イデオロギーの発生（数学）

小倉金之助

はしがき

高度の抽象性と不変性とによって特色付けられている数学も、すべての科学のように、その根底に於(おい)ては、生産力、技術及び経済の発展段階によって決定される。これ等は、直接には、数学に新問題を提供し、間接には、それによって制約された他の上層建築――自然科学及び社会科学、社会的意識形態を通じて、数学に影響を及ぼして来る。これ等の関聯(かんれん)は、或る程度に於(おい)て可逆的でもあり、それ等の間の相互関係は複雑を極めて居(い)る。

この小篇は、本講座――〔岩波講座「哲学」〕――に於(おい)て既に発表された、畏友岡邦雄氏の「イデオロギーの発生（自然科学）」の姉妹篇として、上の制約・関聯(かんれん)状態の一斑を、数学の発達史に就(つ)いて、具体的に考察するを目的とする。

然(しか)しながら、このプログラムを具体的に而(しか)も系統的に遂行することは、極めて困難なる課題である。

不敏なる私が、十分なる調査研究をなし得ずに、而(しか)も短日月の間に書き上げた本篇の如(ごと)きは、単に此

課題に対する試作の一に過ぎないのであり、それは如何なる意味に於ても、「哲学講座」の名に値するものではない。切に読者の示教と批判を御願い致したいと思う。

殊に、ヨーロッパ数学は兎に角、アジア的数学に就いての吾々の課題は、今後の研究に待つべきものであろう。少くとも現在の私に取っては――実はこの題目こそ、目下私の関心の焦点となって居るのであるが――、その系統的叙述は、殆んど全く不可能のことに属する。それ故に、この小篇に於ては、考察の範囲をヨーロッパに止めた。（しかしインド及びアラビアの数学は、ヨーロッパ数学を理解する上に、絶対的に必要なので、已むを得ず、極めて形式的な・不十分な形に於て、本文中に挿入することにした。）

一　古代数学の発生と其の成熟

数学は、何を条件として、如何なる形に於て、発生したか？　次のエンゲルスの要約は、全面的に之に答えている。

「第一に星学。――季節を知るために、既に遊牧民や農業種族にとって絶対的に必要であった。星学は数学の助力を待ってのみ発達することが出来る。それ故に数学も同じく始まっていた訳である。更に農業の或る段階に於て、また或る地方に於て（エジプトに於ける灌漑のための水揚げ）また殊に都市や大建築の発生及び産業に伴って力学。間もなく航海及び戦争に取っても必要となる。力学もまた数学の助力を必要とし、かくてそれの発展を促す。かくの如く、既に最初

から諸科学の発生と発展とは生産をその條件としている。

本来の科学的研究は、古代全体に亙って、この三部門に限られていた。」

しかしながら、系統的なる学としての数学は、ギリシアに始まる。(二)

(二) ［さればとてギリシア以前の数学が過小視されてはならない。近年の研究は、独りエジプト数学のみならず、バビロン数学の意外に発達せるものなるを明かにした。此等の点に就ては O. Neugebaur, Vorgriechische Mathematik, (1934) を見よ］。

ギリシア

ギリシアの数学は、ソロンの立法時代——農業の胎中より発生し来たった支配的貴族が、商工業及び植民地の発達につれて起った新興商工階級によって代らるる時代——に前後して、商業及び手工業の中心たる植民地から生れた。氏族の定住性の破壊、異民族の生活の見聞、伝統的因襲からの脱却。豊なる富と奴隷制とによって餘裕を得たる自由民の精神生活は、ここに自然哲学となって顕れた。

自然哲学期に於て、ターレス（紀元前約六〇〇年）はエジプトの幾何学——土地を測量するための術、面積と体積の測定を主とせる実用幾何——を抽象・整理して、直線と角の幾何学の系統化への歩を進めた。ピタゴラス学徒は面積の幾何学、正多角形、正多面体等の研究をも好んだが、計算術と分離した数論の上に、特に大なる興味を持ったのである。彼等は空間的諸形体に於て、また物質界の諸現象に於て、数を規準的のものとした。物体の常住的なる概念的秩序を認識し、その最後の根底を数的関係に於て見出そうと企てたのであった。

ペルシヤ戦争の勝利から、アテネは商工業の中心として、文化の中心として飛躍し始めた。「市民の術」を職業的に教授するソフィストの時代が来た。ヒポクラテス（紀元前約四三〇年）が『幾何学教科書』を著わした頃には、幾何学は一通り整理され、系統付けられたのであろう。そして所謂「幾何学の三大問題」に関する研究から、方法論上の論争となり、やがて（プラトンによる）ギリシア数学の意義と方法の全面的規定を立する動機を作るに至った。

彼等の時代には、直線と円以外の曲線を用いて、所謂三大問題が解かれた。其問題の一なる円の平方化に関するアンチフォンの積盡法は、多くの数学者及び哲学者の批判を招いたのである。批判者に従えば、直線をして、円周又は其一部分と一致させることは、絶対に不可能であると。即ち量の無限分割性の問題が提出されたのである。ソフィストこそ数学方法論の上に新なる展望を開き、或る意味に於ては、近世数学の先駆者とも見做し得べき人々であった。

これ等の難点――無限小及び無限大の問題――を幾何学から放逐して、確乎たる形式論理の上に、数学の基礎を建設せんとしたのはプラトン（紀元前約三八〇年）であった。そこにプラトンの大なる貢献があると同時に、そこには数学の意義・範囲及び方法を、餘りに狭く限定せる所の、観念論的反動性があったのである。

吾々はプラトン及び数学上に於ける彼の後継者の思想の特徴を挙げて、ギリシア数学のイデオロギーを窺うことにする。「ギリシア人は数学に対して、どんな特殊の態度を取ったのか？　この問に対して吾々は、数学に於ける彼等の天才は、哲学に於ける彼等の天才のただ一面に過ぎないのだ、と答えよう。彼等の数学は……彼等の哲学の大部分を形成している。この両者は同じ起源を持つので

ある。」（ヒース）

彼等は先ず数学を、純理数学と応用数学とに区別した。ここに純理数学とは数論(arithmetica)と幾何学であり、応用数学とは計算術(logistica)、広義の測地術（一般に面積及体積の測定を含む）、力学、光学、音学、天文学等であった。

さて彼等の所謂計算術は、整数の加減乗除及び分数の計算法と応用問題（例えば羊や林檎の分配、等々）を含み、方法こそ異れ、その内容に於ては、現代の初等的算術の一部分をなすものである。之に反して、数論はピタゴラス風に幾何学と関聯したものであり、従って其証明も幾何学的であった。ソフィストの間には計算術が相当に注意されたが、プラトン等は純粋なる数論のみを重要視して、実践的なる計算術を蔑視したのであった。彼等に従えば、先ず「計算術は数論と何等の関係を持たぬもの」であった。そして「算術（数論）は知識のために学ばるべきで、商売に利用するなどのような、何等か実際的な目的のために学ばるべきではない」。更に言う、「計算術は数えられた事物を取扱う学問であって、数を取扱う学問ではないのだ。それは、本質に於て、数を論じないのである」。之に反して、「数論なる真の科学は、行動には無関係である。其目的は知識にある」。

奴隷制によって発達し得た、商業及び手工業の都市に於て、プラトンは支配階級、寧ろ反動的貴族のイデオロギーを代表している。而も観念論の勝利の結果として、吾々は何を見出すか？

計算術が、数論から分離され、「小児らしい野鄙なもの」と見做された時、そこには殆んど進歩の跡を見なかった。計算は、多くは、極めて幼稚なる算盤——日本の算盤の如き便利なものと同視する

勿れ——によって行われた。筆算も行われはしたが、それは極めて不便であった。それはエジプトに於けると同様に、位取りの規則を持たぬ記数法によるものであり、或る意味に於ては、バビロンのそれに劣っている。事実、ソロン時代に使用されたアチック（数形容詞の頭文字）による数字の表示から、アルファベットによる数字の表示に変った如きは、異常なる退歩というべきである。

計算術が兎に角進歩の傾向を示したのは、アルキメデス（紀元前約二二五年）からであった。数論はピタゴラス学派以来研究されたが、ギリシア人の所謂数論とは整数の研究を意味する。簡単な、そしてよく整頓した科学を要望した彼等は、数の諸性質の中から、簡単なもの、美なるもの、調和的なるものを選択したのであった。（この意味に於て、ギリシアの数学者は直観的(二)であったと云い得る。）この原則から、次の如きものが選ばれ、また分類されたのである。——奇数、偶数。完全数、過剰数、不足数。親和数。三角数、四角数、等々。比及び比例の細い分類。

（二）この意味に於ける直観を、これより後「ギリシア的直観」と呼ぼう。

かくて無理数は発見されながらも、それは数の分類には入らなかった。それは「見えざるもの」であり、「言われぬもの」であった。ユークリッドの比例論に於てさえも、無理数は通約されない二直線の比の中に暗示されたのみであった。

算術に対するプラトンの観念論的態度は、幾何学に対しても亦同様であった。プラトンにあっては、幾何学は実在せる図形を研究するものではなく、図形のイデーを考察する学問であった。作図題

の理論こそ、ギリシア数学に於ける指導原理の完全なる典型であろう。

幾何学的作図とは何か？　バビロン人やエジプト人にありては、それは実際の器具によっての具体的作図を意味した。ギリシアに於ても、唯物論者デモクリトスは、大なる誇りを以て、「平面図形の作図にかけては、誰も――エジプトの所謂「縄張り」（測量師）でさえも――私を凌ぐものはない」と語っている。

併しながらプラトン等、大多数の数学者は、之と対立した。彼等に従えば、作図とは、或る図形の存在を規定し或は承認するための、純理的な作用であった。（例えば立体幾何学の作図を見よ。それは理論的には図形の存在を規定するが、併し実際の事実上、多くは何等の作図をも、具体的には遂行し得ざるナンセンスに終っている。）

定木とコンパスなる語は、器具を意味するのではなく、それぞれ、二点を過ぎる直線、一点を中心とし一定の半径を有つ円周の代名詞であった。そして彼等は幾何学的作図に於て、定木とコンパス以外の器具――曲線の象徴としての――の使用を許さなかったのである。それは何故であったか？

彼等に取っては、図形を具体的に出来るだけ正確に作図することなどは、問題ではなかった。従って此点から見て、定木とコンパスとが選ばれたのではなかった。また直線と円とは、最も簡単な図形であり、従ってギリシア人好みの「簡単」には適したことは、事実である。――ピタゴラスは、「平面図形の中で円が最も美しい」と述べている。然しながら彼等が他の曲線を幾何学的曲線と呼ばずに、機械的曲線と呼んだこと、及び他の曲線の助けを藉りる作図を幾何学的方法と呼ばずに、特に之を区別して、機械法と呼んだことに注目せよ。而も「その様な機械法は」とプラトンは断定した、

「幾何学の美点を放棄し破壊するものなのだ。それは幾何学を、永遠無窮の思想の幻影として向上せしめず、却(かえ)って之を再び感覚の世界に引き戻すから」。

　実に奴隷制度によって維持されていたギリシアの支配階級は、生産的技術が奴隷の仕事に属するが故に、従(したが)って生産器具そのものまでも蔑視したのであった。「機械学或(あるい)は工学……の建設に最初苦心したものは、エウドクソスとアルキタスの二数学者であった。彼等は……抽象的原理のみによっては、到底一般人に理解し得ないような問題を、若干の機械によって実験的に示したのであった。しかるにプラトンは起って憤然この種の実験機械学を攻撃して述べた。それは抽象的にして精神的なる幾何学原理に、粗俗なる形体を与えるものであり、多大なる手工を要して、下劣なる商品と堕落させるものであると。それより以来、機械学（工学）は幾何学と分離し、久しく哲学者に侮蔑せられ、遂に兵学の一部門となった。」（プルタルク）

　実にギリシア幾何学に於(お)ける作図理論は、奴隷制度の上に立つ支配階級の心理によって規定されたのであった。而(しか)も此規定のために、ギリシアの幾何学は無用に狭隘なる範囲に其(その)対象を限定せられ、曲線論は十分延びるを得なかったのである。

　次にギリシア幾何学の特殊性の一つとして、吾々は度量的事項の欠如(けつじょ)を挙げねばならぬ。ユークリッドの『エレメント』に於(おい)てさえ、円の面積に関する測定的定理を欠(か)いている。円周率の如(ごと)きは記載さえもない。

　それは何から来たのか？　幾何学から一切の計算を除き去ったのは、この「高尚な科学」が、測量術に堕落するを恐れたからであろうが、その動機はソフィスト等の論争から来たのであろう。——直

線が曲線の長さに等しいことはない、円周の長さに等しい直線などは存在しない、曲線の面積は正方形の面積と比較し得ない、等々。然らば曲線例えば円周の長さの如きは、測定し得ないものなのか？

この矛盾は、当時の形式論理のみによっては、解き得ない問題であった。さればこそプラトン等は後退した。そして彼等は、この問題を幾何学から放逐したのであった。アリストテレスは述べている、「幾何学的量に関する真理は、算術のような、幾何学以外の何物によっても、証明は出来ないのだ」と。

しかしながら、無限大或は無限小に関する問題を度外視するとしても、何等かの方法によって、幾何学的量を計算するにあらざれば、幾何学が前進する筈はないのである。事実、ギリシアの幾何学者は、所謂「幾何学計算法」を使用して居たのであり、それは初等代数の計算に殆んど対応する所の、幾何学的作図であった。而も之に対するプラトンの態度を見よ。

「より適切な言葉がないために、幾何学者は、加えるとか、平方するとか、宛も何者かが何事かをなすかのような言葉を、已むを得ず用いなければならないのであるが、それは幾何学の本質ではないのである。……作図する、加える、平方する、等々のプロセスは、幾何学の本質でないのみか、正にその反対者である。」

彼等は算術（特に代数）の如き媒介物（一般的計算法）を避けた。この意味に於て、彼等は「ギリシア的に」直観的であった。そして其方法は演繹的なる形式論理に限られた。彼等は媒介物を要する（代数的なる）綜合的方法を好まなかった。さればこそ彼等は、「事実を認識はしたが、事実を創造はしなかった」のである。

大ギリシア

やがて吾々はヘレニズムの時代に入る。インドから地中海の西岸にまで達する貿易路に当る都市は、急激に商工業及び文化の中心地となった。技術は発達し、奴隷の手によって、壮大なる建築、道路、運河が造らるると同時に、ギリシア的生活と東洋的生活との混合を見るに至った。政治上に於ては、「都市に於ける富んだ住民層の自治と、純粋に東洋的な国王の専制力とが融合した」。かくてアレキサンドリアを中心とせる、特殊科学の博識と発展とが顕れた。〔エジプト及びバビロンの数学的遺産が、ギリシア数学と混淆・融和され始めた。〕

伝統的ギリシア数学の完成者として、そこには、ユークリッド及びアポロニウスが立っている。ユークリッドが先人の材料を蒐集・統一して、彼の『エレメント』に於て示した幾何学と数論とは、プラトン的イデーの最も完成せる数学的典型であった。アポロニウスの『円錐曲線論』も、多くの独創を含むとは云え、また此系統に属するものと云えよう。

併しながら、今やアレキサンドリアの商業を基礎として、工業技術が漸く進展し、科学は単なる思索から実験的性質を帯べるものへと推移しつつある。数学は今やプラトン的なる純粋性・抽象性の代りに、応用性・具体性を帯びつつ進展したのであった。

そこには天才的なる技術家、発明家として、アルキメデスが立っている。数学者としてのアルキメデスは、ユークリッドの如き形式的論理機構の完成よりも、寧ろ最善の努力を度量的計算の方面に注いだ。アルキメデスこそ、度量に関するプラトン等の消極的態度を克服し、無限分割の問題を統一

した最初の人であった。

アルキメデスは曲線と直線の比較、等々に就(つ)いての疑問を蹈(ふ)み越えた。彼は円周の長さに等しい直線の存在を仮定し、その基礎の上に、相当に精密なる円周率の近似値を計算した。彼は素朴的ながらも、微積分的の方法を使用して、種々の曲線の面積、曲面の体積等に関する、価値高い発見を行(おこな)った。

アルキメデスの微積分の概念は、その起源をデモクリトス及びエウドクソスに負うものである。唯物論者デモクリトスが、円錐体を無限に薄い平行板の集合と見做(みな)しての考察方法は、近代に於(お)けるカヴァリエリの原則と殆(ほと)んど同一のものであったのである。

而(しか)もアルキメデスは、如何(いか)にして此価値高い結果に到達したのか？　彼は自ら彼の『方法論』に於(お)いて語っている。彼は面積及び体積に関する数個の定理をば、最初は、重さの実測によって見出したのであった。証明は後に求めたのである。そして彼は『方法論』の中で、定理の真なるを示唆するに足る方法と、幾何学的方法による厳密な証明との間に、区別を置くべきことを告げている。

アルキメデスは計算術の上にも、力学の上にも、大なる貢献を与えた。論理と直観とが、算術と幾何学とが、理論と応用とが、彼の天才によって融合され統一された。

今やアレキサンドリアの商工業を反映して、計算術及び測地術が進展を始めた。科学は益々(ますます)実験的に進み、天文観測も精密の度を加えて来た。ヒッパルコスは天文学の必要から、三角法の基礎を作った。発明家ヘロンは測量術に貢献する所多く、専門の実用数学者であった。プトレマイオスに至っては大なる天文学者として、三角法の進展に資する所多かった。かくてヘレニズム時代の数学

は、プラトン的色彩を失いつつ、実用化して行った。そして幾何学上の集成者たるパップスと、代数学者ディオファントス（紀元約三〇〇年）を最後として、頽廃時代に入る。

ディオファントスの学術的系図は、数学史家の疑問の裡にある。(二) 彼の『アリスメティカ』は、その書名こそ数論であれ、その方法に於て、その内容に於て、餘りにもユークリッド時代の数論とは異るものである。それは幾何学と関聯を持たず、幾何学的計算法によらざる、数の計算によって取扱われる。「ディオファントスのアリスメティカは、疑もなく、計算術に属する。」（ヒース）

（二）この疑問は、新史料の発見を待たなければ解決し得られないであろう。通説として採用もされず、空想が多分に加わってはいるが、ディオファントスに及ぼせるインド数学の影響に就いて想像する人々もないではない。

そこには、不完全ながらも、記号的に取扱われた代数があった。不定解析の如き整数論が、異常の展開を見せたのであった。或る程度まで進展せる計算の技巧を使用してこそ、数論も此程度まで飛躍し得たのである。吾々は再び茲に、算術に関するプラトン的規定の克服を見る。

ローマ

ローマ人は、純粋の数学理論に対して、殆んど興味を持たなかった。ギリシアにあっては、奴隷制あるがために、自由民は思索の餘裕を得たのであったが、ローマにあっては事情を異にする。ローマ人は、新しく征服した地方から、巨額の富を得たのみならず、その主人よりも知識の程度高い奴隷をも求める機会を得たのであった。それ故に学者の仕事や政治すら、奴隷に任せて、自ら関せざる状態

にあった。専制的抑圧の下に、自然科学者は奴隷的に駆使された。

かかる事情の下に於て、ローマの算術は、生活に直接必要ある算盤の改良、(一) 度量衡の計算に便利なる十二進法の分数、等々の実用方面に於て進展を見せた。実験的規則を測量に応用せる、一種の技術的実用幾何の成立は、実に低廉にして夥しい奴隷の使用による、水道、寺院、劇場、城壁の建造と、優れたる大規模生産に於ける農業技術の記念であった。

(一) ローマの算盤は支那に伝わった（それから日本に伝わった）との説は〔資料上の証明を欠くが然し〕多分正しい推定であろう。

数学史家は、ローマの数学を極度に軽視するを常としているが、技術的数学の立脚地から、今後の注意深い検討を待たねばならぬであろう。

二 寺院の数学及びインド、アラビアの数学

中世のヨーロッパ

五世紀の後半に、ローマ帝国の滅亡によって、奴隷制度に立脚せる最後の国が崩壊した。その廃墟の上に新しい封建社会が作られた。武力によって大地主となった封建貴族たる武士は、被支配階級たる農奴からの搾取によって、非生産的生活を続けていた。宗教的イデオロギーが精神生活の一切の領域に、絶対的権力をふるい、寺院以外に於ける学術研究は、不可能であった。

寺院学校の算術は、ボエチウス流の算術と、コンプッス――復活祭の時日の決定に要する計算法――とを主体とした。ボエチウス（ローマの哲学者、約五二〇年）の『算術』は、ギリシアのニコマコス（約一〇〇年）の『算術』の抄訳であるが、それはピタゴラス風の数論の、発展せる形――例えば『ユークリッド』――ではなく、却って神学の影響を受けた所の、煩瑣的な、頽廃せる姿の数論であった。

計算を目的とせざる彼等の算術は、数の理論と云わんよりは、寧ろ数の分類を主要目的とした。神学上の三位一体の観念から、数を三つに分類することが好まれた。――例えば一般的整数は、完備数、不足数、過剰数に。偶数は偶数的偶数、偶数的奇数、奇数的偶数に。奇数は素数、非素数、互素数に。比の分類、比例の分類（それは十一種に上る）、多角数の分類、等々。斯様な非実質的煩瑣性こそ、彼等の算術の本体であり、そこには四則計算規則の説明をも、日常生活上の応用をも全然欠いていた。それどころか、寺院の数学は更に、数の神秘性、測定を含む経典中の文句の解釈へと進んだのであった。〔以下引用文省略、「階級社会の算術　その一」を見よ〕

六世紀の初めに書かれたローマの数学書に、ボエチウスの『幾何学』があった。それは『ユークリッド』の最初の三篇から、一切の証明を省いた上に、ローマの実用幾何の大要を附加した、低級の書であった。この書が十世紀に入ってから、再び見出されて、寺院の数学に採用されるに至った。

それ以前は、幾何学とは、主に地理――彼等の地図は、宗教によって歪曲された珍妙極まるものであった――を意味し、それに幾何図形の概念を附したものに過ぎなかった。カペラ（約四二〇年）は、彼の幾何学の中で、歴史的に興味ある土地の名を挙げている。中世紀に於ける幾何学の全面貌は、

マウルス（約八三〇年）の言葉によって窺い得られるであろう。

「この科学（幾何学）は、また寺院の建築に於て、その実現を見る。即ち測量の棒や、円、球、半球、四角形及び他の図形に用いられる。これ等の全知識は、それを研究する人々に、少なからざる精神的修養を与える。」

実に中世に於ては封建的経済の停滞が、数学を必要とせず、神学以外の実践性が奪われたのであった。

インド

吾々はヨーロッパの中世から近世に移る前に、インド及びアラビアに就いて語らねばならない。インド、アラビアの数学に対する理解なくして、近代の数学を語ることは不可能である。

所謂インド数学は、グプタ王朝——軍事的・政治的に雄大であったと同時に、バラモン教の復活の下に、インド文化の燦然として興起した輝ける時代——からアラビア人の侵略まで、即ち大体に於て四世紀から十二世紀半に至るまで、極めて顕著なる異彩ある存在であった。しかしながらその系図・発達の径路——或る部分はギリシアに学び、また支那にも負うたであろう——に就いては、今後の資料的専門研究に待つべきもの極めて多い。ここには唯その数学的特色の一瞥に止めよう。

インドには数学の専門家がいない、天文学者と自称した人々のみであったと云われる。事実、天文学と直接関係ある三角法は、〔ギリシアに学んで、それ以上の〕進展を見せたが、幾何学的理論に至っては、甚だ貧弱であった。彼等の長所は、実に算術、代数の方面にあったのである。

インド人こそ、位取りの規則と零の用法を発明し、現代の国際的なる記数法を与えた民族であった。「思うに總ての数学的発見中、これよりも一般教養の進展に貢献したものはない。」（カジョリ）それは正しくコロンブスの卵であったのだ。インド人は何よりも先ず計算家であった。現代に於ける算術の（国際的）計算法は、実に彼等によって拓かれたのである。

彼等は厳密な、そして壮麗な理論を要求しなかった。証明のない、計算規則の集合こそ、彼等の算術であり、代数であった。例えば逆算（inverse method）に就いての、アリアバタ（五〇〇年頃）の簡潔なる説明を見よ。

"Multipliers become divisors and divisors become multipliers, addition becomes and substraction and substraction becomes addition in the inverse method."

この方法の一例に言う。

「輝く眼を持つ美わしい乙女よ。お前は逆算の正しい方法を知っているか。そんなら私に告げなさい。一数あり、之を3倍して其の$\frac{3}{4}$を増し、7で割り、商の$\frac{1}{3}$を引き、それを自乗して、52を引き、その平方根を求め、8を加え10で割って2を得た。原の数は何程か？」

バスカラの代数（一一五〇年頃）を見よ。

"Tell directly, learned sir, the product of multiplication of the unknown five, less the absolute number one, by the unknown three joined with the absolute two."

Statement :

ya 5 ru $\dot{1}$ Product :

ya 3 ru 2   ya v 15 ya 7 ru $\dot{2}$

（一）現代の記号に直せば

$5x-1$　　乗積　$15x^2+7x-2$
$3x+2$

かような法則や結果は、多くは韻文で書かれ、バスカラ自らの言葉に従えば、それ等は「立派さでチャームされ、明晰、簡潔、甘美、正確で、愉快に習われる、平易な計算の方法」を与えたのであった。そして問題は屢〻興味ある文体によって書かれ、「早く語れ」、「直ぐに言え」として、解答が迅速の間に要求されたのである。それ等は知識階級の娯楽として謎として、提出され愛好されたのであろう。

かくて分析の代りに綜合を、論理の代りに直観――「ギリシア的直観」と異なる所の、普通の意味での――を好んだインド人は、ギリシアの幾何学者とは、正に対蹠的であった。幾何学の定理は、証明の代りに、その図を画いて単に「見よ」と言われた。彼等は数と量、有理数と無理数との間に截然たる区別を設けなかった。「彼等は不連続と連続との間に横たわる深淵を、一方から他方へと、無頓着に過ぎ去った」のである。

この短所こそは、併しながら一面に於て、代数学者としての彼等の長所であったのである。事実、代数の何物にも代え難い特色は、言葉に於ても記号に於ても、簡単なる略法を供給し、その計算は迅速に、而も機械的に行い得る所にある。それ故に、計算術を数論から分離したギリシアの数学者が、幾何学的計算法を持ちながらも、それを一般化して代数学を構成し得ず、また巧妙なる代数学者たるを得なかったのは、当然であった。之に反して、「若し代数の意味を、すべての種類の複雑な数量、即ち有理数、無理数或は空間的な量の上に、算術計算を適用するにあると、解釈するなら、それは

インドのバラモン教徒こそ、真の代数発見者というべきである。」（ハンケル）

アラビア

インド数学の華が未だ終わらざる間に、アラビア人は、モハメッド教の旗の下に、アジアからアフリカの北部を経てスペインに達する、世界的商業帝国を建設した。

アラビア人を結束させる必要から生(うま)れたモハメッド教は、アラビア商人のイデオロギーであった。「コーランは其(その)全巻を通じて、理路の通った合理主義、干乾(ひから)びた勘定高さ、常に物事を秤量すること、及びその個人主義的性質から言うて、農民の利害ではなく、商業資本の――更にそれに附加して、戦闘的という必要がある――利害を、はっきりと表現して」いた。

異常なる急速度に於(おい)て発展しつつある商工業を基礎とし、教王の保護の下に、インド及びギリシアの数学・科学が輸入され研究された。計算に便利なインドの算術と代数とは、商工業を背景とせるアラビア学者の愛好せる所であった。その上にヘレニズムの科学文明が、非常の苦心によるギリシア書の飜訳（ユークリッド、アポロニウス、アルキメデス、プトレマイオス、ヘロン、ディオファントス）によって摂取された。（その径路に就(つ)いては、ここに述べない。）

かくてギリシアの論理的なる幾何学と、インドの算術・代数とを学び得た彼等は、或る程度までは此両者を融合して、其(その)同化と改造に一歩を進め得た。此難事業を短日月の間に遂行した所に、アラビア数学の使命があったのである。

多少の系統ある商業算術は、実にアラビア人によって、書き上げられた。代数も幾分か系統付け

られた。――「アルゼブラ」なる語は、吾々に残された彼等の記念品である。また実験を尊重せる彼等は、精密なる天文観測を実行し、精細なる正弦表を作るを得た。その上に、彼等は純粋数学の上に於ても、独創ある仕事を残した。三次方程式の幾何学的解法が見出され、天文学から分離せる、独自の一分科として、三角法が発展した。

実に農業経済を固守せるヨーロッパ中世の封建社会が、寺院によって辛うじて数学の命脈を保っていた時代に、アラビアは古代と近世の連鎖をなす所の、重大なる役割を演じたのであった。世界の数学史上、「アラビアの数学は傍系ではなく、ギリシアからアラビア、それから近代の欧洲といふ、三つの大段階の一に位する。」（三上義夫氏）

ヨーロッパに於けるアラビア数学の伝達

やがてヨーロッパに於ける封建社会の経済的構造の中から、資本主義社会の経済的構造が成長し始めると共に、文化復興の曙光が顕れて来た。

即ち封建時代の荘園に於て、農業以外にも手工業的分業が生れ、漸くにして商業市場は開かれ、遂に商業又は手工業中心の都市が出顕して来た。十字軍の結果は、一層商工業の勃興を促し、封建的支配の下を脱せる、自治的なる都市国家の出顕を見るに至った。

従来とてもビザンチンからは幾分かのギリシア文化、スペイン及びアフリカ北岸のアラビア人からは幾分かの科学が伝えられつつあったが、今や十二世紀に入って、盛んなるアラビア数学飜訳の時代が来たのであった。アル・コワリズミの算術及び代数が、またアラビア訳を通じて、ユークリッド

の幾何、プトレマイオスの天文学が、ラテン語に訳されたのである。

　遂にイタリアの商業都市ピサに於て、商人階級の中から、数学の天才フィボナッチを生むに至った。彼がインド・アラビアの風に倣える算術書（一二〇二年）は、実に現代的なる算術の型を示したところの世界最初の著述と言われ、また商業上の事項を算術中に正式に取り入れたヨーロッパ最初の作であると呼ばれる。彼の『幾何学の実用』（一二二〇年）は、論理上の厳密と巧なる応用とを示した著述であった。吾々はまた、フィボナッチと殆んど同時代に於て、僧侶の中からも、サクソニーのヨルダヌス・ネモラリウスの如き、有力なる数学者を見出し得るのである。

　一方に於て、新興の商人、手工業者の各組合は学校を造り、寺院の手を離れて教育を始め出した。寺院学校の進化から、また学徒同志の協同から、大学も創設されて、「すべての哲学のアルファベット」たる数学の上に、天文学及び物理的科学が建設されねばならぬことを主張せるロージャー・ベーコンの如き先駆者も出顕したが、当時はスコラ哲学の隆盛期であり、数学的精神は伸び上るを得なかった。

　事実、当時にあっては、インド数字の普及さえも、容易に行われ得なかったのである。なぜなら、東西の交通貿易の結果として、インド数字は古くからヨーロッパに伝わっており、現に十三世紀の初葉には、イタリアの商人等は既に之を使用していた。而も当時の支配階級は、その使用を排撃したのである。「一二九九年にフローレンスの金融業者は、インド数字を記入することを厳禁された。」実にインド数字と其計算法の普及（二）のためには、商業資本主義の、より強度の発展を待たねばならなかったのである。

（一）インド計算法が普及するまで、ヨーロッパ人は多くは一種の算盤を用いて計算を行っていた。それは不便な計算法――日本の算盤の如き便利なものでなく――であったが、しかし「古い算盤派と新しい筆算派との間には、恐しく長い間闘争が続けられたのである」。

数学は、ただに計算の迅速性のみに止まらず、その理論体系の方向が、また計算技術によって制約される。例えば、この小篇中にある代数の歴史を見よ。更に算木の使用による支那の代数学は、独特の理論体系を示し、また最初は全く支那数学を輸入しながら、算木のみによらずに筆算を使用し始めた日本数学（和算）は、支那〔の代数（天元術）〕とは異れる代数（点竄）を生むに至ったことを見よ。

三　近世的数学の発生と其の成熟

文芸復興時代

十四世紀から十五世紀にかけてイタリア諸都市の商業は益々盛大となった。十五・十六世紀に於けるヨーロッパのルネッサンスは、イタリアの商業資本主義を基礎とし、出発点として、開始されたのである。文芸復興は、先ずこの経済的基礎の上に、ギリシア文化への憧憬――そこにはイタリアと古代ギリシアとの間の経済的・政治的類似をも考うべきである――に加えて、製紙工場の設立、印刷術の発明の如き文化普及の道の展開、更にコンスタンチノープルの陥落によるギリシアの学者及び写本の渡来等々による、複綜せる事情によって、進展したのであった。

人は既に輸入されていたアラビアの科学・数学に加えて、今や純粋の形に於て、ギリシアの科学・

数学を学び得るに至った。かくて寺院や大学の学者は、ギリシア幾何学の外に、その数論（ピタゴラス、ニコマコス等）を、早く受け入れた。之に反して、インド・アラビアの算術は、少くとも初期の間は、彼等によって排斥されたのである。

　事実、インド数字による計算法は、商業資本主義活躍のための武器であった。世界最初の印刷算術書（一四七八年）の巻頭を見よ。

「ここに商業に従事する總ての人々に甚だ有用なプラクチスを始める。それは普通アバカスとして知られる術である。私は、私が関心を有つ青年、及び将来商業生活を送ろうとする青年諸子から、普通アバカスと呼ばれる算術の基本原則を書いて呉れるようにと、屡〻依頼された。……それで私は、神の名に於て、この仕事を始める、……」

インド数字の書き方読み方、整数及び簡単な分数の四則、比例、割引、合資、物品交換、貨幣の鋳造、度量衡換算規則――これが、この書の内容であり、それは明かに、商業算術的傾向のものであった。かくてイタリアに始まって、後にはドイツ、イギリス、フランスに入れる新興商工階級の算術は、内容、問題共に其時代の要求に適応せるところの商業算術であり、それは主として、ギルド的なる計算学校、商業学校によって普及されたのであった。

　之と対立して、支配階級を代表せる寺院学校及び旧式の大学に於ては、数の神秘性に関する研究などと共に、ボエチウス型の算術が行われた。ヨルダヌス・ネモラリウス（サクソニーの僧）、ブラッドワージン（カンタベリーの僧正、オックスフォードの教授）、アルベルッス・ド・サクソニア（ウィーン大学総長、僧）、ジャック・ル・フェーヴル（パリの教授、国王の家庭教師）等々を見よ。当時の

最も優秀なる数学者と雖も、彼等が寺院または保守的支配階級に属する限り、彼等の算術書は、正に「死に瀕せる中世数学の屍」であった。

併しながら十六世紀に於ける新興商工階級の急激なる進展に連れて、インド算術は民衆のものとり、ここにボエチウス型の数論は滅亡に瀕すると同時に、商業算術の全盛を見るに至った。

既に十三世紀に於て、素朴なる統計学を生んでいたイタリアは、今やパチオリの数学書（一四九四年）に於て、複式簿記の誕生を見たのである。ゾンバルトに従えば、資本主義の構成と一致して、会計を機械的に明瞭にする複式簿記こそ、純粋の美から見ても、驚嘆すべきものであった。複式簿記の資本主義に於けるは、宛も近代物理学に於けるガリレイ、ニュートンの力学に比すべきものであった。

かくて十六世紀に於ては、商業算術と並んで、ギリシア幾何学――人文主義を代表する学問の一としての――が採用された。この間に際して、代数は、その本質的なる進展のために、異常なる苦闘を戦い取らねばならなかった。

なぜなら、インド・アラビアの代数計算法がギリシアの伝統的幾何学体系と接触したとき、手品の如き技術であった代数計算法は、理論的証明を要求され始めた。人はギリシアの所謂幾何学的計算法に、その証明の根拠を仰がねばならなかった。従って、そこには勿論、三次・四次方程式の代数的解法の如き、或は負数、虚根の観念の把握の如き、理論的方面に於ける大なる進歩はあったが、しかしギリシア幾何学の因襲に束縛されて、代数の特徴なる技術的方面は、一時は却って阻害されたように見えた。インド代数学者の手品は、ヴィエタの天才に取っても、無意味としか見えなかったのであろう。加うるに当時の記号の不整頓と不統一。――代数学は渋滞の泥中に陥っていた。

併(しか)しながら商工業の進展は、新しい市場を広く世界に求めさせた。アラビア人から伝来したコンパス、星辰儀等々の改善と共に、天文学と三角法の研究に就(つ)いては、早くも十五世紀に於(お)て、レギオモンタヌスの如(ごと)き先駆者を見出していた。かくて当時の比較的幼稚なる航海術によって敢行された地理学上の発見こそ、実に劃期(かっき)的なものであった。この発見は、異常なる産業の進展を喚起し、商工業の組織の上に変革を来たすと共に、科学特に天文学の革命を促した。コペルニクスの主著（一五四三年）が出顕(しゅつけん)したのである。

今や「運河の開鑿、船舶の建造、鉱坑の開鑿、坑内の水の汲み揚げ、火砲の製作及び要塞の設計、射撃の諸問題、航海用器の作製、航路の決定、……」――科学的技術と器具の改善・発明とは、数学の上にも大なる反映を見た。人はギリシア数学の伝統から飛躍せねばならなかった。

曩(さき)に文芸復興の初期から漸次開始された商業算術の流行は、整数四則の計算法を急速に進歩させたが、十六世紀の後半には小数が発見され、十進法による度量衡制度の樹立が主張された。天文測量器具の改善による観測から来る精細なる計算の必要は、精密なる三角函数表を生み、遂(つい)に対数の発明（十七世紀の初頭）を促すに至った。代数記号も漸(ようや)く整理されんとする。

技術の必要は、実用幾何学と実用三角術の上に、急速なる進歩を与えた。建築と土木とは、幾何学的なる「石切り」の術を要求した。建築と絵画とは、必然的に透視法と近似的作図法の発達を促した。ここにはレオナルド・ダ・ヴィンチ、アルブレヒト・デューラーの二大巨匠が立っている。――これ等の実践的なる幾何学は、ユークリッドの、或(あるい)はプラトンの規定とは、寧(むし)ろ対蹠(たいせき)的なるものであった。

科学器具もまた、十六世紀から十七世紀の前半にかけ、望遠鏡を初めとして、続々発明された。比例コンパス、パントグラフ、ネピーア・ロッド、ガンター・スケール、計算尺、パスカルの計算機、等々が――。

かくて十六世紀から十七世紀の前半の間に、計算技術に関する主要なる方法は、大体に於て完成されたと見做し得よう。これ等の、比較的長年月に亙る仕事は、たとい数学の論理そのものに革命を与えなかったにしても、それは数学の理論的構造を一定の方向に仕向けるために、基本的なる役割を演ずる。

今こそギリシアとインド・アラビアの数学が、調和・融合されて、そこに新なるヨーロッパの数学が生れた。この技術的発見と整理とが一段落を告げる頃から、真に近世的なる数学が、出発を始め出したのである。

十七・一八世紀

商業資本主義の時代に於ける生産力の発展は、科学を前線へと押し進ませたが、しかし封建科学の中心たる諸大学の科学は、伝統の保護のために、自然科学の発達に反抗したのであった。それは「死滅しつつある中世的関係が、生産の新しい進歩的方法に対してなしたと同じ力をもって、新しい科学と闘争したのである」。

それ故に最も早く勢力を獲得したイギリス・ブルジョアジーの如く、宗教と――従って大学と――妥協し得たものを除けば、科学の研究は、科学を必要とする、支配者としての新興ブルジョア、或は

絶対王政の下にある貴族・行政家の手によって保護されることとなった。その機関として学士院、科学協会等が、ローマ、ロンドン、パリ、ベルリン等々に新設された。

吾々は既に、直接に技術的・実践的なる数学的諸発明に就(つ)いて述べた。これより数学の理論的方面に就(つ)いて語ろう。

理論数学は、ギリシア数学の影響の下にありながら、漸(ようや)くにして新(あら)たなる進出を始めた。例(たと)えばディオファントスの算術は整理されて、そこからフェルマーの整数論が生れ、アポロニウスの円錐曲線論からは、フェルマー風の解析幾何学が顕(あらわ)れた。方程式論も進んできた。ルイ十四世の青年時代に於(お)ける社交界は、パスカルとフェルマーの「賭の計算」即(すなわ)ち確率論を誕生させた。

今や技術的数学も整頓されて、その理論体系が顕(あらわ)れて来た。建築土木技師デザルグの画法幾何学に於(お)ける基本的方法と、近世射影幾何学の組織（一六三九年）は、最好の例であろう。

デザルグの幾何学は、石切り、透視の方法を理論構成の上に用いたものであり、幾何学上の体系として、それはギリシア幾何学と対立する。綜合性を欠(か)いた直観によるギリシア幾何学は、一般的原理と一般的方法とを欠如(けつじょ)していた。ギリシアの幾何学者は、一定理の証明に当たって、図形（例(たと)えば点や直線）の相対的位置の如何(いかん)によって、別々に異る証明法を取らねばならぬこと、屡々(しばしば)であった。彼等は幾何学的メカニズムを知らなかったのだ。之に反して、デザルグにありては、射影による図形の変形によって、円錐曲線の一般的理論が組織された。それはギリシア的特殊の方法にあらずして、一般的綜合的方法であった。ここでは射影と切断とは、幾何学的メカニズムとして働いている。

デザルグの幾何学は、その成因に於(お)いて技術的であったばかりでなく、その構成に於(お)いても技

術的であり、その応用に於ても生産的技術的であった。パスカルはデザルグの方法を学んだが、しかしデザルグの仕事は多数同業者の圧迫によりて葬り去られ、また其後の数学者は新興の解析幾何学と微積分学に興味を奪われて、画法幾何学と射影幾何学とは、軍事的、工業的産業の勃興するまで、埋没し去ったのである。

より大なる数学上の革命は、方法学者デカルトの『幾何学』（一六三七年）によって起こされた。デカルトを同時代の他の数学者――特に解析幾何学に於けるフェルマー、代数に於けるヴィエタ、ハリオット等々――から区別するところのものは、合理的なる一つの方法の徹底的なる適用と観念の一般性にあり、ここにデカルトに固有なる独創があった。彼は彼の幾何学を構成するに当たって、その一般的進展のメカニズムを代数に求め、以てギリシア幾何学と根本的に対立するところのものを組織せんとしたのであったが、それが為めには、先ず代数学の概念の改造から出発せねばならなかったのである。

デカルトは代数をメカニズムたらしめるために、先ず代数をギリシア幾何学から解放して、インド的技術を理論的に基礎付けねばならなかった。それ故に、彼は――たとい其表現が如何に不十分ではあったにせよ――所謂「規約の方法」を用いて、代数学を構成したのである。

「代数記号a、b、c、……を考えよ、それ等が何物を表わすかを問わない。そこで加法は記号$+$で行う。aにbを加えるに$a+b$と書くように。減法は記号$-$で行なう。aからbを引くに$a-b$と書くように。……」

かくして彼は、計算記号の単なる結合として代数学を作り上げた。ここに至って、代数学は、ギリ

シア幾何学から解放されて、独自の存在を保つことが出来たのである。

実にデカルトにあっては、代数学は、論理的に、他の諸科学に先だつ。それは応用される諸問題の性質から、何等の束縛をも受けないと考えられた。そこで彼は其応用を先ず幾何学の上に試みた。それがために、「数を直線の長さで表わし、直線で表わされた量の間に、如何なる計算を施しても、その結果は直線の長さで表わされる」と規定したのである。この規定こそ真に革命的のものであった。なぜなら、彼以前の幾何学者にあっては、例えば直線と直線との積は面積であったから。

かくて代数量と直線の長さとの間に、完全なる平行性が顕れた。而もデカルトに従えば、代数は単なる計算の技術であり、一つの方法であり、メカニズムであった。それ故に、彼の幾何学は、「図形の直接なる直観に訴えざる……代数的メカニズム」として出顕したのである。そしてそれ故に、「今や数学の新世紀が開かれた。……数学上の仕事は、文字についての手工工場的労働となった」のであった。

デカルトの代数の意義は、ライプニッツによって拡張された。人はここに行列式を見、また更に函数の概念を見る。ライプニッツの意味する函数は――代数函数たると否とを問わず――計算記号の単なる結合に過ぎなかった。そしてライプニッツこそ、パスカルの計算機を改造した人でもあったのである。

やがてニュートン及びライプニッツの微積分学が顕れた。これこそは、機既に十分に熟して、正に生るべき時に生れた数学の革命児であった。

これより先き、ケプラーは樽の体積をアルキメデスの風に従って計算し、また遊星の軌道法則に於

て楕円扇形の面積に触れていた。ガリレイは速度及び加速度の微分学的意義に触れていた。カヴァリエリは「不可分割の幾何学」を書き上げていたのである。今や解析幾何学の普及による諸種の曲線の研究は、必然的に、曲線の切線及び面積に関する諸問題の解決を要求し出した（フェルマー、バーロー等）。

一面を顧みれば、ガリレイ、ケプラー等の力学、天文学上の劃期的発見と共に、生産力の発展に関して直接なる諸問題——水上運輸に対する流体力学、航海、坑内の水の汲上げ（ポンプ）等々——は、単に実験を主とする孤立的諸問題の解決を要求せるのみならず、物理学上の諸問題を綜合し解決するための理論的基礎を求むるに至った。その基本的・綜合的なるものは、当時にあっては実に力学であった。（ローベルヴァルは速度の問題に於て導函数と等値のものを使用していたのである。）この力学の基本的研究（ニュートン）のためにも、微積分学は必然的に要求された。

これ等の幾何学及び力学上の基本問題を解決するための綜合的数学として、微積分学が生れた。それはフラクションの考え（ニュートン）、微分の考え（ライプニッツ）、及び形而上学的なる無限小の考察（ライプニッツ）から——。

微積分学の発明は、数学に一大転換を与えた。それは数学及び自然科学の進展に、異常なる武器となった。それは切線、面積、体積等の問題を解いたのみではなかった。曩に面積の計算と密接の関聯にあった無限級数は、今や微積分と関係付けられて、人はここに新なる展望を見出した。「有限の代数」は「無限の代数」にまで進められたのである。

微積分はまた力学の基本的問題を研究するための必須の手段となったばかりではなかった。それ

は力学その他の物理学上の諸問題と関聯して、微分方程式論及び変分学への端緒を拓いた。ベルヌーイ一族、マクローリン、ダランベール、オイラー、ラグランジュ等は、微積分の進展と応用のために、最善の力を傾けた。数学及び理論的自然科学に対する微積分の影響は、それほどにも圧倒的であったのである。

然らば其時代の微積分学――或は一般的に解析学――は、本質的に新なる数学として、新なる理論的構造の下に組立てられたのか？

ニュートンが力学上の考察から、$\dot{x}$なる新記号を使用したとき、そこには固より極限の観念があった。また偉大なる形式的数学者ライプニッツが、dxや$\int$なる新記号を導入したとき、人はここに全く新なる数学の誕生を見たかの如く認識する。しかしながら彼等の理論は、その実、極めて曖昧なものであった。ライプニッツが形而上学的なる連続律――万有は無限小の差を有する系列をなしている、そこには充たされざる如何なる場所もない――によって、微分小の存在を主張するとき、それは寧ろ神秘的であったとさえも言い得よう。僧正バークレーが「不信仰なる数学者」（ハレー）に挑戦し、神の名に於て、微分小の存在を否認し、微積分学の「誤謬」を叫び、その不成立を説いたことも、必ずしも全く無意義な論争とは言えなかったのである。

事実、微積分学は素朴なる経験主義（ニュートン）か、単なる形式主義（ライプニッツ）に止まった。それは計算技術の点に於ては、手品の如きインド代数を聯想させる。それはデカルトの意味に於ける代数計算を、ただ形式的に、無限へと、無理にも押し拡げたものに過ぎなかった。

それは独りニュートンが、「無限の代数学」——即ち解析学を、有限の代数学の（形式的なる）拡張と視たのみではなかった。オイラーも同じ見解を取り、ラグランジュは極めて明瞭にこの立場を述べている。人はここに、全世界が生んだ所の、最も多くの数学公式の創案者オイラーの、例えば無限級数に対する取扱を見るがよい。

それ故に、微積分の基本観念に就いて問われたとき、直観的な、または形而上学的な説明の中に遁れるより外に、彼等には途がなかった。先ず「前進！　前進！」と、ダランベールは答えた。「その内に、信念が諸君にやって来るでしょう。」

そしてまた事実、単なる代数的メカニズムなればこそ、十八世紀に於て、解析学は広大なる範囲に亙って、あんなにも其内容を豊富にしたのみならず、力学、物理学、幾何学上の応用に於ても、驚くべき仕事を仕遂げ得たのであった。

かような数学の進展に比較すれば、経験的なる自然科学は、その時代に於ては幼稚であった。化学と生物学とは勿論のこと、物理学さえも当時は新発見を多く持たなかった。それ故に、その初期に於ては十分に経験的であったニュートンの物理学は、漸く純理的なるデカルト風の数学的傾向に進まざるを得なかったのである。かくてダランベールは、力学、流体力学を、一種の運動学と化した。この傾向はラグランジュの『解析力学』に於て、その極点に達した。見よ、この書の中には一個の図もなく、幾何学的なる、また力学的なる推論をも要求せず、そこには唯一様に斉正なる計算の歩みがあるのみであった。

かくの如き機械論は啓蒙哲学と結び付いて、機械論的なるフランス唯物論を生み、当時の経済的・

政治的状態と関聯して、ここにフランス革命の思想的基礎を作ったのである。数学は革命への武器となった。当時理知が一切のものに対する唯一の尺度となったとき、予言の能力を失える神の啓示は、確率論によって占領された。――「代数学の炬火によって、倫理学及び政治学を照さん」とは、コンドルセーの宣言であった。

フランス革命及びナポレオン時代

フランス革命からナポレオンの時代は、また数学史上の重大なる転形期であった。此時代の数学は、革命の際に、打破され了った旧教育の廃墟の上に新設された、軍事的・技術学校――エコール・ポリテクニクの数学によって代表される。

デカルト、ニュートンの拓いた道が、ラグランジュ、ラプラスによって既に完成に近づき、古い課題が整理され終らんとする頃、数学の新しい路は、「エコール・ポリテクニク――革命学校の父」モンジュの画法幾何学――革命に際して、直接に最も要求多き軍事的・工業的技術――によって展開された。それは、図形的直観を離れた代数的表現たる普通の空間解析幾何学、及び極めて非現実的なるギリシア的立体幾何学の作図とは、対蹠的のものであった。それは何よりも先ず、直接に図形そのものを、具体的に、迅速に、正確に表現する技術的幾何学であった。

それと同時に、モンジュはまた『幾何学に於ける解析学の応用』に於て、自然的なる問題を空間的構成法に於て捕え、デカルトの幾何学よりも、はるかに直観的なる方法を示した。ラプラスの『天体力学』と対立しては、現象学的なるフーリエの『熱の解析的理論』が顕れた。

かくて当時の数学は、自然現象の説明の上に、技術の適用せらるべき数学として、唯物的なる色彩を有っていた。そして其解析学は主としてデカルト風の機械的なる計算であり、その幾何学は主として直観的・具体的なる技術であった。

かかる数学は、特に解析学の方面に就いては、「この時期に於て、微積分学の発見によって数学者に開かれた研究のプログラムは、殆んど成しつくされたかのように見えた。積分するに多少困難な若干の微分方程式、積分学に附加すべき若干の章――これで人は科学の限界に触れんとするものの如く思われた。」

実に、十八世紀フランス唯物論の一面を反映せる機械論的数学は、ナポレオン時代に於て其最高頂に達し、当時の数学者自らが、既にその行詰りを感じつつあったのである。吾々はアカデミーの報告（一八一〇年）に於て読む。「(数学の) 殆んど總ての分科に亙って、人は超ゆべからざる困難によって阻止されている。吾々に出来る残された仕事は、ただ微細な事柄の仕上げのみであるように思われる。実際、これ等の困難の全体は、わが解析学の能力が殆んど消費し盡されたことを、宣告するかのように思われる。」――それは正に数学の危機であった。
丁度この時に当たり、唯物的ならざる純粋数学の花が、ドイツに於て既に開き始めていたのである。

一八世紀末葉のドイツは、経済的に遅れたところの、分散せる国々であった。ブルジョアジーの後進性と無能力とは、フランスと異なり、封建主義との闘争に於て指導階級となり得なかった。イギリス、フランスの科学と哲学は摂取されたが、それは経済的・社会的情勢に制約されて、観念論的哲

学の発展を条件づけることとなった。かくて機械論的なるフランス唯物論は批判せられ、「数学の先験性」が語られ、「人間性の教養」、「哲学と詩との聯盟」が唱えられた。人はここに批判哲学の誕生と新人文主義の勝利を見るのである。

カントよりも後に生(うま)れ、シェリングと全く同時代の人たりしガウスこそ、この転形期を代表せる大数学者であった。

ガウスが天文学、測地学、物理学に力を傾け、応用数学の研究を重視したとき、彼は正しくフランス数学の伝統を逐っている。然(しか)しながら彼は、他の一面に於(おい)て、自然現象と直接には無関係なる、純粋数学の愛好者であった。彼はラグランジュ又はルジャンドルよりも、より深く数学の厳密性を愛した。

複素数の意義と幾何学の基礎とは、ガウスの注目するところとなった。代数方程式の根の存在は、彼によって厳密に証明された。無限級数は、単なる機械的計算の結果と見做(みな)されずに、その収斂(しゅうれん)性が検討された。整数論の大作が書き上げられた。

これをフランス数学と比較せよ。ここには数学の基礎の批判と、証明の論理的厳正に関する、顕著なる傾向が顕(あらわ)れ始めたのである。「数学は科学の女王であり、数論は数学の女王である」との、ガウスの宣言を聞け。ここには「純粋数学の誇り」があった。そしてこれこそ当時のドイツ・イデオロギーではなかったか？

ベルリン大学新設（一八一〇年）の頃から、ドイツに於(お)ける数学、自然科学のルネッサンスが始まったとき、そのスローガンは新人文主義であった。

　最後に、十七世紀以来不断の歩みをつづけたイギリスの商工業は、世界市場を作り出し、その結果、蒸汽機関、紡績機等の出顕（しゅっけん）を機会として、十八世紀の後半には、産業革命が始まった。ニュートン以後のイギリスは、紳士的常識と実際主義、宗教政策による科学教育の圧迫、ニュートンの偶像視、等々の複綜せる諸原因によって、数学理論の進歩性を失い、沈滞に陥った。吾々はケンブリッジ出身の、而（しか）も相当なる数学者の中から、負数の使用に反対せる人々をさえ見出すのであった。

　しかしながら、イギリスの実際的なる経験主義が、計算法、統計、生命保険、等々の方面に於（おい）て、フランスの工業数学と相待って、実践的なる実用数学を開拓したことを忘れてはならないと思う。

四　現代的数学の抬頭

　一八一五年ナポレオンの没落と共にヨーロッパ諸国は一般に反動的保守政治によって、安定を保たれた。しかしフランス大革命とナポレオン戦争とは、既に全ヨーロッパの経済的・社会的機構を震動する、大なる役割を果たしていたのだ。イギリスの産業革命は益々（ますます）成熟し、フランスは革命によって一掃された新しい地盤の上に産業革命の期に入り、ドイツ其（その）他の諸国に於（おい）ても、漸（ようや）く産業の急速なる進展へと近づき始めたのである。

　一方に於（おい）ては、この頃から実験科学上の新現象が多く発見され、熱力学、物理光学、電気力学が物理学の舞台に上ってきた。産業革命は機械学、弾性力学、熱力学等の専門的研究を必要として来た。嘗（かつ）て数学、物理学を学んだ技術者の間には、今や専門的分業が始まって来た。加うるに独り高等専門

教育に於てのみならず、中等学校に於ける数学教科がここに確立され、諸学校の普及と同時に、人は職業的なる数学教師として生活し得るに至った。——数学の実践的方面に好意を有たぬ観念論者は、〔主として〕形式陶冶としての数学の価値を認めたのである。

その頃から直接の応用を離れ、自然現象の説明に無関係な、純粋数学が急速に出顕し始めた。フランスに於ては、エコール・ポリテクニクが其中心であった。特にドイツに於ては、技術家クレルレの保護の下に発行された数学雑誌を中心として、ヤコビ、アーベル、スタイナー等の青年が、純粋数学をそれ自らの為めに研究せんとする新人文主義的理想の下に、進んだのである。

かくてモンジュの技術的なる画法幾何学からは、より純粋なるポンスレーの射影幾何学が生れて来た。それはギリシア幾何学ならびにデカルトの幾何学に対立するところの、純然たる幾何学的メカニズムによる理論的構造を有っている。その頃から幾何学の専門家が顕れ始めて、幾何学を純粋に——代数計算を用いずに——組織せんと企てた。専門的孤立主義が開始されたのである。

伝統に輝ける解析学の行詰りは、十八世紀的数学精神とは対蹠的なる、反省的・批判的精神による解析学の基礎的吟味によって、転換の路が拓かれた。それはガウスに引き続いて、コーシー（反革命主義者）の手によって行われた。

コーシーは、空間的なる、力学的なる一切の直観を排除し、極限の方法を武器として、純粋なる数観念の上に解析学を構成せんとした。「無限小」や函数の連続が極限の方法によって取扱われ、オイラー、ラグランジュの如き形式的立場は棄てられて、無限級数の収斂性が考察され、定積分の存在の

如(ごと)きは、証明を要求されることになった。複素変数の一般函数論も、その基礎工事が仕上げられ、微分方程式の解の存在が吟味された。コーシーこそ、正しい意味での解析数学の新世界を、原理的に拓(ひら)いた人であった。

解析学への他の新なる路は、難渋なる老ルジャンドルの楕円(だえん)積分論の克服によって開かれた。そこにはアーベル及びヤコビの楕円(だえん)函数論が設立された。

代数もまた転換期に直面せねばならなかった。五次方程式の代数的解法は、久しい以前からの懸案であり、ラグランジュの努力も空しかったが、遂(つい)にアーベルは此問題の不能性を証明し得たのである。それは正に方程式論の危機であった。若きガロアの天才は、「与えられた代数方程式を解くこと」から、問題を「代数的に解き得る方程式の有すべき条件」の探求へと転換させ、ここに輝かしい未来を約束したる群論の分野が拓(ひら)かれた。

今やイギリスの数学界も、ピーコックの形式不易の原理をもって、数の基礎論へと一歩を踏み出した。

幾何学に於(お)ける平行線の公理の証明は、二千年来の懸案であり、ルジャンドルの試みも十分なる成功を収め得なかったが、それは意外なる方面から解決された。即(すなわ)ち非ユークリッド幾何学が、一八二〇年代から三〇年代の初めに於(おい)て、ロシアのロバチェフスキー及びハンガリーのボリアイによって組織されたのである。

かくて現代的なる数学の主要部分は——そのあるものは、たとい萌芽の形に於(おい)て与えられたに過ぎなかったにせよ——実にフランス大革命、ナポレオン戦争による深刻なる社会的激動の後に、新し

い産業資本主義社会の発展期（或は抬頭期）、反動政治の時代に於て、誕生を見たのであった。

今や数学は、その面貌を一変した。新興の数学は一八世紀に於ける機械論的・唯物的数学を克服した。それは何よりも先ず純粋なる理論的数学であった。そこには多分の批判的・基本的要素を含み、理論の構造が、問題の提出法が、大なる転換を来たしたのである。そしてこれ等の仕事は、反動政治の圧迫による表面的安定の時代――その実、到るところに秘密結社が発生し、陰謀と革命の引きつづいた時代――に於て、或はロマンチックなる、或は反逆的なる青年の手によって、少くとも其半分は、なし遂げられたのであった。

ヤコビの『楕円函数要論』（一八二九年）が出版されたとき、老フーリエは此書を批評して、自然哲学の問題が数学者の思索の主要目的たるべきを語り、「解析数学を完成するに最も適当な人達が、人智の進歩の上にあんなにも必要な、数学上の高い応用の方へ、その研究を向けられんことを切望せざるを得ない」と述べた。この非難を聞いたとき、青年ヤコビは老ルジャンドルに書いた。――

「フーリエ氏の意見では、数学の主要目的が、公衆の利益と自然現象の説明にあるとのことでした。しかし彼のような哲学者は、科学の唯一の目的、それは人間精神の名誉であること、並びに、この名の下に於て、数に関する一問題が太陽系の一問題と同様の価値あることを悟るべきでした。」

一八三〇年フランスを遊歴したクレルレの報告に曰う。――

「フランスでは応用数学が餘り多く教えられ、純粋数学の教養に就いては、反抗的な偏見に囚われている。しかし数学の真の目的は、悟性の内的啓発と精神力の訓練にあるのである。」

この意見は、ドイツの諸大学に決定的なる影響を与えた。当時の反動政治下に於ける自由思想の圧迫は、十八世紀風の数学に対する攻撃と結びついた。——

「高慢不遜なのが数学者である。すべての革命は、頭の中でただ数量のみを考え、正義に就いて何等の考えをも持たない数学者が、事物の上に数学を濫用することから起るのだ。」

遂に全ヨーロッパの数学界は、ドイツ的なる観念論的精神によって風靡された。数学は純粋数学と応用数学とに分離し、応用数学は主として天文学者、物理学者、工業技師及び保険学者等の手によって、辛うじて支持された。そして直接には実践から全く遊離せる「数学のための数学」が、資本主義社会の安定期乃至完成期に於て、急速に進展したのであった。

今や世界資本主義の危機に際して、「数学の危機[一]」もまた叫ばれて来た。ここに吾々に課せられた今日及び明日の問題がある。

（一） E. Colman : The present crisis in the mathematical sciences and general outlines for their reconstruction. (Science at the cross roads. Papers presented to the International Congress of the History of Science and Technology held in London, by the Delegates of the U. S. S. R. 1931.)

（一九三三・四・二五）

・地名

- 「イデオロギーの発生（数学）」（『数学史研究　第一輯』、岩波書店、一九四七年八月、第三刷）所収。
- 旧漢字は新漢字に改めたが、旧漢字の一部はそのままにした。
- 漢字表記の人名・地名はカタカナに改めた。
- 人名については、通行の表記に改めた。
- 読みやすさのために振り仮名を付加した。
- PDF化には LaTeX 2_ε でタイプセッティングを行い、dvipdfmx を使用した。
- 科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」
  `http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/scilib.html`
- 「科学図書館」に新しく収録した文献の案内　「科学図書館掲示板」
  `http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs`