

科学図書館ブックレット

九章算術「圭田」考

梅田宗宏著



科学図書館

九章算術「圭田」考

梅田 宗宏

はじめに

この論文は、立教大学理学部数学科教授・村田全先生主催の元に立教大学理学部数学科ゼミナール室で毎月開催された、「数学史研究会」の席上で発表したものを骨子として、立教大学文学部史学科東洋史専攻の教員・卒業生有志によって発行されていた、東洋史関連論文を集めた雑誌（『盈虚集』第四号、一九八七年）に掲載したものである。その後、村田先生から左記のような書簡をいただいた。ここにその書簡を転載する。

このたびは御論文『九章算術「圭田考」』をお贈り頂き、御礼申しあげますと共に、貴兄が（文字通り）漸くその稿を仕上げられた事に、深く喜びを感じました。一読当然の事乍ら、第三節の文章に貴兄の気魄と自信を感じました。うれしい事でした。（昔、六号館の研究会で貴兄をきめつけたやり方に、自ら愧ずる次第です。この上とも頑張って下さい。貴稿、Hist. Sci. 誌に投稿して下さいませんか。同誌Editorとして、依頼します。） 全

一、算經十書

古代の国家は、(ギリシャをほとんど唯一の例外として) 人民から租税を徴収するための必要上、支配階級が実用数学を産み出し、発展させた。古代エジプトでは、主として神官階級が土地を測量し、ピラミッドなどの建造物をつくるための数学——幾何学 (geometry, geo || 土地、|| 計測) を発達させたし、古代、バビロニアにおいてもそうであった。中国もまた例外ではない。殷、周時代はよくわからないが、官僚制の統一国家といってよい漢に至ると、それ以前の数学的知識を集大成した、官僚のための教科書が編纂された。

『漢書』藝文志には、『許商算術』二十六卷、『杜忠算術』十六卷の書名が記されている。許商と杜忠はともに前一世紀後半の人で、杜忠については不詳であるが、許商は役人として土木工事に従事し、水利の功によって大司農となり、また儒教に通じて経学大師にまでなったという。ただ、藝文志に記された上記二著は早く失われて、その内容を今日知ることができないが、いずれにしても、当時の官僚のための初歩的な実用算術の本であったことはまちがいない。

時代が下って隋になると、国子監内に、博士二人、助教二人、学生八十人からなる「算学」なる数学研究機関が設置されたが、唐初にはいったん廃止された。しかし、高宗顯慶元年(六

五六年）には学生三十人を擁する算学館が設立され、教育がおこなわれていたが、この算学館もわずか三年たらずで廃止され、博士以下の人員は太史局に吸収された。だが、龍朔二年（六六二年）にはふたたび国子監内に「算学」が設立された。ただし学生の数は十名に減らされた。

国子監内に「算学」が設立されると同時に、科挙の試験に「明算科」が新設された。この明算科の試験科目は『新唐書』選挙志によれば、

凡算学、録大義本條爲問答、明数造術、詳明術理、然後爲通。試九章三條、海島、孫子、五曹、張邱建、夏侯陽、周髀、五經算各一條、十通六、記遺、三等数帖讀十得九、爲第。試綴術、緝古大義爲問答者、明数造術、詳明術理、無注者合数造術、不失義理、然後爲通、綴術七條、輯古三條十通六、記遺、三等数帖讀十得九、爲第。落經者雖通六不第。

であった。こうして選抜された学生には、主として李淳風らが注釈を付けた『十部算經』（周髀算經、九章算術、海島算經、孫子算經、張邱建算經、五曹算經、五經算術、輯古算術、夏侯陽算經、および綴術）が教科書として使用された。このうち『綴術』は、南宋の太史令になった祖冲之（四二九―五〇〇年）の著作で今は失われており、その内容は、『宋書』曆志、『隋書』律曆志、經籍志、『九章算術』中の李淳風の注などで断片的にしか知ることができないが、円周率の計算法を始めとする高度な内容が論じられていたものと思われる。

それ以外の九種のテキストのうち、『周髀算經』は、数学書というよりはむしろ宇宙の構造を論じた天文書と言ふべきもので、前漢に成立したものと考えられている。『九章算術』は、前漢から後漢にかけて編纂された数学書で詳しくは後述するが、小倉金之助は、

「『九章算術』は支那の基本的数学書であつた。その中には優秀なる数学的方法を含んでゐた。若し之をギリシヤに比するなら、幾何学と数論とに於てはギリシヤに劣るけれども、算術と代数に於ては——或る意味においては——デオファントス（二七五年頃）以前のギリシヤを凌駕してゐると、私は確信するものである。」⁽¹⁾

と、述べているほど中国の数学を考える上で重要な著作である。『海島算經』は、ピタゴラスの定理を応用した測量を扱う小著である。『孫子算經』は、百五減算と呼ばれる不定方程式の解法を述べたものとして有名なものであるが、兵法家の孫子とは関係なく、四〇〇年頃成立した数学書である。『張邱建算經』は四七〇年頃張邱建によって編纂されたもので、百鷄問題（不定方程式を解く）が含まれているので有名である。『五曹算經』は、田曹、兵曹、集曹、倉曹、金曹の五卷からなる地方役人のための算術書である。ちなみに「曹」とは晋と北魏に置かれていた役所のことであるから、遅くとも四世紀末には成立したものであろう。『五經算術』は北周の甄鸞が『易經』『詩經』『論語』などの儒教經典中にみられる数学や曆法に關した文章に注釈をつけたものである。『輯古算經』は唐高宗の時代に王孝通が著したもので、内容的

には『九章算術』を凌駕するものではない。『夏侯陽算經』は、四世紀頃夏侯陽が著したものだ。唐代になってもと一巻本が増補され三巻になったといわれている。『孫子算經』と類似の問題もみられ、特筆すべきものもない。

総じて『九章算術』以外は、「或は初歩的な、或は部分的な、或は補充的なものであるとも見做し得よう」^(三)。

宋元豊七年（一〇八四年）には、秘書省が「綴術」を欠く『十部算經』を官僚のためのテキストとして刊行したが、清初になるとこの『十部算經』は全部亡失してしまい、わずかに南宋鮑澣之が刻した『周髀算經』『孫子算經』『張邱建算經』『五曹算經』『輯古算經』『夏侯陽算經』の六部と『九章算術』中の五巻のみが残存していた。清乾隆三十七年（一七七二年）、四庫全書館が開かれ、前記六部に『永樂大典』から『九章算術』『海島算經』『五經算術』の三種を録出し、有名な考証学者戴震の校訂により『四庫全書』の底本を作った。また曲阜の孔繼涵は、戴震の校訂稿に『數術記遺』と戴震の「策算」「句股割圓記」を付して『算經十書』として刊行した。その後、これが広く普及し多くの翻刻本が刊行された。

現行の『算經十書』は、『周髀算經』『九章算術』『海島算經』『孫子算經』『張邱建算經』『五曹算經』『五經算術』『輯古算經』の八種に付録として甌鸞の『數術記遺』と韓廷の『夏侯陽算經』を付したものである。^(四)

このように、『算経十書』は、漢初から唐末に至る約一千年にわたる中国数学の集大成ともいふべきもので、その徹頭徹尾実用に則した内容は、今日の論理を主体とする西洋数学（もちろんギリシヤ数学を起源とする）の目からみれば、「シナ数学が何らかの意味での理論的数学として自立しているわけではなく」「インド数学ほどではないにしても、曆学などの分離も十分にはできていない」「現実一辺到の数学」^(五)であるといえる。しかしこのことは逆に「一般的に数学問題の大多数は、故意に事実を歪曲して作り上げられたものでなく、世間並のことを、無意識的に採用したのも多いであろう」から、「数学書中に含まれた社会的資料が、若し適当に分析され、総合されるならば、意識的に歪曲された歴史よりも、或いは却って真相に近く触れ得ないとも限らないかも知れないのである」^(六)とも言えよう。

二、九章算術

『九章算術』はその題名から明らかのように、全体で九章からなり、二四六個の問題とその解答を収める。第一章の方田（三八問）は、主として田地の面積計算を取り扱う。ここで注目すべきは長さの単位が周制（一步 \parallel 六尺、一里 \parallel 三〇〇歩、一畝 \parallel 二四〇平方歩、一頃 \parallel 一〇〇畝）によっていることである。次の粟米（四六問）は主として穀物相互の交換を対象とした問題を取り扱う。第三章の衰分は按分比例問題を取り扱う。第四章少広（二四問）は

方田の逆の問題を扱う。つまり面積を与えて辺の長さを求めるものである。次の商功（二八問）は土木工事に関した問題である。水路の体積の計算のみならず、労働者一人のノルマを与えて工事に要する日数の計算など極めて実用的であるのが注目される。つぎの均輸（二八問）は劉徽の注に「以御遠近勞費」とあるように、租税として徴収した穀物の運搬時に起こる問題を扱う。道程の遠近・戸数の多少に応じて平等に粟と輸送用の車の数を割り当てるための計算法を述べており、古代専制国家の一面がうかがえる。第七章盈不足（二〇問）は、「今有共買物、人出八、盈三、人出七、不足四。問人数、物価各幾何」という第一問でも分かるように、通常過不足算と言われるものである。つぎの方程章（一八問）は二元または三元の一次連立方程式で解かれる問題である。今日の「方程式」という言葉がこの『九章算術』の方程章に由来するのは言うまでもない。最後の句股章（二四問）は、ピタゴラスの定理を応用した測量問題を扱う。

『九章算術』全九章の問題を通覧して明らかかなことは、その徹底した実用性である。数字にはわずかの例外を除いて必ず単位がついており、ピタゴラスの定理すらその証明は与えられておらず、あたかも自明であるかのように取扱われている。ギリシャに由来する論証を中心とする西洋数学との決定的な違いがここにある。極論すれば、中国の数学は「学」ではなく、あくまでも実用と結び付く問題を解決する計算技術と言えよう。

三、「圭田」は二等辺三角形か

『九章算術』第一章方田三八問すべてが、方田の面積計算にあてられているわけではなく、問題五から一八までは分数の約分や通分の計算にあてられている。これは、これ以後の問題に分数を含むためにその準備とみなされよう。これ以外は種々の図形の面積計算にあてられているが、図形の名称も方田、円田といった一見して分かるもののほかに、邪田、宛田といったその字面からは不明のものもある。小倉金之助はこれらの図形について次のように言っている。^七

『九章算術』は、何よりも先ず初めに、田地の面積の求め方——「方田」の一章に始まる。そこでは、方田（正方形）、直田（矩形）、圭田（二等邊三角形）、邪田（梯形）のやうな多角形と、圓田（圓）、弧田（一つの弦で截られた圓の一部分）、環田（同心圓の間の面積）のやうな形の面積の計算法が與へられる。

小倉はここでは箕田、宛田にはふれていないが、その理由は不明である。

小倉と並んで早くから日本・中国の数学史の研究を続けてきた大矢真一は、初期には圭田を小倉と同じく二等辺三角形と解釈していた。すなわち昭和三九年刊行の『事項別比較数学史』（富士短期大学出版部）の中で、次のように記している。^八

いま「方田」の章に記された図形の種類を挙げてみるとおよそ次のようである。

方田 長方形…

圭田 二等辺三角形…

邪田 台形…

箕田 邪田を二つ合わせた形…

円田 円…

宛田 球面の一部…

弧田 弓形…

環田 蛇の目形…

しかし、後年大矢は「 \triangle 圭」は後世では二等辺三角形をさすが、ここでは直角三角形であると考えられる」と^(五)直角三角形説をとなえるに至るが、その根拠は示していない。

小倉、大矢の図形解釈を一覧してただちに気がつくことは、方田の解釈であろう。小倉は「正方形」とし、大矢は「長方形」としていることである。この両者のどちらが正しいかについては、いまは問題にしないでおこう。ここで問題にしたいのは、「圭田」である。「圭田」は、はたして二等辺三角形あるいは直角三角形に限定されるのであろうか。前述したような『九章算術』の実用的性格を考えると、このように限定的に解釈するのは危険であろう。もちろん「圭田」を単なる三角形と解釈する説もある。李儼は「圭田」を一般的な三角形で^(六)示

しているし、川原秀城は『九章算術』の翻訳中で「圭田（三角形の田）」としている。^(二二)しかし、その根拠は必ずしもはっきりしてはいない。

このように、圭田の解釈にゆれがあるのは、「方田」章中に圭田に関する問題が二条しかないことに由来するのである。

今、その条文を引用しておこう。

〔二五〕今有圭田廣十二歩、正從二十一歩、問爲田幾何。

答曰、一百二十六歩。

〔二六〕又有圭田廣五歩、二分歩之一、從八歩、三分歩之二。問爲田幾何。

答曰、二十三歩、六分歩之五。

術曰、半廣以乘正從。

一見すると、第一の問題は整数を扱い、第二の問題は分数を取扱っているだけのように見える。事実、二種類ある『九章算術』の邦訳のうち、川原は、この二つを同じスタイルで翻訳している。すなわち、

【25】いま広さ十二歩、高さ二十一歩の圭田（三角形の田）がある。問う、田の面積はいくらか。

答、百二十六平方歩。

【26】また広さ五歩と二分の一步、高さ八歩と三分の二歩の圭田がある、問う、田の面積はいくらか。

答、二十三平方歩と六分の五平方歩。

〈計算法〉広さを半分にし、^(二二)高さに掛ける。

だが、原文では第一問には「正従」とあり、第二問では「従」としか書かれていない点に注目する必要がある。もちろん、術に「半廣以乘正従」とあることから、第二問は「正」の字が脱落したと考える立場もありうる。大矢はこの立場から「いま圭田がある。広は五歩二分の一、(正)縦は八歩三分の二である。面積はいくらか。」^(二三)と第二問に「正」の字を補って翻訳している。しかも圭田を图示して直角三角形の底辺を広、これに垂直な辺を正従としている。ところで、「正従」は圭田の条にだけ出現するわけではない。圭田の次の問題である邪田にも、箕田にも現れ、しかもここだけに限られる。それぞれ各二問つづある問題は次のようになっている。

〔二七〕今有邪田、一頭廣三十歩、一頭廣四十二歩、正従六十四歩、問爲田幾何。

答曰、九畝一百四十四歩。

〔二八〕又有邪田、正廣六十五歩、一畔従一百歩、一畔従七十二歩、問爲田幾何。

答曰、二十三畝七十歩。

術曰、并兩邪而半之、以乘正從若廣。又可半正從若廣、以乘并、畝法而一。

〔三九〕今有箕田、舌廣二十步、踵廣五步、正從三十步、問爲田幾何。

答曰、一畝一百三十五步。

〔三〇〕又有箕田、舌廣一百一十七步、踵廣五十步、正從一百三十五步、問爲田幾何。

答曰、四十六畝二百三十二步半。

術曰、并踵舌而半之、以乘正從、畝法而一。

この文から邪田は台形を意味することがわかる。上底が三十歩、下底が四十二歩、高さが六十四歩の台形である。ところで、なぜ台形を邪田というのであろうか。一般に台形は上下の平行な辺を結ぶ左右の辺が、斜めになっているものである。邪と斜とは通じるから、この斜めの辺を持つ田を邪田と呼んだことはまちがいない。とすれば、この場合の高さは四辺のどれでもなく、平行な辺のある一点から他の辺に垂線を引いた長さと考えざるをえないであろう。このことは、方田に関する問題（十問ある）ではすべて「正從」ではなく、「從」が使用されていることから、証明される。「方田」章の最初の問題と解法は、

〔一〕今有田廣十五步、從十六步。問爲田幾何。

方田術曰、廣從步數相乘得積步。

となっている。

正方形あるいは長方形の田では縦と横の線は直角をなすから、この二辺の長さを測量し掛け合わせれば直ちに面積が計算できる。ところが、台形（邪田）では、四辺の長さを計ってもそれだけでは、面積の計算ができない。上底と下底を加えて半分にした長さに斜辺の長さを掛けても面積がでるわけではない。どうしても正しい高さ（正従）をべつに測定する必要がある。すなわち実用的見地からは余分な一工程が必要になるわけである。

邪田には「正廣」なる用語も使われているが、これは、台形を九〇度回転させた図形を考えてみれば、「正従」に対応することがわかる。

また、箕田はその文意から上底が下底より大きい、丁度邪田を一八〇度回転させた図形であることは明らかである。以上のことから、「正従」（「正廣」も同じ）は、与えられた図形の辺の長さではなく、底辺から垂直に引いた仮想的な辺の長さを表すことが分かる。してみると、第一の問題に見られる「圭田」は、「正従」という言葉が使われていることから直角三角形ではなく、一般の三角形を表すことになり、第二の問題の「圭田」は単に「従」と記されているから大矢の言う直角三角形に当たるといえる。いずれにしても「圭田」を二等辺三角形と狭く解釈することは、「圭」の字義に捕らわれすぎたものといわねばならないし、川原のように「正従」と「従」を区別することなく「高さ」と訳すのは、不十分といわねばならないであろう。

『九章算術』は、漢代の官僚のための教科書であったことはすでに述べた。しかも、ギリシャの幾何学のように論理的思考訓練を目的とするものではなく、あくまでも実用的なものであったことに留意しなければならないだろう。下級役人の測量する土地が都合よく直角三角形や二等辺三角形ばかりであるはずがないのである。「圭田」をこのように狭く解釈するのは、『九章算術』の実用的性格を無視した議論といえよう。

漢以後元に至るまで「圭田」概念に変化はなかったが、大徳三年（一二九九）に刊行された朱世傑の『算學啓蒙』では、「圭田」は明確に二等辺三角形に限定されて使われている。ここでは、直角三角形は「勾股田」と呼ばれ、不等辺三角形は「三斜田」と呼ばれているのである。さらに、『九章算術』にある環田（円の中央から小円を切り取った形）のほかに、『算學啓蒙』では、円の中央から正方形を切り取った銭田、正方形から円を切り取った形（方形内円池）、正八角形（八角田）なども挙げられている。これらはいずれも計算上は特に分ける必要もないものだが、こうした「もつとも基本的なパターンから、さまざまに変形パターンへと展開してゆく」^(二五)やりかたは中国人に特有のものであろう。

一般的な三角形としての「圭田」概念が、時代が下るにつれて三つのパターンとして細分化されるのは、『神農本草經』に始まり、李時珍の『本草綱目』に至る膨大な薬草の分類努力、あるいはまた、熱とか脈とかいった表面的な現象をパターン化して処方を決める『傷寒論』

『金匱要略』に始まる漢方と一脈あい通じるものもあるのではないだろうか。

- (一) 『九章算術』の成立時期については諸説があるが、川原秀城の考証によれば、紀元前百年から後百年の二百年間に編纂補修され成立したという。(川原秀城『九章算術』解説、『科学の名著2 中国天文学・数学集』朝日出版社) 五三頁
- (二) 小倉金之助「支那数学の社会性——九章算術を通じて見たる秦漢時代の社会状態——」(『数学史研究』第一輯) 一九二頁
- (三) 同右(一九二頁)
- (四) たとえば、錢寶琮校点『算経十書』中華書局(一九六三)。本論に引用した『九章算術』原文はこれによる。
- (五) 村田全『日本の数学西洋の数学——比較数学史の試み』(中公新書六一、中央公論社) 九〇頁
- (六) 小倉金之助、前掲書、一八九頁
- (七) 小倉金之助、前掲書、一九三頁
- (八) 一一二—一一三頁
- (九) 『世界の名著 続1 中国の科学』(中央公論社、一九六五年) 一〇二頁
- (一〇) 李巖、杜石然著『中国古代数学簡史』(商務印書館、一九七六) 四九頁。ただし「方田」は正方形としている。
- (一一) 川原秀城、前掲書、九一頁。ただし、圭田に対する注の中では、「圭田とは圭上部の二等辺三角形を基本とする三角形の田をいうことがわかる」としており、必ずしも一般的な三角形であるとは言っていない。
- (一二) 川原秀城、前掲書、九一頁。
- (一三) 『世界の名著 続1 中国の科学』一〇一頁。
- (一四) 「圭とは土を二つ書いて三角形に高く盛り土したさまを示す。のち三角型にとがったものを圭と称する。土圭とはもと△型の盛り土によって、日影の長さを計った日時計で、のち盛り土を木の柱にかえた。」(藤堂明保『漢字と文化』徳間書店) 二二三頁。

(二五) 山田慶児「パターン・認識・制作」(広重徹編『科学史のすすめ』筑摩書房、一九七〇) 九八頁

(一九八七年)

- 「九章算術『圭田』考」(『盈虚集』第四号、一九八七年、立教大学東洋史同学会会誌) 所収。
- PDF化には`LaTeX2 ϵ` でタイプセッティングを行い、`dvipdfmx`を使用した。

科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」

<http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/science/sciencel1b.html>

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内、その他「科学図書館」に関する意見などは、「科学図書館掲示板」

<http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs>