# 原論第I巻の目標はピュタゴラスの定理であるのか

佐藤勝造

科学図書館ブックレット

科学図書館

# 原論第I巻の目標はピュタゴラスの定理であるのか

佐藤勝造

# はじめに

ユークリッドの『原論』は，全部で 13 巻から成り，紀元前 300 年前後に一応完成したものとされている。いうまでもなく，この書は図形の研究のみでなく，整数論，通約不能量（すなわち無理量）も図形的に表現して論じた，当時の理論数学の体系であって，単なる図形学という意味での幾何学書ではない。別けてもその第 I 巻は，理論数学（論証）の概略を理解させるためによく使われてきた。実際，この巻には現在でも中学校の教科書の中にそのままの形で出てくる命題（定理，作図題）が少なくない。

ところでこの『原論』第 I 巻について，『原論』第 I 巻の頂点はピュタゴラスの定理である，あるいは，第 I 巻はピュタゴラスの定理の証明を最終目標として構成されている，などのことがよくいわれる[(1)]。

しかし，果してそうであろうか。

もちろん，古来，ピュタゴラスの定理は有名であり，しかも第 I 巻の最終の 2 つの定理（命題 47 と 48）はピュタゴラスの定理及びその逆である。だから私も，上のような言い方が第 I 巻の性格を示すために標語的，印象的に使われる場合には，特に異存はない。おそらく注 (1) にあげた書物での記載も，そのような意味による例は多いだろう。

にもかかわらず，これについての私の結論は，『原論』第 I 巻の最終目標が命題 47（ピュタゴラスの定理）であると決して言えない，という所にある。むしろ，第 I 巻は命題 47 で完結したというより，命題 47，48，あるいはそれらと独立な命題 45（面積添付の基本形）その他を用意して，第 II 巻以後の各巻に有力な手法を与える巻であり，第 I 巻は全体の中で，1 つの有機体の基本的部分をなすものであると考える。そう考える根拠は少なくとも 3 つ挙げることができるのである。

その第 1 は，第 I 巻内部での理論構成に関連する。第 2 は，後の巻，特に第 II 巻との関連である。第 3 は，後のギリシア数学，特に円錐曲線論との関連である。

本稿では，上記の主張を裏づける意味で，順次これらのことについて述べる。

## §1. 第 I 巻の理論構成

第 I 巻の内部の問題とは，少なくとも『原論』に示された形に関する限り，ピュタゴラスの定理と「独立」で，しかももっと手間のかかる命題，特に第 I 巻命題 45（以下 I.45 と略記する）のあることである。なお，本稿で「独立」というのは，『原論』に示された形の上で，ピュタゴラスの定理から直接導かれたり，ピュタゴラスの定理を直接導いたりという関係にないという意味である。なお，その命題は私の第 2, 第 3 の論点にもからんでくる。

『原論』第 I 巻は直線図形論である。その構成は，23 個の定義，5 個の公準（要請），9 個の公理（共通概念）[(2)]，48 個の命題とその証明でできている。そして，第 I 巻の 48 個の命題は 3 つの群に区別できることがいわれている[(3)]、すなわち，第 1 の命題群は I.1 から I.26 までであって，角と三角形に関する理論，第 2 群は I.27 から I.32 までであって，平行線の理論とその応用，第 3 群は I.33 から最後の I.48 までであって，平行四辺形の理論である。

ところで調べてみると，これら 48 個の命題の内，第 I 巻内の他の命題の証明に使われない，いわば行きづまりの命題が，最終命題の I.48 の他に 10 個ある。その内訳は，第 1 群では

I.6 （I.5（底角相等の定理）の逆），

I.12 （垂線の作図），

I.17 （2 内角の和 $<$2 直角），

I.21 （$\triangle$ABC の内部の点 D に対し BD+CD$<$AB+AC，$\angle$BDC$>$ $\angle$BAC），

I.25 （I.24（後述）の逆）

の 5 個，第 2 群では

I.28 （平行であるための条件，同側内角），
I.32 （三角形の内角の和），
の 2 個，第 3 群では
I.39 （I.37（後述，系統図）の逆），
I.40 （I.38（後述，系統図）の逆），
I.45 （後述）

の 3 個である。なお，ピュタゴラスの定理 (I.47) はその逆 (I. 48) の証明に使われている。しかし，これら 10 個の行きづまりの命題は,『原論』の他の巻では使われている(4)，特に，第 II 巻（「幾何学的代数」），第 III 巻（円論），第 IV 巻（内接多角形，外接多角形），第 VI 巻（相似形の理論），第 XI 巻（立体図形），第 XII 巻（求積論），第 XIII 巻（正多面体論）で使われている。

［行きづまりの問題］

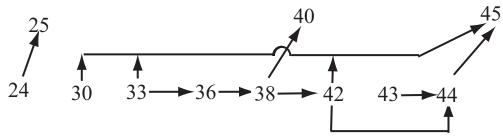
| 群 | 命 | | 題 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 | 6 | 12 | 17 | 21 | 25 |
| 第 2 | 28 | 32 | | | |
| 第 3 | 39 | 40 | 45 | | |

［行きづまりの命題の第 2 巻以後の適用例］

| | |
|---|---|
| I. 6 | II. 4, 10, III. 25, IV. 9, 10, 14, VI. 3, XIII. 7, 8 |
| I. 12 | XI. 11 |
| I. 17 | III. 16, 18, 31, VI. 4, 7, XI. 14 |
| I. 21 | III. 8 |
| I. 25 | XI. 20, 23 |
| I. 28 | IV. 7, VI. 4, XI. 6, 18 |
| I. 32 | II. 9, 10, III. 20, 22, 31, 32, IV. 2, 10, 15,<br>VI. 5–8, 18, 20, XI. 21, XII. 1, XIII. 8–11 |
| I. 39 | VI. 2 |
| I. 45 | II. 14, VI. 25, XI. 32 |

注：II. 4, 10 は第 2 巻命題 4, 10 の略記，以下同様。

なお，これは小さいながらも，第 I 巻全体の有機的構成要素たることを示す一事実である。




〔行きづまりの命題（上列 3 個）の証明
にのみ使われたと思われるもの〕

なお，これら行きづまりの命題の証明にのみ使われるものが第 I 巻に 8 個あることも注意しておきたい。第 1 群では

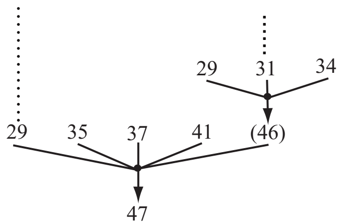
I. 24（2 辺相等の 2 つの三角形では，その夾角が大きい対辺が大きい），第 2 群では

I. 30（後述，系統図），第 3 群では

I. 33，I. 36，I. 38，I. 42，I. 43，I. 44（いずれも後述，系統図）がそれである。してみると，以上の 18 個の命題はピュタゴラスの定理に直接関係せず，別の巻の用意になっているということになる。

さて，行きづまりの命題 10 個の中で最も重要な命題に I. 45 がある。

I. 45　与えられた直線角のなかに与えられた直線図形に等しい平行四辺形をつくること(6)。




これは「面積添付」と呼ばれる作図的方法につながる重要な作図題であるが，この作図法の内容については次節で説明する。ここではもっぱら，この I. 45 と I. 47（ピュタゴラスの定理：直角三角形において直角の対辺の上の正方形は直角をはさむ 2 辺の上の正方形の和に等しい）について，『原論』の文章に示された限りでの，おのおのの証明に到る各命題の論理的な依存関係を比較対照してみよう（系統図を参照）。

両者に必要な先行命題は，I. 29 までは共通である。I. 29 以後について，両命題に到る命題の番号を以下列記してみることにする（以下の数字は命題の番号である）。

$\cdots\cdots$ 29 30 31 33 34 35 36 37 38 41 42 43 44 $\rightarrow$ 45

$\cdots\cdots$ 29 31 34 35 37 41 46 $\rightarrow$ 47

この両系列を見渡してみると，I. 47 の系列下にある命題は，I. 46 を除いて，すべて命題 I. 45 の系列に含まれてしまうことに気がつくのである。ところが，この I. 46（与えられた線分上に正方形を描くこと）についても，その証明を見ると I. 2, 11, 29, 31, 34 のみが使われているに過ぎない (7)。とすれば，これは，I. 47 の証明のために用いた命題が，すべて I. 45 のために用意された命題で処理されることを示している。この節の冒頭で I. 45 を「I. 47 と「独立」で，より手間のかかる命題」としたのは，実はこのことに他ならない。

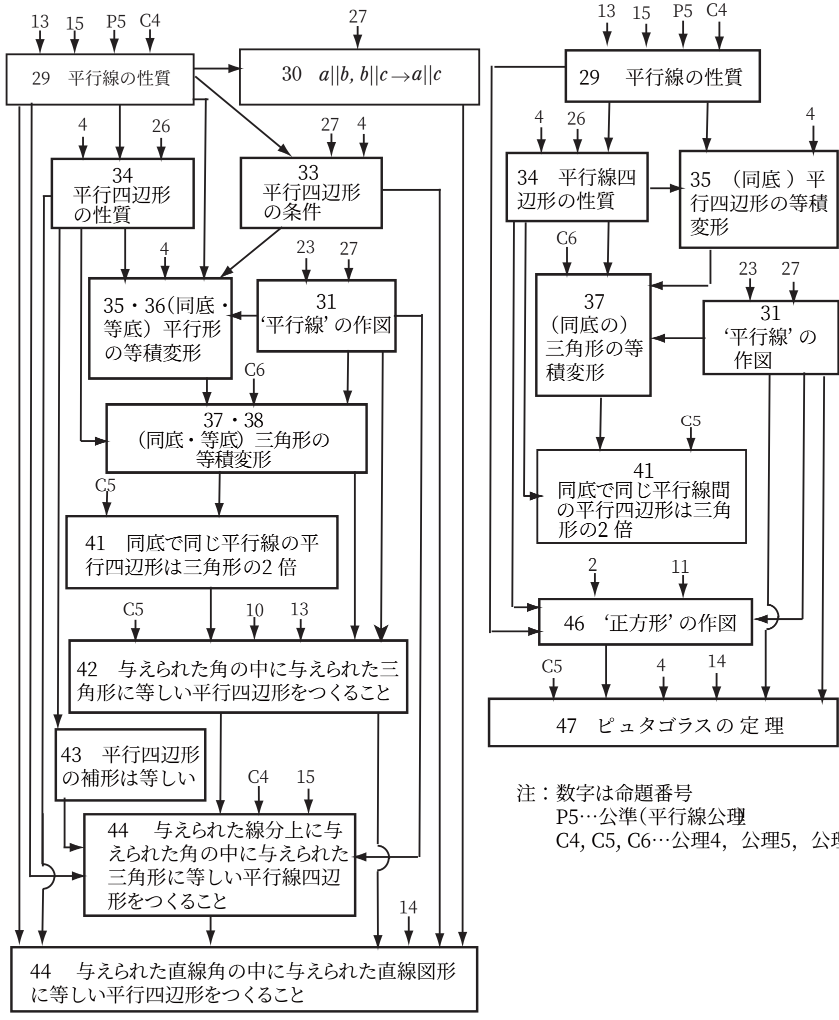
実際，上の表で示すように，I. 47 の証明に直接関係しない命題の個数が 18 個であるのに対して，I. 45 の証明に関与しない命題の個数は 13 個である。もちろん，純論理的にいえばこれら 18 個，13 個のうち，I. 47，I. 45 の証明に潜在的に用いられた命題はあるかもしれないが，その吟味はまだ終っていない。ここでは『原論』に書かれた形そのものにおける個数について，その依存関係を論じようとしたのである。

以上の分析から，第 I 巻内部で問題にする限り，印象的標語としてならともかく，ピュタゴラスの定理（I. 47）が第 I 巻の頂点だとは必ずしも言えないし，第 I 巻が I. 47 で完結したわけでもない，ということが言える。

## §2. 第 I 巻と第 II 巻以後の各巻

第 I 巻と後の巻，特に第 II 巻との関連とは，ピュタゴラスの定理及びその逆である第 I 巻の命題 I. 47，I. 48 と共に，I. 45 もまた第 II 巻その他の巻で幾度も使われ，かつ重要な役割を演じていることである。

1・2・3　‘等辺三角形’, ‘線分の移動’ の作図　4　二辺夾角の合同定理　5　底辺相当の定理　7　△ABC 画あるときに, AB に対して C と同じ側に C と異なる D をとり, AC=AD, BC=BD とはできない　8　三辺の合同定理　9・10・11　‘角の二等分線’, ‘線分の中点’, ‘垂線’ の作図　13　一直線のなす接角の和は 2 直角　14　13 の逆　15　対頂角等の定理　16　外角は内対角おり大きい　18　大きい辺に対する角は大きい　19　18. の逆　20　2 辺の和は残りの辺より大きい　22・23　‘三角形’, ‘角の移動’ の作図　26　二角一辺の合同定理　27　平行線になるための條件




注：数字は命題番号
P5…公準(平行線公理
C4, C5, C6…公理4，公理5，公理6

**第 1 図　命題 45，47 の証明にいたる諸命題の系統**

実際，これらは第 II 巻，第 III 巻，第 IV 巻，第 VI 巻，第 X 巻，第 XI 巻，第 XII 巻，第 XIII 巻で頻々と使われる。たとえば，I. 45 は

II. 14（後出），

VI. 25（相似かつ等積の「面積添付」），

XI. 32（等高の平行六面体は底面に比例），

の証明で，I. 47 は

II. 9 $\left(a^2+b^2=2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right]\text{に相当}\right)$,

II. 10 $\left((2a+b)^2+b^2=2[a^2(a+b)^2]\text{ に相当}\right)$,

II. 11（黄金分割），

II. 12–14（後出），

III. 14（等しい弦），

IV. 35–36（方べきの定理），

IV. 12（外接正五角形），

X. 13 のレンマ，XI. 23 のレンマ（2 つの正方形の和，差），

X. 29–30，X. 33–35（有理，中項面積のある条件を満たす 2 線分），

XI. 23（立体角），

XI. 35（2 つの等しい平面角の頂点とその面外の線分），

XII. 17（同心球），

XIII. 14，15（内接正八面体，内接正六面体），

XIII. 17（内接正十二面体）

の証明で，I. 48 は

X. 35（前出）

の証明で必要なものである(8)。

ところで，一体，I. 47（ピュタゴラスの定理）と I. 45（面積添付）はどちらがより大切であろうか。

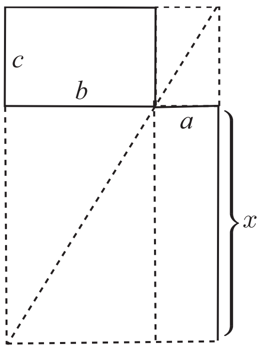
なるほど，ピュタゴラスの定理は今日距離空間などにおいて大事である。そして，$n$ 次元ユークリッド空間 $R^n$ とは，2 点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=$

$(y_1, \cdots, y_n)$ の距離が

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

で定義される空間であり，もちろん，ピュタゴラスの定理は $n = 2$ の場合である。このように距離空間への抽象化の過程はピュタゴラスの定理を正しくその出発点としている(9)。したがって，この点に注目する限りピュタゴラスの定理の重要さは不動である。

だがしかし，見落してならないのは，ピュタゴラスの定理がかくも大事であるのは，あくまでも今日の立場からみてのことである。ギリシア数学の立場からみたときには，事情はおのずから異なってくる。結論を言えば I. 45 は I. 47 と同等あるいはそれ以上に大切なのである。それは，まず第 1 に，I. 45 が第 II 巻の最終の命題 II. 14 （すなわち，直線図形の正方形化の証明に重要であり，その方法はいわゆる「面積添付」に関するものだからである。これは私の第 3 の論点にもからむ。




**第 2 図**

また第 2 には，I. 45 につながる II. 14 が第 II 巻の他の命題と共に第 X 巻（無理量の巻）につながっている（X. 54) (10) からである。

すぐ下で示す通り，面積添付の概念はギリシア数学史の中で常に枢要な役割を務めてきた。言うなればそれはいわゆる「幾何学的代数」の 2 つの最重要な方法の 1 つである（他の 1 つは比例)。「面積添付」(application of areas, Flächenanlegung) (11) とは，たとえば与えられた面積 $bc$ (長方形) を与えられた線分 $a$ 上に「添付する」（appliquer）こと，つまり，

$$ax = bc$$

の $x$ を決めることである（第 2 図参照。与えられた面積 $bc$ が与えられた線分 $a$ の上に添付されている)。このような添付方法（一般には，与えられた（直線図形の）面積を与えられた線分上に平行四辺形の形

で添付すること，ないし，その際，別に与えられた平行四辺形に相似な部分を過剰または不足の形で残すこと（application)）は，ギリシア語で $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$［側におくこと］と呼ばれる。

面積添付はピュタゴラス学派の発見とされているが[12]，ギリシア人はこの方法によって，1次方程式だけでなく今日でいう正の実根をもつ2次方程式も幾何学的に解いている。面積添付の最も一般的な形であらわれているのは，きわめて重要な命題である『原論』第VI巻のVI. 28, 29（後出）である。ところがさらに，無理量論を取り扱う第X巻において，ある重要な作図（X. 33–34)[13] がこの命題の面積添付に依存している。まさに，その方法はギリシア数学の根底をなすものであったのである。

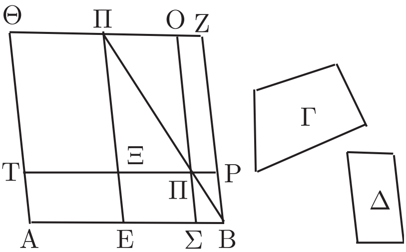
ところで，この面積添付のごく簡単な場合こそがユークリッド『原論』のI. 44, 45なのである。すなわち，与えられた線分に，与えられた直線角をふくみ与えられた三角形または直線図形と等面積の平行四辺形を添付すること，という命題で，これは先の $ax = bc$ の $x$ を求めることと同じである。そして，I. 45はII. 14の証明で使うことを先に述べたが，面積添付はII. 5, 6[14] などの証明にもしきりに使われる。だから，I. 45につながる一連の命題群（第I巻の第3群に含まれる§1のI. 45の系列)，特にI. 41–45は面積添付をやっていると言えるだろう。さらに，第II巻はすべてこの命題群とI. 47に依存している。したがって，第I巻と第II巻の関連は明瞭であり，「面積添付」で考えるとき，I. 45はI. 47に優るとも劣らず重要な位置を占める。

ところで，第II巻は一般に，「幾何学的代数」[15]（バビロニア代数の延長）と呼ばれ，ピュタゴラスの定理の鈍角及び鋭角三角形への拡張(II. 12及び13）を目標に組み立てられたもの，とされている。ところが最近，この第II巻の目標について，赤摂也氏が卓抜な意見を述べておられるので，それ自身の意義はもとより，私の論述とのつながりからここで紹介したい[17]。赤氏によれば，“II巻は，「幾何学的代数」

の一部であることは疑わない。しかし，その目標は決してピュタゴラスの定理の拡張などではなかった。……II 巻は古ピュタゴラス学派の「無理量論」の名残りである。”[18] というもので，全体的に非常に説得力を持った論旨である。

こうして赤氏の意見までを視野に入れると，第 I 巻の目標が I. 47（ピュタゴラスの定理）で，第 II 巻の目標がこの I. 47 の拡張であるという従来の図式は，歴史的現実の上からは，ますます言えなくなるであろう。なお，第 I 巻における私の I. 45 の重視は，赤氏の所説の傍証の 1 つになっていることも付け加えておきたい。

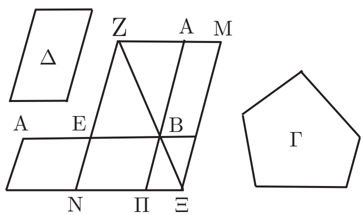
## §3. 「面積添付」とアポロニオスの円錐曲線論




第 3 図

私が第 3 の根拠としてあげた, 後のギリシア数学，特に円錐曲線論との関連とは,「面積添付」を介してのアポロニオスの円錐曲線論のことである。I. 45 はピュタゴラスの定理（I. 47）と共に，アポロニオスの円錐曲線論で決定的な役割を演じている。以下，これを示そうと思う。

前節で、面積添付の一般化である『原論』第 VI, 28, 29 のことに触れたが, それは次のように定式化されている[19]。




第 4 図

VI. 28　与えられた線分 AB 上に，ある与えられた直線図形 Γ に等しい面積をもつ平行四辺形（AΠ）を「添付」し，ただし与えられた平行四辺形 Δ に相似な平行四辺形（BΠ）だけ欠けているとせよ。

VI. 29　与えられた線分 AB 上に，ある与えられた直線図形 Γ に等

しい面積をもつ平行四辺形（AΞ）を「添付」し，ただし与えられた平行四辺形 Δ に相似な平行四辺形（BΞ）だけがはみ出すようにせよ。

このことの意味は第 3 図，第 4 図が明らかにしてくれるが，VI. 28 では，平行四辺形 AΠ[(20)] は，与えられた多角形 Γ と同じ面積をもたなければならず，また，与えられた線分の残りの部分の上の平行四辺形 BΠ は，与えられた平行四辺形 Δ に相似でなければならない。VI. 29 についても同様である。

もし，与えられた平行四辺形が正方形であれば，求める平行四辺形 BΠ，あるいは BΞ は正方形にならねばならないことは直ぐ分かる。いま，求める平行四辺形の底辺と高さを $x$, $y$，与えられた直線図形（Γ の）面積を $b^2$，その上に長方形を添付すべき与えられた線分を $a$ と表すならば，VI. 28 の条件は

$$xy = b^2, \quad x + y = a$$

となり，VI. 29 においては

$$xy = b^2, \quad x - y = a$$

となる。実は，これはそのまま『原論』第 II 巻命題 5, 6 に対応するものである。

ところで，不足部分（deficiency）または超過部分（excess），すなわち VI. 28, 29 におけるように，添付の際，与えられた形の平行四辺形で不足または超過している部分は，ギリシア語で，ἔλλειψις [不足] または ὑπερβολή [超過] と呼ばれている。また，すでに述べたように，面積の与えられた平行四辺形ないし直線図形を，与えられた線分に（過不足なく）「添付」することは παραβολή「側におく」と呼ばれている。

ところが後に，このような添付の名称（術語）は 3 種の円錐曲線に転用されるのである[(21)]、すなわち，アポロニオスは円錐曲線の基本的性質を記述するのにこの「面積添付」に関する術語を適用している。以下，そのことを見よう。

アポロニオスはその『円錐曲線論』第 I 巻で，まず円錐を，1 つの円とその平面にない 1 点を通る直線をその円周上を連続的に動かすとき

に形成されるもの，と定義する[22]。次いで，3 種類の円錐曲線がただ 1 つの円錐を種々の平面で切断することによって生ずることを解明する[23]。アポロニオス以前にはこの 3 種類の曲線はそれぞれ異なった直円錐を切ってつくっていたのである。

実際，円錐曲線論の歴史は，ユークリッドよりも少し古いメナイクモス（紀元前 350 年頃）までさかのぼることができる[24]。円錐曲線の古称は，ユークリッドでもアルキメデスでも，単に直角円錐の切口（放物線），鈍角円錐の切口（双曲線），鋭角円錐の切口（楕円）である。これは，回転円錐を直角，鈍角，鋭角の頂角に応じて区別し，円錐をその母線に直交する平面で切った切口の曲線として与えられたことによるものであろう。

これに対して，アポロニオスはその先駆者たちの仕方とは異なり，「面積添付」の問題と円錐曲線との関連を明らかにして，放物線，双曲線，楕円という今日つかわれている名称を与えた（『円錐曲線論』第 I 巻）[23]。

すなわち，軸三角形 ABC の BC と直角をなす DE において，切口が底面を切るようにする。すると，PM は $\triangle$ABC と切平面との交線である。これを切口の‘径’という。この径 PM と AC との関係には次の 3 つの場合がある。

（1）PM $\parallel$ AC（第 5 図）。

（2）PM が CA の延長と（P$'$ で）交わる（第 6 図）。

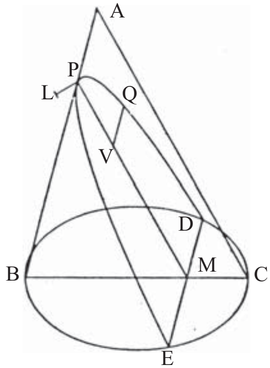
（3）PM が AC と（P$'$ で）交わる（第 7 図）。

そして，このようにして生じた 3 つの曲線がそれぞれ放物線，双曲線，楕円の性質をもつのである。実際，（1）は放物線の場合であるが，このとき PM $\perp$ PL をひき，

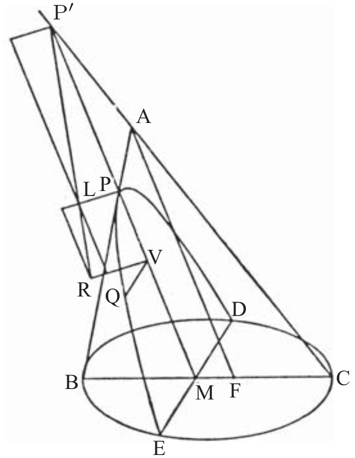
$$\mathrm{PL} : \mathrm{PA} = \mathrm{BC}^2 : \mathrm{BA} \cdot \mathrm{AC}$$

となるように点 L をとる。そうすると，

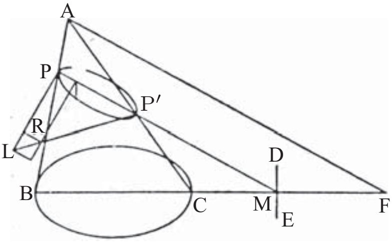
$$\mathrm{QV}^2 = \mathrm{PL} \cdot \mathrm{PV}$$




**第 5 図**




**第 6 図**




**第 7 図**

となる[25]。これは，縦線の上の正方形 $QV^2$ は，PV に等しい幅をもって PL にぴったり「面積添付」された長方形に等しいことを示している[26]。放物線に παραβολή という名称はこのことからアポロニオスによって，はじめて与えられたのである[23]。そのラテン語が parabola であって，まさしく現在使われているものである。

また, (2), (3) は双曲線, 楕円の場合であるが, アポロニオスはこのとき, $PM \parallel AF$ をひき，$PM \perp PL$ をひく。そして $PL : PP' = BF \cdot FC : AF^2$ となるように点 L をとる。さらに彼は，P′L を結び，PL に平行にして P′L，または P′L の延長と R と交わる VR を引く。そうすると,

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

となる[27]、したがって，（2）の場合には，$QV^2$ は PV に等しい幅をもって PL に「添付」されている。ただし PL, PP′ によってかこまれた長方形に相似で長方形 PV · PL より小長方形 LR だけ「超過」する長方形になる[28]。（3）の場合には，$QV^2$ は PV に等しい幅をもって PL に「添付」されている。ただし，PL, PP′ によってかこまれた長方形に相似で，長方形 PV · PL よりも小長方形 LR だけ「不足」する長方形になる[28]。これから双曲線，楕円にそれぞれ ὑπερβολή，ἔλλειψις という名称が，放物線同様に，アポロニオスによって与えられたのである。これらのラテン語は hyperbola，ellipsis であって，これまた今日でも使用されているものである。

さて，円錐曲線論はギリシア数学でもとりわけ高等部門である。メナイクモスにはじまる円錐曲線論は，アポロニオスに到って絶頂に達した。そのアポロニオスは，今みてきたように，ピュタゴラス学派以来の面積添付の 3 種の名称をそのまま 3 種の円錐曲線の分類に使っている。一方，『原論』第 I 巻はピュタゴラス学派によるといわれているものである[29]。そしてその中には，I. 42，I. 43，I. 44，I. 45 のいわゆる「面積添付」の命題が含まれていることを見てきた。してみると，このように，これら「面積添付」の命題がアポロニオスの円錐曲線論にとって決定的につながっていることを考えれば，I. 45 の第 I 巻における重さは，決して I. 47 に優るとも劣らないと言えるのである。

＊　＊　＊

以上，3 つの根拠を取り上げたが，これによって私は，ユークリッドの『原論』第 I 巻の最終目標が I. 47（ピュタゴラスの定理）どは必ずしも言えないのであって，むしろ，第 II 巻以後の各巻に続いて全体的に 1 つの有機体をなすものであり，むしろその後のギリシア数学の展開の中では，I. 45（面積添付の基本形）が I. 47, 48 と同等あるいはそれ以上の重さをもつものであると主張するものである。

## 文献と注

(1)　そのような表現は次の箇所に見られる。

> It is worth noting that, while I. 47 and its converse conclude Book I as if that Book was designed to lead up to the great proposition of Pythagoras, the last propositions but one of Book II give the generalizations of the same proposition with any triangle substituted for a r ight-angled triangle (T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vols., Oxford, 1921, p. 380)

その邦訳（ただし，Manual 版，Oxford, 1931 (Dover, 1963)），T. L. ヒース『ギリシア数学史 I, II』（平田寛他訳，共立出版，1968），p. 180；中村幸四郎『数学史』（共立出版，1957），pp. 26–27）；中村幸四郎『数学史』（啓林館，1962），p. 16；中村幸四郎「『原論』の解説」（『ユークリッド原論』（中村氏他 3 氏訳，共立出版，1971）所収）；彌永昌吉「ユークリッド—『原論』第 I 巻を中心として—」（数学の歴史 I『ギリシャの数学』（彌永氏他 2 氏著，共立出版，1979）所収），pp. 137– 138, p. 143。

(2)　ハイベルグ版を底本とした（1）の『ユークリッド原論』によるが，公理 4, 5, 6, 9, は含まれていない写本もあるということで，これらは［　］の中に入れられている。大抵の原論の解説書は残りの 5 個だけを公理としている（たとえば，T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vol., 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1926）。しかし，本稿では種々の理由から（たとえば，Á. Szabó，伊東俊太郎氏などの業績を考慮して）9 個で考えた。

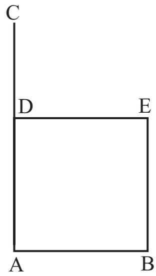
(3)　（1）の T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, pp. 376–378.

(4)　命題 40 だけは書かれたものの中にその適用例を見いだせない。これは今後の課題である。

(5)　（2）の T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclis's Elements* を参考にした。なお，表はそれをまとめたものである。

(6)　訳は（1）の『ユークリッド原論』によった。以下の『原論』からの引用文の訳文についても，特に断らないかぎり，すべて同様である。

(7)　『原論』では概略つぎのようにして証明されている。AB を与えられた




線分とする。AB の端 A で線分 AB に直角に AC をひく（命題 11)。その上に AB に等しく AD をとる（命題 2)。D から AB に平行に DE を，B から AC に平行に BE をひく（命題 31)。そうすれば，ADEB は平行四辺形である。ゆえに AB=DE，AD=BE（命題 34)。ところが AB=AD。したがって BA=AD=DE=EB （公理 1)。ゆえに ADEB は等辺である。つぎに，AD∥AB，AD∥DE だから，∠BAD+∠ADE= 2 直角（命題 29)。そして ∠BAD= 直角。ゆえに ∠ADE= 直角 (公理 3)。ところが ∠ABE= ∠ADE，∠BED= ∠BAD（命題 34)。ゆえに ∠ABE= 直角，∠BED= 直角（公理 1)。したがって ADEB は方形である。よって等辺であり方形である ADEB は正方形である（定義 22)。そしてそれは線分 AB 上に描かれている。

(8)　上掲の注（5)。

(9)　距離空間というのは，ユークリッド空間から「距離」の概念を抽象して定義されたもので（1906 年，M. Frechet の学位論文以来のこと)，次の 3 つの公理を満足する集合 D のことである。すなわち，集合 D の任意の 2 元 $x,\, y$ に対して負でない実数 $d(x,\, y)$ が一意に対応していて，(i) $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$，(ii) $d(x,\, y) = d(y,\, x)$ (iii) 任意の 3 点 $x,\, y,\, x$ に対して，$d(x,\, z) \leqq d(x,\, y) + d(y,\, x)$ という性質をもって定義されるとき，$D$ を「距離空間」という。なお，「距離空間」については『岩波数学辞典』のその項を，また現代解析学におけるその位置づけについては村田全「19–20 世紀の数学」(伊東・原・村田『数学史』(筑摩書房，1975) 所収)。の第 III 部 4–2，4–3 の項を参照。

(10)　X. 54：もし面積が有理線分と第 1. の二項線分とによってかこまれる

ならば，その面積に等しい正方形の辺は二項線分とよばれる無理線分である。

(11)　「面積のあてはめ」，「面積のつけ加え」，「側面添加」とも訳される。

(12)　*Proclus de Lycie, les Commentares sur le Premir Liver des Elements d'Euclide pra P. Ver Eechke* (Bruges, 1948). Proposition XLIV, pp. 356–357. なお, B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, Groningen, 1954（村田全氏との共訳で，みすず書房より近刊），p. 118, p. 123 を参照。

(13)　X. 33：平方において通約できないで，それらの上の正方形の和を有理面積とし，それらによってかこまれる矩形を中項面積とする 2 線分を見いだすこと。

X. 34：平方において通約できないで，それらの上の正方形の和を中項面積とし，それらによってかこまれる矩形を有理面積とする 2 線分を見いだすこと。

(14)　II. 5：もし線分が相等および不等な部分に分けられるならば，不等を部分にかこまれた矩形と 2 つの区点分の間の線分上の正方形との和はもとの線分の半分の上の正方形に等しい。

II. 6：もし線分が 2 等分され，任意の線分がそれと一直線をなして加えられるならば，加えられた線分を含んだ全体と加えられた線分とにかこまれた矩形ともとの線分の半分の上の正方形との和は，もとの線分の半分と加えられた線分とを合わせた線分上の正方形に等しい。

(15)　「幾何学的代数」（geometric algebra）という名称とともに，この概念構成を行ったのはソイテン (Zeuthen) である。

(16)　(1) の T. L. Heath, *A Histrory of Greek Matehamatics*, vol . 1, p. 380. 最近では 6（1）の中村幸四郎「『原論』の解説」の pp. 497–499。

(17)　赤摂也，"原論第 II 巻の原形について"，『科学基礎論研究』Vol. 14, No. 3, 1980 年 1 月。

(18)　*ibid.*, p. 27.

(19)　これらの訳は (12) の B. L. van der Waerden, *Schience Awakening*, pp. 121–122 を参考にした。

(20)　ユークリッドは向かい合った 2 つの頂点で平行四辺形を表す。
(21)　(12) のプロクロスによる。
(22)　定義 I, II (Paul Ver Eecke. *Les coniques ‘apollonius de Perge*, Paris, Blanchard, 1959, pp. 190–191.
(23)　命題 XI（放物線），命題 XII（双曲線），命題 XIII（楕円）(*Ibid.*, pp. 21–31)。
(24)　(12) の van der Waerden, *Science Awakening*, pp. 190–191.
(25)　こ の証明例としては，たとえば，(1) の’T. L. ヒース『ギリシア数学史』II の pp. 288–289 を参照。
(26)　この面積関係は，われわれの数学の記号法によれば，PV= $x$，QV= $y$, PL= $p$ とするとき，放物線を $y^2 = px$ とかくことに対応している。
(27)　上掲の注 (25) を参照。
(28)　今日，双曲線，楕円をそれぞれ $y = px \pm (\frac{p}{d}x^2$ とかくことに対応している。ここで $d$ は $p$ に対応する径（図で）PP$'$ の長さである。
(29)　(12) の van der Waerden, *Science Awakenig*, p. 135.

## Resume


Was the main object of Book I of Euclid’s Elements really the development of the Pythagorean theorem?

Katsuzo SATOH

It is often said that the main object of Book I of Euclid’s *Elements* wa s the development of Proposition I. 47 (the Theorem of Pythagoras). But this cohclusion is subject to question. The writer’s opinion is that Book I was written not for the purpose of proving I. 47 and 48 (the converse of the Pythagorean theorem), but for presenting I. 45 as well. Moreover this volume must be regarded as an appropriate part of the entlre work, the *Elements*. The reasons the writer has arrived at this opinion invdve three points.

The first is connected with the theoretical structure in Book I.

Proposition I.45 (Application of areas) is, for example, independent of the Pythagorean theorem (i. 47) 47) and its proof is more complicated than I. 47's, so far as our examination of the more obvious relationships among the propositions in Book I is concerned.

The second point is the relatio between Book I and the other Books, especially Book II. Specifically, I. 45 is used in Book II and the other Books as often as are I. 47 and 48, , and it plays a role as important as these two.

The third point is connected with the role of I. 45 in the later developments in Greek mathematlcs, especially in the theory of conic sections. In fact, I. 45 as well as I. 47 plays a decisive part in Apollonius' *Conica.*

---

- 佐藤勝造「原論第 I 巻の目標はピュタゴラスの定理であるのか」』（『科学史研究』第２期・第 20 巻、1981 年夏号）所収。
- 著作権者許諾済
- PDF 化には LaTeX 2ε でタイプセッティングを行い、dvipdfmx を使用した。

科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/science/sciencelib.html

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs