つの直線  $a$  中に二点  $A B$  あり、またこの線  $a$  あるいは他の直線  $a'$  中に任意の一点  $A'$  あるときは、 $a'$  中において  $A'$  の一側に線分  $AB$  と線分  $A'B'$  とが互に合同なる点  $B'$  が一つあり、しこうして唯一に限る」にしてその第六は二つの三角形  $ABC$  と  $A'B'C'$  とにおいて  $AB$  と  $A'B'$  とが合同して、 $AC$  と  $A'C'$  とも亦合同にして、角  $BAC$  と角  $B'A'C'$  とが合同なるときは常にかならず角  $ABC$  と角  $A'B'C'$  とは合同にして角  $ACB$  と角  $A'C'B'$  とも亦合同なり」なり。第五種は連続の公理と云う（後にアルキメデス氏の公理というものこれなり）。

ヒルベルト氏の研究の結果は勿論もちろんユークリッド氏のと異なれども、その方法はユークリッド風にて余程論理的に出来上りたれば初等の学校における従来のユークリッドに代うることをうべしと云われたり。アメリカのハルステッド氏はヒルベルト氏の研究を基として実際、合理的幾何学という書を著しぬ。しかれどもヒルベルト氏が必要にしてかつ十分なりと思いたりし数多の公準はかならずしも相侵すことなきものにあらざ、換言すれば甲は乙によりて証明せられうる事がシュル氏 *Schur*、ムーア氏 *Moore* によりて証明せられたり。しかし今以てヒルベルト氏の研究は重ぜられつつあり。この失敗すなわち直観的方法によりて幾何学の基礎を決定せんとする企の不成功はヒルベルト氏をして、リエ工氏の方法すなわち複素体と群の概念とを再用することに転ぜしめたり。ただしこの複素体はゲオル

グ・カントル氏 (Georg Cantor (一八四五—)) の複素体論 Mannigfaltigkeitlehre に基くものなり。なおヒルベルト氏が「幾何学の基礎」中に掲げたるアルキメデス氏の連続の公理が特にシュル氏の注意を引けり。

$A_1$  を一つの直線上にある任意の二点  $A$  と  $B$  との間の任意の点とせよ、しかるときは吾人は諸点  $A_2, A_3, A_4, \dots$  を、 $A_2$  は  $A_1$  と  $A_3$  との間に、 $A_3$  は  $A_2$  と  $A_4$  との間に、 $A_4$  は  $A_3$  と  $A_5$  との間に以下また同様にあるように、かつその各線分  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$  が互に等しきように作るべし、しかるときは諸点  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  の列において  $B$  が  $A_{n-1}$  と  $A_n$  との間にあるごとき一点  $A_n$  存在す (アルキメデス氏の公理)。

シュル氏は一八九八年に「解析幾何学教科書」Lehrbuch der Analytische Geometrie を著わしその中にこの公理なしに幾何学を作りうることを述べ、(この公理は通例比例論において必要とせらる) ヒルベルト氏は一八九九年にその証明をえ、従いてこの公理なくして初等幾何学を作りうることを示せり。これにおいて非アルキメデス幾何学というもの起れり。

これよりさきルジャンドル氏はこの公理と「直線は無限の長さを有す」という公理とを用いて、

第一、三角形の三角の和は二直角より大ならずと云うことと

第二、一つの三角形の三角の和が二直角に等しければ、他の総ての三角形についても亦然りと云うこととを

証明したりしが、デーデン氏 Dehn は「三角形の内角の和に関するルジャンドル氏の定理」Die Legendreschen Sätze über Winkelsumme im Dreiecke 1900 において、この連続の公理なしにこの第二の定理を証明し、第一の定理はこの公理なしには証明することをえざるを証明せり。またこのアルキメデス氏の公理と

無数平行線の公準とを用いれば、ロバチエヴスキー幾何学生じ、「三角形の三角の和が二直角より小なる」ことを証明しうるものなるが、デーモン氏はこの公理を認めずして、「二直角より小ならず」ということを証明し得たり。かくして非アルキメデス幾何学は種々の定理をうるに至りぬ。「二直角より小ならず」といううちには二つの場合あり。すなわち二直角より大なるときと、二直角に等しきときとあり。ここにおいて非アルキメデス幾何学は二つに分れたり。前者は非ルジャンドル幾何学にして、後者は半ユークリッド幾何学なり。

ここにおいて次のごとき分ちが出来たり。

三角形の三角の和	一点を通過し一直線に平行なる直線の数	
	0.	1.
$> 2R.$	橢圓的幾何学 { 雙 (リーマンの) 單 (クラインの) }	不成立
$= 2R$	不成立	拋物線的幾何学 (ユークリッドの)
$< 2R$	不成立	不成立
		$\infty.$
		非アルキメデス幾何学 { 非ルジャンドル幾何学 半ユークリッド幾何学 }
		雙曲線的幾何学 (ロバチエフスキーボリヤイの)

上記の外デデキンド氏カントル氏、ペアノー氏、ピエリー氏、パドア氏、ポアンカレ氏、ワイラテ氏、ラッセル氏、フレゲ氏らの研究も亦甚要用なり。第一次のロバチエヴスキー賞典がリエ氏に与えらるるとき称賛をうけたるゼラール氏の「非ユークリッド幾何学論」[Thesis sur la Géométrie non-euclidienne 1897]および第二次の賞典が配与せらるるときに選出せられたる二つの大著ホワイトヘッド氏の「一般代数学」[Universal Algebra 1898]およびキリング氏の「幾何学原理」[Grundlagen der Geometrie 1898]も参考を要す。またラッセル氏の「幾何学の基礎」[Foundations of Geometry 1897]「数学原理」[Principles of Mathematics Vol I, 1903]は論理的、心理学的、哲学的の評論を加えたるものとして有名なり。

明治四十年四月二十二日哲学会春季大会講演 (哲学雑誌第二百四十四号)

## 第二、科学の体裁

本誌第二百四十四号第六百七十五頁より其次の頁に跨り「幾何学に就て」と題する雑録掲載せられたり。就て見るに其文中「カント以前の哲学者は、僕の知る範囲では大陸の純理論者でも、英吉利の經驗論者でも、幾何学を演繹の学と見て居るが、ヒュームはこれを帰納の学と見て居る、……」と云う所あり。又本誌第二百四十二号に於ては元良氏の「心理学と認識論の關係」と云う長き大論文の載せられたるあり。加うるに偶然にも前記の雑録の掲載せられたる号に於ては余が哲学会大会に於て講演したる拙劣なる論文の掲載せられたるあり。斯く余等が専攻する所の数学に關係せる事項が頻繁に本誌に掲載せらるるに至りたるは余等数学を学びつつあるもの、更に又科学を研究しつつあるもの大に喜ぶ所なり。而して前記の雑録と同時に余の拙論の掲載せられたるよりして、此雑録に関する愚見を開陳するは又甚だ必要の事なるべしと思う。乃ち余が此「科学の体裁」と題する拙論を公けにするに至りたるは、全く前記の雑録に起因するものなれば、茲に先ず此雑録の記者に向つて拙論を綴るに至りたる動機を与えられたることを謝せざるべからず。

さて幾何等は演繹の学なりや、將又帰納の学なりやと問わば、世の数学者皆夫々各自の意見を提案すべし。然れども余の狭き見聞の範囲内に於ては余が今茲に述べんとする如く直截明瞭に其答辯を説述したる者あらざるべしと信ず。況んや一般の科学——数学に最も因縁の深かるべしとせらるる、(然しながら余の見る所にては其学としての性質に於て大に趣きを異にする)自然科学は勿論、更に進んで物的科学と云わるべきもの、猶更に進んで倫理学、心理学の如き心的科学までをも包含して——の体裁が斯くの如きものならざるべからず、又斯くの如くなりつつありと説くは頗る大胆の所業と云わざるを得ず。然れども余等科学を学びつつあるものは須臾も此事を念頭より離すべからざることと信ず



れば、此広大なる科学の一分科たる数学の門戸を僅かに窺うを得たるのみなる余なれども、亦多少此点に向つて念慮を走らしたることあり。勿論あらゆる科学全体に通曉することは不可能のことに属し、各箇の科学の研究方法及現時の状態を詳知することは不可能のことに属す。従つて余は勢い其専攻する所の数学の研究状態を基礎として、唯僅かに他の諸科学の専攻者より聞き得たる所によりて、総ての科学の体裁を判断せざるべからざるは又止むを得ざる所なり。従つて他の科学の研究者よりは大に愚見を冷評せらるるやも計り難く、否時としては余と同じく数学を専攻する人々よりも罵倒せらるるやも計り難し。若し然らんに余は余一箇人の観たる数学の研究状態を説きたるに過ぎずと今より遁辞を設け置かんとす。余は余一箇人の確信を提出して読者の一瞥を乞わんとするに過ぎず。而して数学、特に其中に属する幾何学が如何なる方針を以て研究せられつつありや、其基礎は如何様にして据え置かるるや、又其上に建設せらるべき幾何学其物は如何なるものなりやに就ては、前記の雑録と同時に本誌に掲載せられたる「非ユークリッド幾何学に就て」と題する拙論に因りて稍々其一端を窺がわるべしと信ず。猶又来月発行せらるべき雑誌「人性」に掲載せらるる筈の「経験の範囲と宇宙の限界」と題する拙論も亦余の所思を知らるる参考となるべしと信ず。此論又は空間の大きさが有限なりとも論結せられ得ることを説き、実に其証明を略述したるものなりとす。

世には純理論者なるものもあり、又純觀念論者なるものもあり、或は又、先天的觀念論者或は超越的觀念論者なるものもあり、或は又觀念的主理論者なるものもあり。其他此種の論者の多種なることは余の知る所なり。茲に列挙したるものの所説は或は殆ど相同じきものあり、又甚だ懸隔せるものもあるならん、然れども其所説が吾人の経験に余り重きを置かぬと云う点に於ては皆一致して居るものと云わざるを得ず。純粹理性のみによりて先天的に世界観或は人世観が作成せられ得るものとは科学

者の立場よりしては——少くとも余の所見を以てしては——決して思慮することの出来ざることなり。勿論余等は經驗を超脱して論拠を据うることあり。例えば空間の大きさが有限なりと云うことを証明せんとするときの如し。斯く經驗の結果を非認すればとて經驗には重きを置かざるべからず。実に感官は吾人の智識の門戸なることを承認せざるべからず。其感官知覚より来る直接の經驗なるものが、即ち吾人をして所謂真理なるものを知得せしむると云うことは、当底非認すべからざることと信ず。然らば余等科学者は純經驗論者なりやと云うに是又然らずと答えざるを得ず。勿論科学者中にも純經驗論者あるべく、自から名乗りて純經驗論者なりと標榜する人もあらん。然れども余の所見を以てしては、斯く主張する人も其実決して純經驗論者にあらざるべしと信ず。少くとも余等数学者は純經驗論者たるべからずと信ず。そは以下詳述せんとする所のことなり。

斯く述べ来らば余が所説の題目中にある科学とは如何なるものを指すや、科学の定義は如何と問わる人もあらん。之に対しては此後の説述が即ち其答の一部、否殆ど全部を為すものと云いて可なり。換言すれば以下余が述べんとする科学の研究状態にして判明なるに至らば、此の研究状態を保持して研究する人が科学者にして、其研究の結果を綜合せるものが科学なりと云うを得べければなり。唯其所説を明瞭ならしめんとする為に引用する科学上の実例が余りに専門的なるを得ざることには大に余の遺憾とする所にして、極めて通俗的——科学者よりして——の実例を挙ぐるに止まるは蓋し止むを得ざる所なり。

余は經驗（エキスペリエンス）なるものを二つに区分す、觀察（オブザベーション）と実験（エキスペリメント）となり。此区分は稍余の意に充たざる所ありと雖大体是を以て良しとす。觀察とは自然現象——最も広き意義に於て解釈すべく、人の行為等も此内に容れらる——に就て感官の為せる経

験を指す、実験とは人為現象に就て感官の為せる経験を指す。猶詳説すれば、吾人の智識は自然に発現する所の現象の觀察より得らるべしと雖、此觀察のみにより得たる智識は、不確不完なる所あるべきを以て、之れを確固完全なるものならしむる為め、先觀察により得たる自然現象間の原因結果の關係を考察し、同一の原因の下に同一の結果を來たすや否やを実験するなり。実験とは自然現象の人工的模擬なり。既に模擬と云う以上は自然現象其儘のものには非ず、自然現象と異なる部分存在すべし。但自然現象と異なる部分の存在せざるべからざるの理なし、或は反て全く自然現象と一致することもあるべし。然れども現に成せる人工的模擬が全然自然現象と一致すと確言し得る人、又証明し得る人は決して之れあるべしと思われず。殆総ての場合に於ては、自然現象を構成せる数多の原素（既知のものと未知のものとを合せて）の中より、或有限数のもののみを選出して、之に就て考察判断を加え、模擬を成したるに過ぎざるなり。

此事は自然科学論の初頁に記載しあるべきものなり。然れども自然科学とは別種の——普通の見解に於て——科学なりと思わるる数学に於ても亦觀察実験なるものありと云わば稍驚く人あるべし。暫く余の所説を聴かんことを望む。幾何学は演繹の学なりと云わるるにも拘わらず、觀察的幾何学（オプザーベーションナル・ゼオメトリー）と云う名称も又実験的幾何学（エキスペリメンタル・ゼオメトリー）と云う名称も既に用いられつつあることを読者に告げざるべからず。此兩者ともに殆んど同様のものにして普通の幾何学の予備入門として教授せらるる初歩の幾何学なり。演繹的幾何学即論証的幾何学（デモンストラティブ・ゼオメトリー）に対して、之等を帰納的幾何学と云うことあり。元來觀察、実験によりて帰納するに非れば、初学者は真理を企得し得るものに非ず。否初学者のみに限るに非ず、老熟せる学者も亦然りと云わざるを得ず。実は其演繹的幾何学と云うものも其基礎を帰納的真理の上に

据えざるべからざることは止むを得ざることに属す。

觀察的、実験的、帰納的幾何学は演繹的、論証的、理論的幾何学の幼稚なるものなり。之は決して幾何学に限るに非ず、他の数学の部分も亦然り、数学に非ざる科学も亦然り。觀察的、実験的、帰納的科學は総て演繹的、論証的、理論的科學の幼稚なるものなり。発達せば皆演繹的、論証的のものとなるべきなり、又なりつつあり。諸種の科學の中には既に能く発達を遂げたるものもあるべく又未だ成熟の域に至らず極めて幼稚なるものもあるべし。(余は茲に謝し置かざるべからず某科學の發達が幼稚なりと云うと雖、決して其科學の專攻者を冷罵するものに非ざることを、蓋其發達せざりしは專攻者の罪と云うよりも、人類一般の意志が其發達に向けられざりしなればなり。)

觀察的科學と実験的科學との例を挙げんか、地震学の如きは前者に属すべく、実験物理学の如きは後者に属すべし。勿論兩者ともに觀察と実験とを并用すべしと雖、主たる研究方法に就て之を云うのみ。觀察的科學は發達して実験的科學となるべきなり。所謂実験的物理学の發達せるあらば即ち理論的物理学となるべきなり。此兩者は現に並存す。其並存するは毫も妨げなき所なり。既に理論的物理学成立す、然れども其基礎に不確不完の点あり、即ち実験的物理学の並存の必要なる所以ならずや。又動物学の如きは実験的方法をも採用しつつあるは勿論なりと雖、其研究状態の多く觀察的なるは全く之を否むに由なかるべし。そは何れにもせよ觀察的と実験的との差異は、其次の高き階段にある科學の研究方法との差異に比較して顯著なるには非ず。

觀察的、実験的科學の目的は何れの辺にありやと云うに、そは云うまでもなく一般法則(ゼネラル・ロー)一般原理(ゼネラル・プリンシプル)と云うものを發見することなり。之を發見するは帰納的(インダクティブ)にして其名の示すが如く概括作用(ゼネラリゼーション)或は抽象作用(アブストラ

クシヨ)に由るものと云わざるべからず。最も卑近なる例を挙げれば物理学に於ける「エネルギー」不滅の原理、化学に於ける物質不滅の原理、力学に於ける牛童(ニユートン)氏の運動の三法則、博物学に於ける適者生存優勝劣敗の原理等なり。勿論帰納方法の適用の過誤より不正の法則又は原理に到着したること、又することもあるべけれども、それは全く此所に論ずべき限りに非ず。之等のものは法則、定則、定律、原理、原則等種々雑多の名称を附与せられありと雖も其名称の何たるを問わず、同一の目的に基きて形造られたるものなり。其目的とは理論的(セオレチカル)、論証的(デモンストレチブ)科学の基礎を作成する事なり。

既に概括作用、抽象作用を加えて感官の取得したる此等の原理法則は、具体的、客観的現象其ものからは隔離せられたるものなり、現象其ものの精密なる記述なるや否やは明かならず。「エネルギー」不滅と云うは吾人の狭き経験の範囲に於てなる制限の下に於て云うことなり。一度運動を初めたる物体は其方向と速さとを豪も変ずることなく、終始其運動の原状態を持續すとは、実際に見る事を得ざるものにして、経験を超越したる結果なり。換言すれば此等の原理、法則は狭き経験の範囲内に於て信なりと云うべきか、然らざれば経験を超越して、併し経験に基きて所謂接近法(method of approximation)によりて或は数学者の所謂極限法(method of limiting process)によりて得たる結果なりと云うべきのみ。

猶又此等の原理、法則を益々合理的ならしめんとして進行するならば「エネルギー」とは如何「フォース」とは如何、生活力とは如何、物質とは如何、時間とは如何、空間とは如何との問題起り、先ず此等の根本的概念の構成せられ居る種々の原素を明確にせざるべからざることとなる、余が「非ユークリッド幾何学に就て」と題する講演の冒頭に就て引用したるポアンカレ氏の言は、即ち此等諸種の根本的概念の構成せられ居る種々の原素を精査すれば整数即完全数(一、二、三、等)の概念が最も

共通的普遍的にして且総ての本質的原素（エッセンシアル・エレメント）なりと云うものなり、と少くとも余一人は解するなり。それは兎もあれ其辺まで立ち入りて深遠に論究するの必要はなし。所謂原理、法則位の所にて足れり、而して此等の中には原理或は法則なる名称を下す程何人も首肯せしむる力のなきものあり、是れは假定（ハイポセシス）と云われて居るものなり、例えば「イーター」の存在の如きものなり。運動の法則に就て述べらるる直線の等速運動が假定せらるると同様に「イーター」の存在が假定せられて居るものと思わねばならず。余を以て見れば大概の人を首肯せしめたる故に真理なり、一寸人を首肯せしめ難き所ある故に真理より稍遠し、従つて前者は理論的科學の基礎となし得べく、後者は然らずと云うことは全く之れなしと思う、前者と云えども決して遽かに真理なりとすることは不可なればなり。

幾何學の基礎にも此兩様のもの入り込み居れり、一つは公理（アキシオム）と云われ、他は公準（ポスチュレート）と云わる。余は此區別を好まざる方の一人なり。皆是等のものを公準の部類に入れざるべからざるものと思う方の一人なり。

斯くして原理も、法則も、假定（ハイポセシス）も、公理も、公準も、其他如何なる名称を附せらるるとも此種のもの、悉皆假定（アッサムプション）に過ぎざるなり。（ハイポセシスとアッサムプションとを區別するに足る適訳を余は知らず）。帰納的、觀察的、實驗的科學は理論的、演繹的、論証的科學の基礎たるべき假定（アッサムプション）を得んと勉めつつあるなり。而して余は曰わんとす。其假定には二種あることを、一つは經驗の結果其儘を陳述せる假定にして、他は經驗の結果を非認して其反対を陳述せる假定なり。例えば前者は「ユークリッド」幾何學の基礎の如く後者は「非ユークリッド」幾何學の基礎の如し。

既に仮定を据え置くときは其所に理論（セオリー）が生ずるなり、理論的科學（セオレチカル・サイエンス）が生ずるなり。假定より演繹して諸種の真理を得ることを勉むるなり。此諸種の真理は幾何学に於て所謂定理（セオレム）なり。他の科學に於ては明瞭に定理の系統を生ぜず、従つて定理に相当する称呼なしと雖、全く類似の状態を為す。

数学以外の科學に於ては經驗の結果其儘を陳述せる假定を基礎とするが故に若し此の假定より演繹し來れる事項中の一つが、吾人の感官によりて知得する或現象と矛盾することあるときは、換言すれば理論上は斯の如き現象なからざるべからずと論決せるにも拘らず、實際上はそれと稍異なる、或は大に異なる、或は正反對の現象あるを經驗することありしときは、前に定めたる假定は正しからずとして棄てらるるなり。實際斯かる事屢々起る。故に自然科學の如きは前に云えるが如く現在に於て實驗的研究と理論的研究と（全く正反對の方向を持せる）が并存するなり。

数学にありては然らず、数学の根本的概念たる数、直線、点、面、空間の如きものの性質は既に善く歸納的に、接近的に、極限的に定められたり。此等を基礎とせる理論は確固として抜くべからず。然るに尚数学の方にては第二種の假定即ち經驗の結果を非認して其反對を陳述したる假定を基礎とす、而して兩様の数学の理論が全然相矛盾したる事項を包含するに至る。而して数学者は更に疑わず。兩者共に論理的正確を得たるものとして両々相持せしむ。数学者は何故に此兩者を同時に許容し得るや、又兩者の一つのみ真にして他は真ならざるにも拘らず、数学者は其真不真を判断し得ざるものなりや、それ等の疑問は未だ解決せられざるものなり。一時は此兩者例えば「ユークリッド」幾何学と「非ユークリッド」幾何学との真偽を、經驗に訴えて判断せんと企てたることあれど、それは全く無意義のこととして、今は唯一笑に附せらるる過去の夢たりしのみ。そは兎に角数学が人智の開發に必要なるも

のとして教育上の一科目となり居るときには上述の演繹的、理論的、論証的の部分のみが採用せられ居るなり。故に通例数学は演繹の学なりと云う。然れども其基礎が帰納的に経験的に形成せられたることは明白のことたるなり。

以上説述したる所によれば科学の発達の途筋甚だ明白なりと信ず。而して理論的科學の主張する所の事は必ずしも目賭耳聞する所の現象と一致せず、そは一致することもあるべし、然れども一致せざるも理論的科學其れ自身には更に患うる所なかるべし。而して理論的科學を研究しつつある所の者は其主張する所の理論が實際の現象と一致すればとて必ずしも喜ぶべきに非ず。既に一致すると云うことが精密に一致するや否や到底不可知のことに属すればなり。反て理論と實際が全く相一致せざる——唯善く近似する——ことこそ期待せらるべきなり。

科學の応用（アップリケーション）と云うことあり、之れ即ち理論的科學に於て得たる理論を實際現象に適用することを意味す。既に理論は實際と全く相一致せざることを期待す、応用の困難推察すべきなり。

上述の愚見を概括すれば次の如し。

先ず帰納的論法を盛んに適用する觀察的、実験的狀態にある時、次に基礎定まりて演繹的論法を盛んに適用する論証的狀態にある時、終に其論証的研究の結果を再び實際現象に適用する時、是れ一般科學發達の三時期なり。何れを各科學の本体と云うべきかと問わば其科學が第二の時期にあるものを指す。第一の時期にあるものは未だ其科學の本体を具備せざるものなり。第三の時期は寧ろ其科學の余景にして殆んど科學者の關係する所にあらず。猶更に簡約して云わば、具体より抽象に入り更に復具體に返すと云うべきなり。例を取りて云えば恰も二次方程式の応用問題の解法の如し。先ず問題の意



義を玩味熟考して二次方程式を作る。次に其方程式を解きて未知数を求む。終に其根を再び題意に適する形に改め適せざるものは棄つ。(蓋し方程式は概括の結果として当面の問題よりも広き内容を有すれば応用の際所得の数値の中或ものが棄てらるることあるは寧ろ当然のことなればなり。此例は勿論前きの所論とは全然同様なりと云うには非ざれども、多少前きの所論の模様を推量するに便ならん。)

余は科学特に数学を研究しつつあるもの一人として如上の説を持す。他の科学を専攻しつつある所の人々及更に深遠なるべき哲学を専攻しつつある所の人々が同一の説を持せらるるや否や知らず。終りに臨みて余は科学的研究の状態及結果を其儘此所に引用することを避けたるより、反て非科学的論法を以て長々敷拙劣たる愚見を述べたることを謝せざるべからず。

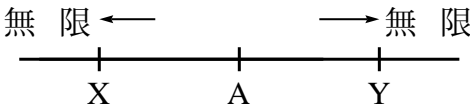
(明治四十年九月十日発行哲学雑誌第二百四十七号)

(明治四十年八月二十六日稿)

### 第三、經驗の範圍と宇宙の限界

我等数学者（数学を益深く研究せんと企つる所の人と云う意味に於て）は、宇宙の大きさを無限なりとも考える、又宇宙の大きさを有限なりとも考える、此の現実の宇宙の大きさが無限なるや、將<sup>はた</sup>又有限なるやは我等の問う所でない、我等は有限大の宇宙をも、無限大の宇宙をも構想することが出来ると言うのである、此の現実の宇宙の大きさが有限であるとは思われないう人、我等は取り合わない、少くとも我等が数学と云う科学を研究しつつある間は、全く取り合わない、若し立場を変えて数学の範圍外に出ずれば、これ等をも議論せぬではないが、併しながら今は唯数学的理論の基礎の据え付け様次第によつて、種々の宇宙若くは空間（茲に同一の意義を有するものとする）を構想することが出来ると主張するのである。

理論の基礎は、我等が人間である以上、勿論經驗に拠る所がなければならぬ、併しながら此所に大に読者の注意を喚起したいことがある、我等は他の或種の科学を研究せらるる人のように經驗万能主義を主張しない、經驗によると云う以上は經驗を尊重せぬではない、否寧ろ其の人々よりも經驗の価値を認めて居ると信ずる、併しながら經驗を尊重すると同時に經驗の過重すべからざることをも知つて居る、經驗より言えば、此の現実の空間は如何にも無限に拡がれるものか、反対者は空間の大きさが有限なりとすれば、其の有限界以外は何か、それは空間にあらざるかと言うて質問する、それは不可知界だとか言わぬではないが、此の質問には我等数学者は全く返答せぬでよろしい、何となれば、其の有限なる空間以外を考える等と云うことは、即ち經驗の結果が終始脳裡に残つて居るからである、如何にも經驗にては、此文の範圍と言え夫れ以外の範圍がなくてはならぬけれども、我等は經驗を超越するので、有限の大きさを有すとしたる其の空間の外などとは無意義のこととしか思わ



第十七圖

れない、従つて其の空間の外の状態の如きは我等の論題にならない、其の空間の外を考えねば気がすまぬなどと言うは、我等から見れば我等の理論の基礎を知らない人と言わねばならぬ。

我等の論究する所の事項は論理上有り得ることとするも、経験上有り得ないと言う人もある、それは全く空論である、臆説であると言つて非難する人がある、然れども、我等から見れば我等の研究する所は、空論中の空論である、臆説中の臆説である、我等の為す所は主観的である客観的でない、知覚によつて客観の事物の真相が知られ得るものとする實在的経験論ではない、勿論前にも言う通り、我等は知覚によりて事物を知らねばならぬ、併し之れに理性即ち純粹思考を必ず加えねばならぬ。其の純粹思考が知覚の変形か如何かは知らぬけれども、必ず理性によらねばならぬとする、故に経験的觀念論とでも言えばよいのであるのであらうか、哲学者は此の辺の分類に精細であるようなれども我等は我等の取る途を進めばよい故に、其の何れの部類に属するかは問う所でない。

読者は中等教育の数学教科書に於て「全部は各部の和に等し」と言うことを真なりと仮定して議論を進めたであらう、これは我等が公理と名づくるものである、公理は必然に真なりやと言へば、我等は真なりや否や知らぬと答える、茲に羊羹の一片を取る、之を小刀にて二つに分ける、之を又前の通りに続き合わせる、元の通りになる、(その羊羹の小部分が小刀の両表面に多少附著するから、前より少し減ると言うことは無きものとして)は誰も皆左様に認める、併しこれは有限界の経験に過ぎない。今若し一つの無限に雙方へ長き直線を考え、之を或任意の一点に於て両断したと考える、全直線は二つの部分に分たれた全直線をXYと名づけ、兩部分をXAAYと名づける。

其の中の一部XAを取りてAがYの方に進むように(此図では右の方へ進む様に)

動かして行く、XAの長さは無限である、(Xの方に於て) 故にAをYの方へ幾許押し遣るとも、幾許でもXの方から出て来る、段々AをYの方へ押し遣る、之を無限に押し遣る、終極に於てXAは元の全直線XYと重ね合わすことが出来る、即ち無限大と言うことを考うる以上は「全部は其の一部に等し」とも考えられる、我等は経験を超脱した、之を公理の一として幾何学を構成することが出来る、勿論普通の幾何学とは違ふ。

A点をYに押し遣ると言へば、経験であるようである、併し有限の処まで押し遣ることは経験することが出来るけれども、無限に遠き所まで押し遣ることは出来ない、即ち経験することは出来ない、経験の範囲内に於ては「全部は一部より大なり」である、経験を超越すれば「全部は一部に等し」である、何れとも思われる、思うて差支へは更でない。

我等数学者は経験の結果を尊重する、これ等の結果を基礎として数学例えば幾何学を構成する、併しこれ等の結果の何れにても随意に之を非認することが出来る、経験の結果は経験の仕様が悪しき故に誤りなりとするもよし、或いは又経験は有限界に限らるる故に、無限界に於ては此結果は適用する能わずとするもよし、精査すれば、(今之を茲に述べない) 色々理由のあることであらうけれども、其理由は兎に角、経験の結果を非認する、此所が数学的思考の自由なる所であつて、仮りに此の経験の結果が五箇ありとする、之を基礎として数学が一つ出来る、その中一つを非認すれば、新数学が五つ出来る、その中二つを非認すれば新数学が十箇出来る、その中三つを非認すれば新数学が十箇出来る、その中四つを非認すれば、新数学が五箇出来る、総てを非認すれば、又新数学が一箇出来る。

読者は甲数に乙数を乗じたる積は乙数に甲数を乗じたる積に等しと言うことを承認する、然るに数学者は此の原理に背反したるもの、即ち此の二数の積は相等しからずと言う原理を基礎として、数学

を建設し得るのである、これ一見奇妙であるけれども、理論上少しも差支えのないことである、然らば其の様なことを遣つて居たとて何の役にも立つまいと多くの人は言うけれども、役に立つとか立たぬとかは、元来我等の考うべき所でない、又若し之を考えたとすれば、将来大に役に立つ見込であるのみならず、既に過去に於ても大に役に立つて居ると答えねばならない。

少し前置きが永かつたけれども、之は決して不必要である訳ではない、本題の如き空間の無限、有限等を論ずる際には、是非心得て居らねばならぬことである故に、少し述べたのである、此の事を我等は数学的思考の自由と言う。

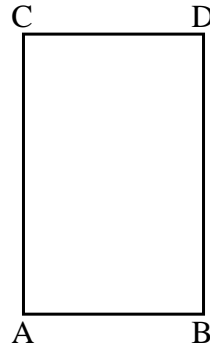
読者は幾何学の図形の学問（これは完全なる定義ではないけれども、先ず今斯くするも差支なき故に之にて満足なりとして置く）であることは、充分承知せらるることと思う、其の所謂図形に色々ある、其の中に直方形と言うがある、古くは直方形と言つたが、今は多く矩形と言う、如何なるものなるかと言うに、

「四つの角が皆直角なる四角形を矩形と言ふ」

之がその定義である、此の簡單なる定義は、更に疑を挿む所が無き様に明々白々ではあるけれども、実は左様ではない、空間の大きさが有限なりや、將又、無限なりやが分るる点は、実に此の定義の中に含まれて居ると言つてよい、如何様に此の定義に向つて疑を挾さむかと言うに、四ツの角が皆直角なるが如き四角形が、現実に存在するや否やが大なる疑問である、数学者以外の人は現に目の当り、その様な四角形があるから仕方がないと言う、我等数学者は之に答えて、それは有りもしようが、その様な四角形が無いとも思われると曰う、猶詳細に説明しよう。

茲にABなる直線（其の長さ有限）ありて、その両端にABと直角をなす所の二直線AC及びBDを引く、

即ち角  $BAC$  と角  $ABD$  とは直角である、 $AC$  中に随意に一点  $C$  を定め、 $AC$  と直角をなす所の直線  $CD$  を引き、 $BD$  と交わる所の点を  $D$  と命ずる、角  $ACD$  は直角である。



第十八圖

さて此の方法で出来た図形が矩形即ち四角が皆直角なる四角形なりと速断してはならない、如何にも三つの角は直角である、けれども第四角  $BDC$  は直角であるかどうかは分からない、之が直角であると言うことを主張するには証明（証明の意義を今茲に詳説することは困難である）することを要する、然るに其の証明が我等数学者には出来ない、斯く言わば、数学者は誠に智慧の無き人類の様である、實際この点に就ては、智慧がない、分らないと白状する、この方が分つた振をするよりも余程よいのである、少し幾何学を学びたる人は、之に証明を施すであろうけれども、其の証明は皆悪い、そのことは、後に述ぶることを熟読すれば分かると思う。

先きの方法の様に、先ず角  $BAC$  と角  $ABD$  とが直角である様に二つの直線  $AC$  及び  $BD$  を引き、次に  $AC$  と  $BD$  との長さを等しくして  $C$  点及び  $D$  点を定め、 $CD$  を通過する直線を引く、斯くして得らるる図形も初等幾何学に於ては矩形であるとする、然しながら此の方法によれば、二つの角  $ACD$  及び  $BDC$  が皆直角なるや否や更に分らない、斯の如く、如何にも現実に存在しそうな図形であるけれども、其の図形に名称を附する前には、必ず果して其図形が存在するや否やをよく調べねばならぬ、若し存在するもよし、又存在せずとするもよしとならば、茲に異種の幾何学が分かれて生ずることとなる、そして、何れも正しいのである、但し此の二つの角  $ACD$  及び  $BDC$  の相等しきことは直ちに分る、証明が

出来る、其の証明とは次ぎの様なものである。

別に前と全く同様の作法にて出来た同大の図形を考える、即ち

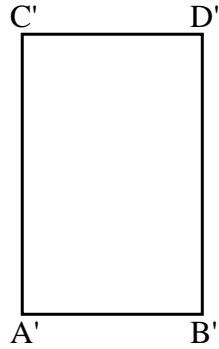
$$A'B' = AB,$$

(=は相等しきことを表わす符号)

$$A'C' = B'D' = AC = BD,$$

$$\text{角 } B'A'C' = \text{角 } A'B'D' = \text{角 } BAC$$

$$= \text{角 } ABD = \text{直角}$$



第十九図

とする、一つの図形  $A'B'C'D'$  と他の図形  $ABCD$  とは重ねて合することが出来るとする、(之が出来ない空間とすれば又全く別の幾何学が出来る) 然らば

$$\text{角 } A'C'D' = \text{角 } ACD, \text{ 角 } B'D'C' = \text{角 } BDC$$

である、次に一方の図形  $A'B'C'D'$  を裏返しにして、他の図形  $ABCD$  の上に置く、詳言すれば、 $A'B'$  の裏返しになったものを  $AB$  の上に重ねて揃えることにしたれば、 $D'$  は  $C$  の上に来り、 $C'$  は  $D$  の上に来り、そして二点の間には唯一つの直線があること故、 $CD$  と  $C'D'$  とが相重なる、故に角  $B'D'C'$  は角  $ACD$  と重なりて相等しい、又角  $A'C'D'$  は  $BDC$  と重なりて相等しい、即ち

$$\text{角 } B'D'C' = \text{角 } ACD, \text{ 角 } A'C'D' = \text{角 } BDC.$$

之を前の結果と合すれば

$$\text{角 } ACD = \text{角 } BDC, \text{ 角 } A'C'D' = \text{角 } B'D'C'.$$

となる、之が証明である、故に

$$\text{二つの角 } ACD \text{ と } BDC \text{ とは互に相等しく。}$$

併し<sup>しか</sup>ながら、兩角が共に直角なるや、銳角なるや、將<sup>はたまた</sup>又鈍角なるや、更に分らない、其の証明は数学者には出来ないのである、夫<sup>そ</sup>れ故に此の三つの場合を別々にして、夫<sup>それぞれ</sup>々幾何学を建設することにする。

第一 兩角が共に直角なる時

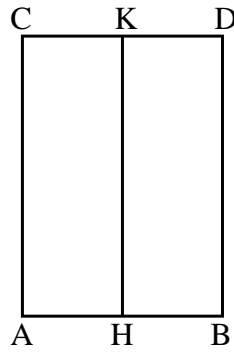
此の時の幾何学をユークリッドの幾何学と言いて、普通中等教育で教うるものである。

第二 兩角が共に銳角なる時

此の時の幾何学はロバチユースキー、ボリアイの幾何学と言う。

第三 兩角が共に鈍角なる時

此の時の幾何学はリーマンの幾何学と言う。



第二十圖

第一と第二との幾何学が真なる如<sup>ごと</sup>き空間は其の大きが無限であつて、第三の幾何学が真なる如<sup>ごと</sup>き空間は其の大きが有限である、空間の大きが無限とも思われ有限とも思われるは、実に彼の二つの角が鈍角ならざるや否やと言うことに繋がつて居るのである。

第一の幾何学に於てはCDはABに等し。

第二の幾何学に於てはCDはABより長し。

第三の幾何学に於てはCDはABより短し。

今之を証明しよう、ABの中点をHとする即ち

$$AH = BH$$

とする、而<sup>しか</sup>してABと直角をなす所の直線HKを引く、HKを折目として図形HBDKを折り返して他の図形HACKの上に重ねる時は



角 BHK = 角 AHK (共に直角)

なる故に、HB の方向は HA の方向に重なり、AH = BH なる故に、B 点は A 点と合する、又

角 HBD = 角 HAC (共に直角)

なる故に、BD の方向は AC の方向に重なり

$BD = AC$

なる故に、D 点は C 点に重なる、而して K 点は動かぬに故に、KD 線は KC 線に重なる、故に角 HKD は角 HKC に重なる、而して CKD は直線である故に次の如くなる。

角 HKD = 角 HKC = 直角,  $KD = KC$ .

然らば四角形 AHKC に於ては三角が皆直角で唯、角 ACK のみ直角のこともあり、鋭角のこともあり、鈍角のこともある。

今この四角形を横に画いたと思う、HA 及び KC は共に HK と直角をなす。

若し KC が HA に等しいとすれば前に証明したると同様にて

角 ACK = 角 CAH = 直角

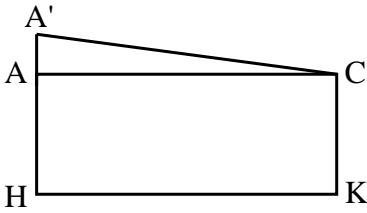
となり、従つて角 ACK が直角となる。

若し KC が HA より大なりとすれば HA を A' まで延長して、HA' を KC に等しとする、然らば又

角 A'CK = 角 CA'H

然るに

角 ACK < 角 A'CK



第二十一図

( $\wedge$ は開ける側にあるものを大なりとする符号)

又

$$\text{角 } CA'H < \text{角 } CAH$$

(之は容易に証明が出来る、但ユークリッド幾何学の様に、 $\text{角 } CAH = \text{角 } CA'H + \text{角 } A'CA$ と速断してはならぬ)

故に

$$\text{角 } ACK < \text{角 } CAH.$$

即ち

$$\text{角 } ACK < \text{直角}$$

若し  $KC$  が  $HA$  より小なりとすれば、今度は  $KC$  を延長して前の如く論ずれば

$$\text{角 } ACK > \text{直角}$$

となる。

此の故に論理学の法則によりて

角  $ACK$  が直角なる時は  $KC = HA$ .

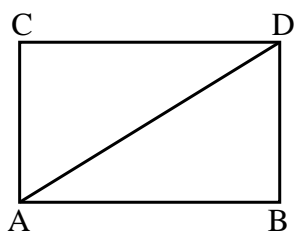
角  $ACK$  が鋭角なる時は  $KC > HA$ .

角  $ACK$  が鈍角なる時は  $KC < HA$ .

故に  $KC$  の二倍  $CD$  と  $HA$  の二倍  $AB$  とを比較する時は前陳の如く  $CD = AB$  或いは  $CD > AB$  或いは  $CD < AB$  となる。

第一の幾何学に於ては三角形の三角の和は二直角に等し。

第二の幾何学に於ては三角形の三角の和は二直角より小なり。  
 第三の幾何学に於ては三角形の三角の和は二直角より大なり。



第二十二図

何となれば、今茲に任意の三角形 ABD を取り角 B を直角とする、AB と直  
 角をなす AC を引き AC = BD ならしめ、CD を引く。

CD = AB なる時は三角形 ABD と三角形 DAC とは三辺が夫々相等しくして、  
 角 ADB = 角 DAC

となる、然るに、角 DAC + 角 DAB は直角である、故に角 ADB + 角 DAB +  
 角 ABD は二直角である。

CD > AB なる時は、角 ADB < 角 DAC となる（此の証明も普通幾何学の  
 様に至つて簡単である）故に角 ADB + 角 DAB + 角 ABD は二直角より小である。

同様に CD < AB なる時は此の和が二直角より大である。

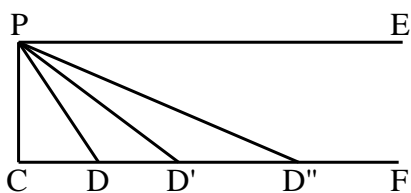
故に前陳の事は任意の直角三角形に向つて真理である、直角三角形に非ざる  
 任意の三角形は二つの直角三角形に分つ事が出来る、其の各直角三角形に向て  
 上述の結果を適用し、其和を求め、而して二直角を減ずれば、前陳の事は又任  
 意の三角形に向つても真理である。

次に余の茲に説述せんとする事項は即ち本論の目的である。

第一及び第二の幾何学に於ては、直線の長さは無限なり。

第三の幾何学に於ては、直線の長さは有限なり。

今此の定理を証明しようと思う。



第二十三図

直線CF（前頁の図）と直角をなす所の直線PCを引く、而してCF線上にD D' D''等の諸点を次ぎの如くに定むる、即ち

$$CD = PC$$

$$DD' = PD$$

$$D/D'' = PD'/等$$

然ば三種の幾何学の中、何れにしてもPCの長さを余り長からしめずば、PCはPD PD' PD''線等より短かい、故に

$$PD > PC$$

$$> CD$$

故に  $CD' = CD + DD'$

$$= CD + PD$$

$$> 2CD$$

次に  $PD > PC$

$$> CD$$

故に  $CD'' = CD' + D/D''$

$$= CD' + PD'$$

$$> 3CD 等$$

即ちCD'はCDの二倍より長く、CD''はCDの三倍より長く、逐うて同様である。今之より三種の幾何学を区別することとする。

(1) 第一の幾何学の場合。

この場合に於ては

$$\text{角 CPD} = \text{直角の半}, \quad \text{角 CDP} = \text{直角の半},$$

$$\text{角 DPD}' = \text{角 CPD の半}, \quad \text{角 CD'P} = \text{角 CDP の半},$$

$$\text{角 D/PD}'' = \text{角 DPD}' \text{の半等}, \quad \text{角 CD''P} = \text{角 CD'P の半等},$$

故に角 CPD' 角 DPD' 角 D/PD'' 等は幾何級数即ち等比級数をなし、其の公比は  $\frac{1}{2}$  である、即ち  
 其中の一は其の前にある角の半である、是らの諸角の和は

$$\begin{aligned} & \text{角 CPD} + \text{角 DPD}' + \text{角 D/PD}'' + \dots \\ &= \frac{1}{2} \text{直角} + \frac{1}{4} \text{直角} + \frac{1}{8} \text{直角} + \dots \end{aligned}$$

にして、即ち

$$\frac{1}{2} \text{直角} \times \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \text{直角} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

即ち直角に等しい、換言すれば、D D' D'' 点等を漸次定め行く時は、角 CPD' 角 CPD'' 角 CPD''' 等は漸次直角に近迫するのである、而して角 CDP' 角 CD'P' 角 CD''P' 等も亦前の如く幾何級数をなし、其の大きさ次第に減少し、遂には限り無く零に近迫する、之と同時に CD CD' CD'' 等の長さは次第に CD より大なる長さにて増され、遂には限り無く大となる、故に直線 CF の長さは無限である。

(2) 第二の幾何学の場合。

この場合に於ては

$$\text{角 CPD} < \text{直角の半}, \quad \text{角 CDP} < \text{直角の半},$$

$$\text{角 DPD}' < \text{角 CPD の半}, \quad \text{角 CD'P} < \text{角 CDP の半},$$

角 D/PD'' < 角 DPD' の半等, 角 CD'P < 角 CD/P の半等

故に

角 CPD + 角 DPD' + 角 D/PD'' + ……

<  $\frac{1}{2}$  直角 +  $\frac{1}{4}$  直角 +  $\frac{1}{8}$  直角 + ……

即ち直角より小である、即ち角 CPD' 角 CPD'' 等は漸次直角より小なる或る鋭角に近迫する、而して角 CDP' 角 CD'P' 角 CD''P 等は減少して遂には限り無く零に近迫する、之と同時に CD, CD', CD'' 等は夫々 CD, 2CD, 3CD 等より大にして、其の長さ限り無く増大する、故に直線 CP の長さは無限である。

(3) 第三の幾何学の場合。

この場合に於ては

角 CPD > 直角の半 角 CDP > 直角の半

角 DPD' > 角 CPD の半 角 CD'P > 角 CDP の半

角 D/PD'' > 角 DP/D の半等 角 CD'P > 角 CD/P の半等

故に

角 CPD + 角 DPD' + 角 D/PD'' + ……

>  $\frac{1}{2}$  直角 +  $\frac{1}{4}$  直角 +  $\frac{1}{8}$  直角 + ……

即ち直角より大きい、即ちこの角の列中、初め幾何かの和は必らず直角より大きい、故に P 点を通過し PC 線と直角をなす所の直線は、必ず CF 線と交わる、然も其の交点は C 点より有限の所に在る、C 点より其の交点までは随分長さも図り難けれど、決して無限ではない、今若し此の PC 線と直角をなす所の直線を反対に（即ち上の図に於ては左の方に）延長すれば、右の方と全く同様の理にて FC を左の方に延長したるものと交わるに相違ない、然もその交点は C より有限の所に在る、その距離は随分長さも図り難けれど、決して無限ではない、而して C の左右にある此等二つの交点は C より相等しき距離にあること勿論である。然るに二つの直線は唯一つの点に於て交わると仮定（即ち数学者の所謂

公理) することが通常である、故に此の左右にある交点は同一の点なることを要する、故にこの第三の幾何学に於ける直線は、之に沿いて段々一方に進み行きたるとき、又更に他方の遠き(無限に遠き所に非ず)所に現われ来るを得べきが如き有様を持つ、即ちその長さは有限である、若し無限であるあるならば、右方遠き所より左方遠き所へ移りて現われ来る能わずと言わねばならぬ、而してC点より上述の交点までは即ち此の直線の有限なる長さの丁度半分でなければならぬ。

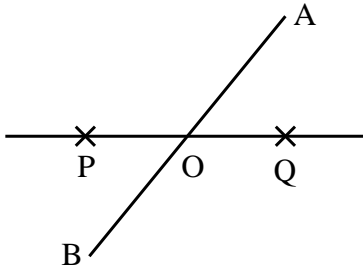
期くして、第三の幾何学に於ては直線は有限の長さを有する、元来空間の大きさの有限なるや又は無限なるやを判定するのには、其の空間中に在る直線の長さの有限なるや否やを論断すべきものである、直線の長さにして有限ならば、空間の大きさは有限である、(直線とは如何なるものなるやに就ては今全く之を説かず)故に所謂第三の幾何学の真なる所の空間は其の大きさは有限なりと言わねばならぬ。

### 余説

既に第三の幾何学の行わるる空間に於て、直線は有限の長さを有する、而して其の長さは何れの直線なりとも同一である、即ち其の長さは各直線毎に異なる者でない、何となれば何れの二つの直線も皆之を全く重ね合わせるこの出来るものと見ることが通常である、猶又、上に述べたる所によりてP点を通過する直線は皆CF線(左方或いは右方に於て)と交わる、従つて如何なる二つの直線も皆相交らずと言ふことはない。

又一つの直線PCと直角をなす所の二線CF PE(第二十三図)の交点よりPC線に至る距離は相等しく直線の全長の半に等しい。

又此の第三の幾何学に於て平面中に横される一ツの直線は決して此の平



第二十四図

面を二分しない、換言すれば、その直線の一侧にある任意の一点より出発してその他の側にある任意の一点に到らんとするに、此の直線を横切らずして到ることが出来る、何となれば、先まず所設の直線をABとし、其の両側に任意の二点P、Qを定むる、この二点を通過する直線を引く、此の直線とAB線との交点は唯ただ一つにして之をO点と名づける。

此のO点は上述せる所によりて必ず存在するのみならず、其の数は唯一である。PQ線中の二点PとQとは有限の長さを有する直線PQを二分せる故にO点はその二部分中何れいか一部分の中にある。PよりQに到るに此のO点の在る部分の方を通過することなく、此のO点の在らざる部分の方に沿いて直線PQの上を進み行かば、即ちABと交わることなく、P点よりQ点に到ることを得るのである。

(明治四十年九月二十日人性第三卷第九号所載)



#### 第四、数学と自然科学

若しも数学と自然科学との組織の異同に就いて議論せんとならば、あらかじめ予め先ず科学とは如何なるものなりや、又数学及び自然科学とは如何なるものなりや等の問題に明答を与え置かざるべからず。それは既に甚だ困難なる問題なり。然れども数学及び自然科学の定義をさまで明確に述べ置かずして、通例吾人が漠然ながらも了解し居る程度に於いて、数学は数及び図形の性質を研究の対象とする科学にして、自然科学は自然現象を研究の対象とする科学なりとするに止め、両者の組織に就きて聊か蕪雜なる見解を開陳せんとす。

抑も吾人の智識は其の初め総て感覺機能によりて獲得したるものにして、其の智識の根元は皆な人の経験によると云うを得べし。而して経験は之れを二種に分かつを得べし。第一には自然の現象その儘に接触して成すところのいわゆる観測にして、第二には一歩進んで自然の現象を模倣して人工的に企てたるか、若しくは全然観測より類推するか或は一旦真なりと定めたる法則を験めさん為めか或は此等の法則に従がいて人為的に或る現象を作り出さん為かに向かつて為す所のいわゆる実験なり。この自然的現象及び人為的模倣的現象の取り扱いは全く客観的にして、唯後者に於て稍主観的なるを見る。斯くして得たる経験の結果に吾人は分析綜合の両作用を施こし組織ある智識を求めんと企だつ。其の分析綜合の両作用を施こすことは即ち吾人の称するところの科学的研究にして、其の組織ある智識が即ち科学であるものと思う。而して経験の結果にして科学者のいわゆる科学的研究の施こされざるものなく、組織ある智識にして科学ならざるものなく、其の組織の程度の完不完を問わざらんには、科学以外の組織ある智識なきことを余は信ぜんとす。

種々の経験の結果をそのままに記述したらんには、更に其の間に統一あるなく、組織あるなく、吾人

の智識は断片的に羅列せらるるに過ぎじ。然れども之れに科学的研究を施したらんには、其の種々の経験の結果より、之れ等に共通なる要素を抽出して、そこに科学者のいわゆる法則、原理、公理、假定、仮説なるものを作る、これ等数種の術語は異なる意義に於て用いられ居るが如しと雖、その実之を陳述する科学者の胸裏に於ける確信の程度即ち蓋然率に多少の差異あるより起りたるものというに過ぎず、而して多くの法則、例えばニュートンの運動の第一法則、光の波動説、又近頃の量子説、エネルギー等配論の如きは、全く仮想的の対象に関するものにして、最早吾人の経験し居る現象にはあらず。若し其の法則が、たとえばニュートンの万有引力の法則の如く数量的なときは、その法則に適合せざる程度に於て、吾人の実測の範囲を脱する微差あることを疑がい得べきなり。進化論或は幾何学的公理の如きも亦此れ等の法則、原理と同様の価値を有するものなるべし。要するにこれ等の法則原理は種々の経験の結果の概括なり。一旦この概括をなし法則原理を作りたらば、先きには未だ経験せざりし他の場合にも亦これ等の法則原理の適用せられべきを預期す。其の預期は適中することあるべし、又適中せざることもあるべし。若し適中せざるときには自然科学者は驚愕の余り大に悲嘆し、時には大に狼狽の態をなす。又一旦法則原理を作りたらば其の法則原理の中に包容せられたる事実を演繹的論法によりて検索し、法則より出でたる法則、公理より出でたる定理の排列を整頓す。而してそれ等の法則定理の實際現象に適用せられべきを預期す。其の預期は適中することあるべし、又適中せざることあるべし、若し適中せざるときには自然科学者は先きに基礎の爲に為せる概括の過誤なりしことを想いてその法則原理を放棄せんとす。然れども自然科学者が悲嘆し狼狽し一旦建設したる法則原理をも放棄せんとするが如き予期の適中の成らざりしが如き場合に於て数学者は平然たるべし。数学者は適中を預期せず、又之れに想到することなし。彼は一旦建設した

る法則原理の内容を検査して体系をなせる定理の一群を得たるとき、たとえその中の一定理が實際現象に適用せられ得ざりしとするも、その定理に到達するまでの論理にして正しきことを見出さば、その定理は真なりと断言して憚<sup>はば</sup>からざるなり。

吾人は時の古今に涉り処の東西に通じて数多の経験を積む。然れども吾人の経験は有限なり。その有限の経験を基礎として建設したる法則原理が経験の範囲の広まるに従がいて誤りなりしことを見出さるるは寧<sup>むし</sup>ろ当然のことなりというを得べし。然れども注意深き概括によりて建設せられたる法則原理は多くの場合に於て誤りなく適用せられ得ることを見出す。例えば物理学に於て或る時或る処に於て或る人が建設したる法則原理が或る時代の間善く適用せられて真なりと認められたりしを知る。而して近代に至りて、即ち経験の範囲の広まりたるが故に一時真なりと認められたる法則原理が真ならざるに至りしを見る。時としては一時真なりと認められたる法則原理若しくは仮説が或る時には偽なりといわれ、更に時間を経過して又真なりと認めらるるに至れることもあり。その一例の如きは最近の時代に於てもこれを見出すことを得。その法則原理の破るるに至りしとき周章狼狽するが如くに見ゆる自然科学者は自己が嘗<sup>かつ</sup>て其の法則原理を建設したりしときの境遇を忘却したるものなり。その時有限の範囲の経験に基づきてこれを建設したりしことを記憶せざるものなり。後に至りての齟齬<sup>そご</sup>は寧<sup>むし</sup>ろ期待し居るべき筈のものなり。その齟齬に出遇う毎に先きの法則原理もしくは仮説を捨てて顧みずとすれば寧<sup>むし</sup>ろ初めよりその法則原理もしくは仮説を建設せざりしに如かず。自然科学者が一旦有限の範囲の経験の結果に基づきて法則原理若しくは仮説を建設しこれ等を真なりと仮定したるとき自<sup>おの</sup>ら組織せんとする科学そのものの内に於てはこれ等は絶対的確實なりとせざるべからず。其の確實の度を顧慮し、之れを客観的に若しくは圏外よりせる判断を加うることは聊<sup>たゞ</sup>かもなすべからざるものなり。

その法則原理仮説はその自<sup>おのず</sup>から支配する所の宇宙に於て絶対的に真なり。その宇宙に於てはその法則原理仮説を建設するとき用いたる自然現象が正当に経験せらるるのみならず、その法則原理仮説が適用せられ得る現象のみを以て充滿す。従がつて一つ若<sup>も</sup>しくは一組の法則原理仮説の建設はソレゾレ一つの宇宙を構成す。かくの如き宇宙は種々あるべし。箇々別々に離れて共通の部分なきこともあるべく、又共通の一部分を有することもあるべく、又一つの宇宙は他の宇宙を包容せることもあるべし。

物理学を応用して一つの器械を發明したるときありしとせよ。其の發明の根抵はその当時に於ける物理学の原理法則の適用にあり。進歩せるその後の物理学の原理法則を適用するも亦前と同様なる器械を發明することを得ん。或は又更に一層精巧なる簡單なる便利なる器械を發明することを得ん。然れども前の器械を發明するに於て旧時の物理学の原理法則は有効なりしなり。而して今も猶<sup>な</sup>おその器械はその原理法則に依りて説明せらるるも不可なく、必ずしも新らしき原理法則に依りて説明せらるるを要せざるなり。即ちその器械は一つの宇宙に属して吾人に有益なりしものにて、今もなほ有益なり。

實際は吾人は唯一の大宇宙の内に生存するものならん。然れどもその實在せる唯一の大宇宙そのものは吾人の科学的研究の対象とはならざるなり。吾人は唯その一小部分に科学的研究を施こさんとして別箇の宇宙を構想するものなり。而して吾人の経験の範圍の拡大せらるるに従がいて、構想せる宇宙が漸次實在せる大宇宙と合一する傾向にあるものにして、然<sup>しか</sup>かもその合一の期は到底之れなきものなりと信ず。

物理学、化学の如き近時著るしき進歩を遂げ種々の新現象の発見せらるる毎にその根抵に動搖を來たし殆んど周章狼狽の態にあるが如しと雖<sup>いまだ</sup>も、旧時代の物理学はその各箇の宇宙に於て真にして必ず

しも捨つべきにあらず、今も昔も存立して毫も妨げなし。数学者は幾何学に於て種々の空間を構想す。又数学に於て種々の数の理論を構想す。物理学者及び更に一般に何れの自然科学者も皆この方を探るを可とせずや。

余は先きに有限の経験の範囲なる詞を使用したり。今茲にその意味を敷衍し置かん。先ず吾人が或る現象に就て経験する回数は一箇人としても又古今東西に渉れる総ての人なりとするも無限に多きものにはあらず。それは通俗的にいわば無限に多きものならん。然れども唯随分多しというに止まりて真に無限に多きにはあざざるべし。又或る法則原理を建設するには必ずしも一種なりといわるべき或る現象のみに就きての経験には基づかざらん。多種の現象に就て経験したる後その経験の結果より共通の部分抽出して概括的法則を作るものならん。然れどもこの場合に就ても猶お経験の回数は無限なりとはいうを得ず。最後に唯一回だけ或る一種の現象に就きて経験するとも吾人の感覺機能は無限小に向かつても又無限大に向かつても鋭敏なるものにあらず。唯極めて限られたる部分のみを感得し得るのみ。斯くあるべしと目撃せしものは眼の能力の局限のある限りそは近似的なるのみ。厳密に左様なりしとはいうべからず。唯見る所然かりというを得るのみ。故に吾人が経験によりて然からんと思考せしものは之れを無限小、無限大、無限近、無限遠、無限狭、無限広に推し及ぼして果して真なるや否や断定すべからざるなり。

以上は余が自然科学者の思想と数学者の思想との大に異なる所なりとする諸点の一なり。次ぎに更に他の一つの点に就いて述べん。

自然科学者及び数学者は共に経験によりて智識の根元を得。而して自然科学其者は経験を是認することのみによりてその科学の基礎を築成す。之に反して数学者は一方に於て経験を是認することにより

て其数学基礎を築成すると同時に、他の一方に於て経験を非認することによりてその数学の基礎を築成することを企だつ。即ち数学者が数学と名づけ又幾何学と名づくる所の科学はそれぞれ種々の法則原理——数学者はこれを公理という——の相異なる一群の上に立つ。彼れが幾何学というものには数多ありて相異なる公理の群を基礎とす。此れ等の公理の群より論理に適える演繹によりて定理の羅列を得るならば、之れを皆な幾何学という。その公理の各群は即ち種々の空間を支配する法則にして幾何学者は種々の空間ありというを憚らず。然れども是れ自然科学者の敢てせざる所のものなり。自然科学者のいうところの空間は彼が実在せりと認むる唯一つの空間なり。哲学者の観るところも亦然るが如し。しかも自然科学者はその空間に客觀的実在を認むるが如し。之れに反して数学者のいわゆる空間は経験に基づきて構想したるものなり、その経験を基とするには経験を是認すると否認することの二様の途に出ず。之れ前に云うが如く経験の範圍の有限なるを思つてなり。経験を否認することによりて建設せられたる幾何学は之れを実在せる空間に適用して無効なることもあらん。然れどもそれは純正数学者の関すべき所にあらず。幾何学者は假想的空間に於て唯単に論理的思索を試むるより外別に為す所のあることを知らざるなり。幾何学に限らず、数の性質を研究する数学の部分も亦然り。自然科学者に向かつて種々の根抵を有する種々の同名の自然科学が同時に存立し得べきやと問わば必ず否と答えん。数学者は之れに存立し得と答えん。之れ蓋し数学者の認むるところの数学は基礎の公理よりせる論理的結果の系列に外ならずしてその公理は経験に基づき——是認否認は何れにもせよ——たりというの外更に制限なしと信するなり。数学を研究するものの眼より以てすれば総ての科学は皆自然からざるべからざるものなりと認む。然かるに自然科学者の認むるところは然からざるなり。

(明治四十四年十月十日発行哲学雜誌第二百九十六号所載)

- 底本には、国立国会図書館「近代デジタルライブラリー」所収の『初等幾何学の体裁』（弘道館、明治四十五年二月）を使用した。
- 画像の解像度が粗いため、欧文の一部に解読しにくい部分があり、欧文の書籍・論文のタイトルなどに誤植の可能性がある。
- 適宜振り仮名を追加した。
- 旧漢字は新漢字に、旧かな使いは新かな使いに変更した。
- PDF化にはL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X<sub>2 $\epsilon$</sub> でタイプセッティングを行い、dvipdfmxを使用した。

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

<http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html>

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内、その他「科学図書館」に関する意見などは、「科学図書館掲示板」

<http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs>

を御覧いただくか、書き込みください。