数学基礎論の歴史

――その一つの断面――

村田　全

I　問題の概観

1.　数学基礎論（以下，基礎論と呼ぶ）の歴史を論ずるには，第一に今日の基礎論がどんな学問であるかについて大体の見当をつけ，第二にその今日の状況に影響した数学史上の事実や思想史的背景などを概観するのが本筋であろう。いうまでもなく，この第一，第二の課題は共に大変な問題であるが，それでも以下の話の間ずっとこの二つのことを意識の中にだけはおいておく。本格的な取扱いは他日を期するとして，さしあたっての目標は，非専門家の方に，基礎論を紹介することであるが，紹介の仕方に偏りができるのは致し方ないとして，大きい過ちをおかさないことを念じている。

基礎論というと，数学について哲学的な議論を上下するものと考えられることが少なくない。しかし論旨をはっきりさせるためには，この考えを否定して，次のようにいい切ってしまう方がよいと思われる。

基礎論は数学の一部門であり，その研究対象は数学的理論の構造である。（この意味は後で説く。）

実際，基礎論には研究の立場を貫くところの或る“哲学”はあるけれども，多くの場合その立場は既に決まっていて，普通の数学と同じようにテクニカルな計算が行なわれる。もっとも，大ていは論理計算であるが。

それにしても数学の他の分野よりは“哲学”との交渉は深いであろう。というのが，上で述べた“研究の立場”を決めることが，他の数学分野でよりは本質的な意味をもつからである。

しかし一方，少し前までいわれたようなB. Russellの論理主義，D. Hi1bertの形式主義，L. E. J. Brouwerの直観主義などの対立，特にそれらの間での“言葉”の通じ合わないというような事態，これらのことはもはや過去のものとなったと思われる。すなわちこれらの“立場”の相違は，公理や推論規則の相違として数学的に処理される傾向にあるし，第一，今日の基礎論自身が，端的に云って，Russell, Hilbert，Brouwerたちの直接の影響下にあるというよりは，それらを批判的に継

承したK. Gödelの構想の上にあるものというべきであろう。少なくとも1930年代以後の基礎論現代史に関する限り，筆者はこのように見ているし，それと共に普通の数学史書でのこの方面の取扱いに多少の不満を感じている。

はっきりいうと，今日の日本における現場の基礎論学者の多くはあまり哲学を好まれない。実際いかがわしい “哲学” は少なくないし，いかがわしくはなくても真に示唆的なものは少ないのである。しかし他方において，少なくとも日本の現状では，やや，哲学ぎらいの傾向が強すぎるのではないかと筆者は考えている。そしてそれと共に，深い哲学的視野を支える一つの基盤は歴史的考察であること，及び歴史的考察がまた日本では著しく欠けているのではないかということ，この二つのことを思わないわけにはゆかない。

2. 上で基礎論を指して “数学的理論の構造の研究である” と述べたが，その対象や手法の説明によい一つの例は，射影幾何学における「双対(そうつい)の原理」である。次にしばらくこれを説明する。

平面射影幾何学の普通の公理系では，各公理の文章において “点” という文字と “直線” という文字を入れかえても，（言葉づかいに多少の注意をすれば，）結果はやはり公理になっている。例えば

I　相異なる2点の上の直線は，1つあって1つに限る。

II　相異なる2直線の上の点は，1つあって1つに限る。

次にその理論の中で出てくる諸定義においても，“点” と “直線” の交換結果が再び定義になっているように取り計らわれている。例えば

III　1直線上にない3点の作る図形を3点形または（点）3角形と呼ぶ。

IV　1点上にない3直線の作る図形を3直線形または（直線）3角形と呼ぶ。

一般に文章Aから，Aの中の “点” を “直線” に，“直線” を “点” に替えて文章Bを作ることを，Aの双対をとると呼ぶ。IIはIの双対，IはIIの双対であり，III, IVも互いに他の双対である。

さてこのように双対について配慮しつつ理論を展開してゆくと，そこに得られる平面射影幾何の体系では，定理Xの双対Yは必ず定理となり，Xの証明の双対は必ずYの証明になることが確かめられる。実際定理Xの証明は原理上，公理と定義とだけで進められることなので，Xの双対，Xの証明の双対と書き並べてみると，もとの公理，定義はまた公理，定義に書き直されていて，少し考えてみれば，話の続き具合にも何ら不都合のないことが解るであろう。（いくつかの証明ずみの定理を使ってする普通の形の証明の場合を考えても，議論はあまり変わ

らない。)

定理の双対がまた定理であるというこの事実を「双対の原理」と呼ぶが，“原理” とはいうものの上記のような “証明” の与えうる一種の定理である。しかし上の例の定理 X などが射影幾何学の体系の内部の定理であるのに対し，「双対の原理」は体系についての “定理” であって，両者の間には明瞭な差が認められる。そこで後者を “超定理” と呼び，その “証明” などを行なう理論を “超理論” と呼んで，定理 X などと区別するのが便利であろう。

さて射影幾何学の代わりに，公理化された数学的理論をおき，それに対して超理論的取扱いを試みるのが，Hilbert 以来の「超数学」または「証明論」に他ならない。もちろんこの線上にあるものだけが基礎論なのではないけれども，この線が Gödel をはじめ下記の G. Gentzen などにつながり，やがて今日の基礎論の主流になったのは事実であろうから，以下，大体はこの流れに沿って話を進める。

3. Hilbert は “Grundlagen der Geometrie（幾何学基礎論）”（初版 1899）の時代から，基礎の問題に関心をもっていたわけであるが，上のような超数学の思想が固まってきたのは 1920 年代であろうと思われる。(Neue grundung der Mathematik（数学の新しい基礎づけ）(Abh. Hamburg Bd. 1)(1922)); 就中 Über das Unendliche（無限について）(Math. Annalen 88)(1925)) しかしいうまでもなく，この一連の仕事に Hilbert をはじめ多くの数学者を向かわせたものは集合論であり，特にその逆理の発見であった。

集合論の逆理については成書にゆずる（例えば赤摂也著「集合論入門」)。ここでは逆理が二つの意味をもっていることだけを特に注意しておきたい。第一の意義は勿論，集合論のつまずきの石としての否定的役割，第二の意義は基礎論における有力な証明法を示唆する，いわば積極的な役割である。第二の意義については後でもう一度立ち返るが，実際，基礎論には，それ自身に何の矛盾も含んではいないが，一歩まちがうと逆理になるような微妙かつ有力な証明法がある。逆理はこの点でかなり劇薬に似ている。へたに使えば命とりになるが，うまく使えばまことに有効である。

なお集合論の主要な逆理は 1905 年頃までに大体出そろっている。

4. 集合論の逆理を基礎論のきっかけとすれば，基礎論の展開を具体的に支えたものは記号論理学の発展であろう。

記号論理学の歴史は，古代中世にまではともかくとして，少なくとも Leibniz

にまで遡ることができるが，その後 de Morgan，Peirce，Boole，Schröder などの貢献をへて，前世紀末から今世紀にかけては Peano，Frege，Russell，Whitehead などに負う処が大きい。特に Boole 代数と呼ばれる記号的論理計算の法則の確立と，関係の述語と呼ばれる述語記号の採用（例えば “5 は 3 より大きい” というのを，単なる主語—述語関係として捉えるのではなく，“5 と 3 との間にこの順に $>$ の関係がある”——記号による例: $>(5,3)$，または $5>3$——というように捉えること）とは，この論理学を古典論理学から前進させたばかりでなく，数学の理論を取扱うのに著しく便利なものとしたことであった。

もちろん記号論理学が基礎論に影響したばかりではないので，基礎論の進展も極めて大きい影響を記号論理学の上に与えている。Hilbert，Gödel，Gentzen などの名はすぐ思い浮かぶところであって，後の章でもう少し内容に触れた説明を与える。

5.　以上の他，基礎論が今日の形をとるに至るまでの間，多くの数学的ないし哲学的問題がそこに投げかけられ，またそこから発生しているが，筆者は特に一つの根本的な変革が，1930 年代の初めにあたって，基礎論の歴史に現われてくることを強調しておきたい。それは §1 で述べた Gödel の論文

Über formal Unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme. I

（『プリンキピア・マテマテカ』その他の公理系での決定不能定理について，I）(Monatsh. Math. 38)(1931)

であって，これに関しては §8 で触れる，ここではまずその時期以前における二，三の傾向について，現代的にみて大切と思われる点を二，三挙げておく。（*Principia Mathematica* は書名。次頁参照）

直観主義——Brouwer に始まる。本来は無限論への反省というか，日常普段の有限的経験の下でわれわれが獲得してきたいろいろな論法，例えば背理法などは，果たして無限を取扱うときにも無条件で使ってよいのか？ というような問題から出発した。今日ではこの種の問題の一つ「二重否定消去法則」（$\neg\neg$A を得て A を結論すること; ここで，$\neg$は否定の記号）を許すか否かというような，公理的取扱いの問題として一応整理されている。しかしこの他にもこの方面の主張には，基礎論の動きについて本質的に示唆するところが多いと思われる。（例えば後で挙げる Gentzen の「自然数論の無矛盾性」などの原文を参照のこと。直観主義はまた実数論の最近の新しい展開についても影響をもっている。）

経験主義——E. Borel 達の解析学者の主張に始まる。集合論における「対応」がどの程度まで具体的であるべきか等を論じた。特に集合論の選択公理の妥当性をめぐって論争したが，その主旨は今日の「構成主義的数学」，あるいは回帰的関数 (recursive function) の理論などに生かされている。

論理主義——本来は数学の公理を論理学的原理に帰着させることを目指した主張。Russell と Whitehead との著書 *Principia Mathematica* 3 巻 (1910〜1913) は有名である。ただしこの立場の「公理」には，例の “万人の認める” という式の気持が今日から見るとなお濃厚に残っている。また，例えば「無限集合が存在する」という公理のように，論理学に帰着しがたい公理のあることが確かめられている。今日ではむしろ型の理論（Type theory）の出発点として最も意味があるように思われる。

形式主義——Hilbert の本来の主張を形式主義と呼ぶとき，その目標は，古典数学の体系を公理化した上で，その公理系の無矛盾性を「証明」することであったと考えられる。この「証明」は上の §2–3 で述べたプログラムに従って行なわれるが，その際，公理として形式化された数学理論を，（その公理の示そうとする内容的考察の下でなく，）有限個の記号からなる具体的対象として捉えるという方針で事が運ばれていた。この方針を「有限の立場」と呼ぶ。ここにおもしろいのは，まさにこの Hilbert の示した方向に沿って（本来の形での），Hilbert の無矛盾性証明の意図の挫折と，基礎論の新しい展開とが同時に起こったことである。

次に Hilbert の意図の成功した面，つまずいた面，新しい展開の方向をそれぞれ概観する。なお §1 ですでに述べたとおり，今日の基礎論では，上記のいくつかの「主義」が露骨に対立しているという事情はまず見られない、くり返しいうようだが，基礎論はすでに一つの数学理論になっているので，哲学が無用とは（特に筆者の場合）考えていないけれども，それにしても哲学に意味があるためには，そのような数学的理論たる基礎論と無縁であることはもはやできないのである。

II　Hilbert の企画から Gödel の理論へ

6.　Hilbert の企画の成功した第一の例は，Hilbert 自身による「幾何学基礎論」(1899) であろう。これは (1) 幾何学の公理系，(2) そのモデル（即ちその公理を満たすものの例示），の二つからなる。手取り早くいえば，「点」のモデルとして実数の順序対 (x_1, x_2, x_3) をとり，「平面」,「直線」のモデルとしてそれぞれ一つの 1 次方程式を満足する「点」の集合，二つの（“相交わる”）1 次方程式を満足する「点」の集合をとり，また「点」「直線」「平面」相互の関係たる公理の代わりには，

実数間の性質としてそれらに応ずるものを適当にとるという風にするのである。

もしその幾何学の公理系が矛盾をもっていたならば，その公理系のどんなモデルもつねにその矛盾を露呈するはずである。ところが Hilbert による上記の実数モデルでは，「公理」にあたる実数の性質がすべてまちがった性質ではないようになっているため，万一，実数論にまちがいがあってそこに矛盾が包蔵されているというならとにかく，実数論さえ無矛盾であれば，その実数モデルは矛盾のないモデルであることが確かめられる。ということは，少なくとも一つの無矛盾モデルの存在を意味し，したがって今考えている公理系が無矛盾であることが示されたことになる。

この証明はもとより，今日の有限の立場によるメタ理論の形とはかなり違っている。事実，これはメタ理論の思想以前に建てられた理論であって，むしろメタ理論への一つの母胎をなしたものというべきであろう。

更にこの証明は実数論の無矛盾性を前以て仮定した，いわゆる相対的無矛盾性の証明になっている。この証明を絶対的なものにする仕事は，他でもない実数論の無矛盾性の証明ができたときに完成するわけであるが，実はこれは，有限の立場に立ってするメタ数学の問題としては，ほとんど絶望的に困難な問題のようである。少なくとも今日，可能性のある方向は，（いろいろな意味で）条件をつけて制約した実数論について考察を進めるという程度のことかと思われる。

7.　Hilbert の有限の立場を守ったメタ数学として成功した，最も典型的な例は，

G. Gentzen:Untersuchungen über das logische Schließen（論理的演繹の研究）I，II (Math. Zeits. 39) 1934 年

であろう。この論文は今でも基礎論入門の標準的な途の一つである。

Gentzen の LK（「古典論理」の意味）と呼ばれる論理体系では，

(1)　用いられる記号

(2)　許される式 (Formel)，すなわち，記号の特定の列

例：A∧B（A かつ B），¬C（C でない），

$\forall x \mathrm{F}(x)$（すべての x について $\mathrm{F}(x)$）など。

(3)　許される矢式 (Sequenz)。すなわち，A∧B → A∧B のように，→の左右に式を並べたもの。

(4)　矢式の変形規則

がそれぞれ明示される。(3) をもう少し詳しくいうと，α_i，β_j で式を表わすとして，

$$\text{矢式}\quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \to \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$

とは，「α_1，α_2，$\cdots$，α_n がすべて成り立つとき，β_1，β_2，$\cdots$，β_n の少なくとも一つが成り立つ」ことを意味し，更に□を空欄の意味として，矢式

$$\square \to \beta_1, \cdots, \beta_n,$$
$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \square,$$
$$\square \to \square$$

とは，それぞれ「$\beta_1, \cdots, \beta_n$ の少なくとも一つは無条件に成立する」，「$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ の全体が矛盾を含む」「矛盾である」を示す。

また (4) の矢式変形規則には（Γ，Θ などのギリシア大文字でいくつかの式を表わすとき），

$\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}$ のような，論理記号に直接関係しない 7 個の変形規則

（この中には次の規則が含まれている。
Shunitt（英 Cut，切捨て）$\dfrac{\triangle \to \wedge, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\triangle, \Gamma \to \wedge, \Theta}$）

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}, \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}(a)}{\Gamma \to \Theta, \forall x \mathfrak{A}(x)}$$

〔この下の矢式に $\mathfrak{A}$ は含まれないとする。〕

のような，論理記号に直接関係する 16 個の変形規則
の合計 23 個の規則がある。

「証明」とは，$\alpha \to \alpha$ の形の矢式のみから出発し，上記の 23 個の規則だけを用いてある一つの矢式に至る一系の図式であり，その最後の矢式が，その「証明」によって得られた「定理」に他ならない。

さて Gentzen の論理体系 LK においては，“ある定理 $\beta \to \gamma$ が証明されたとき，その証明を書き改めて，前記の Schnitt（切捨て）という規則を全然使わない形に直すことができる。” これは射影幾何学における双対の原理と同じように，体系 LK に関するメタ定理である。Gentzen は上の “　” の事実を，「基本定理 (Hauptsatz)」と呼んだが，今日ではしばしば “Cut- elimination theorem” とも呼ばれている。もっともこの定理は，典型的三段論法の形たる “Cut” を，形の上で消去することについていっているので，これを指して “三段論法を全く用いないですませるという定理” と考えてはまちがいである。

さて実はLKにおいて「切捨て」以外の変形規則では，上でその例を示したのでも判るように，上の矢式中にある式は，そのままか，或いはそれに何かが書き加えられた式となってからで，下の矢式に残留し，いやしくもいったん現われた式が消失することはない。式の消失の起こるのは「切捨て」における式$\mathfrak{A}$だけなのである。

この事実と主要定理とを結びつけて考えると，事はなかなか重大であることが解る。すなわちLKでは，ある矢式（むしろ定理）$\beta \to \gamma$が得られる以上，これは「切捨て」なしにも得られるのだから，$\beta \to \gamma$を得るために，βやγの中に出てこないような，今は消失したある式が本質的にきいているという状況は考えるに及ばないことになる。いいかえれば$\beta \to \gamma$を導くには，β，γの中に出てくる論理記号を関心の中心において事を運ぶだけでよろしいということになる。電子計算機に論理式の「証明」をさせるという試みは，日本でもかなり成功を収めているが，その際にも結論たる矢式だけの範囲で吟味すれば足りるというこの事実は，根本的な役割を果たしたのである。

Gentzenはこの事実を用いて，いろいろな論理体系の無矛盾性を示したり，数学的帰納法を用いないという条件の下での自然数論の無矛盾性を示したりした。

例えばLKが矛盾をもつということは，（□を空欄のしるしとして）矢式□ $\to$ A&(⁄A)が出てきうることと見てよいが，一方A&(⁄A)$\to$ □は容易に得られる式なので「切捨て」が使える場合には，これは矢式□ $\to$ □の出せることと同等になる。そこでもしLKから（「切捨て」を使ってでも）矢式□ $\to$ □が出たとなると，主要定理によって「切捨て」は使わずともすませられるはずである。しかし他方，$\alpha \to \alpha$の形だけからはじめて，「切捨て」なしに□ $\to$ □が出ようはずがない。したがってLKは矛盾を含み得ないわけである。

以上の考察が，記号を対象として行なわれ，しかも無限的対象を介在させないでいる，いいかえれば有限の立場を十分守っているということは，少し考えると明白であろう。例えば上のLKの無矛盾の証明では，背理法こそ使われているけれども，いっていることは，有限的個の段階からなる式変形の表があるものとしたら，その表は「切捨て」なしの（有限段階の）表に必ず直されるという事実である。すなわち“もしそのような表が実際にあったら”という仮定の下では，一つの矛盾が具体的に書き示されることになるから，背理法とはいっても，はなはだ有限的かつ具体的で，これは無限者に対して背理法を用いることを問題にする直観主義者をも説得しうべきものといえよう。

ともかくここにHilbertの意図を実現した一つの結果が示されているのである。

（なお Gentzen は Hilbert 学派の人であるが夭折した。第 2 次大戦の犠牲者である由を，清水達雄氏からうかがった。）

8.　前述のとおり，Hilbert の基本的な意図は，集合論の逆理に端を発した所謂（いわゆる）数学の危機に対処して（直観主義流の数学大改造はできるだけ避け），現にある数学を公理化し，その公理系に対してメタ理論的取扱いを施してその無矛盾性を示そうとしたものであった。有限の立場とはそのメタ理論の基本的態度に他ならない。

Hilbert がこの方針に基づいて，意欲的に連続体問題という集合論の大問題にいどんだ労作 “Über das Unendliche（既出）” は，皮肉なことに，Hilbert の意図を本来の意味ではうちくだき，基礎論を新しい進路にむけたようなある大きい仕事，すなわち度々のべた Gödel の “Über formal Unentscheidbare Satze…” を生む直接の機縁となったのであった。

正直のところ Gödel のこの仕事の大意を簡単に説明することはむずかしいので，ここではリシャール (Richard) の逆理との親近性を注意する程度に止める

Richard の逆理とは次の形で説明される。自然数のもつ性質 $\mathrm{P}(n)$ として無数のものが考えられるが，これをアイウエオ順か何かで，もれなく順番にならべる。

$$\mathrm{P}_1(n),\ \mathrm{P}_2(n), \cdots\cdots,\ \mathrm{P}_k(n),\ \cdots\cdots$$

例えば $\mathrm{P}_1(n)$ は「n は偶数」，$\mathrm{P}_2(n)$ は「n は素数」，$\mathrm{P}_3(n)$ は「n は 4 で整除される」……，などとする。今 $\mathrm{P}_k(x)$ で $x = k$ とおくと，$\mathrm{P}_k(k)$ は真か偽かいずれかである（上例では $\mathrm{P}_1(1)$, $\mathrm{P}_2(3)$ は偽，$\mathrm{P}_2(2)$ は真），そこでいま「この表で $\mathrm{P}_n(n)$ が偽となること」という性質を $\mathrm{Q}(n)$ と呼ぶと，この「　」内の言葉自身のアイウエオ順からいって，$\mathrm{Q}(n)$ もまた上記 $\mathrm{P}_k(n)$ の一つにあったはずである。これを $\mathrm{P}_l(n)$ とおき $\mathrm{P}_l(l)$ の真偽を考える。$\mathrm{P}_l(l)$ が真とは $\mathrm{Q}(l)$ が真なること，即ち「この表で $\mathrm{P}_l(l)$ が偽となること」が真であることだし，$\mathrm{P}_l(l)$ が偽とは $\mathrm{Q}(l)$ が偽，即ち「この表で $\mathrm{P}_l(l)$ が偽となること」が偽であることとなって，要するに矛盾に陥る。

容易に解るように，Richard の考察では，$\mathrm{P}_k(n)$ という自然数論の内部的「性質」と，自然数論を外部から考察するときの，$\mathrm{P}_k(n)$ の表現に関する「性質」とが混用されている。後者はむしろ上来説明したところをかりていえば「メタの性質」とでもいうべきものである。逆理の起こりがこの混用の中にあることはまずまちがいない処であろう。

Gödel は「内部的性質」と「メタの性質」とをいったんは明確に区別するが，Richard の逆理の場合と同様に，ある種の「メタの性質」を再び「内部的性質」に引きも

どしてみせる（このことの内容はすぐ後で触れる）。ただしその際，それが「メタの性質」の引きもどしであるということを十分注意して取扱うため，Richard の場合のような矛盾には陥らないですむ。即ち Richard の場合には，$\mathrm{P}_l(l)$ が“真ならんと欲すれば真ならず，偽たらんと欲すれば偽ならず”という，逃げ路のない矛盾に陥ったのであったが，Gödel の場合これに相当する事態は“$\mathrm{P}_l(l)$ が証明できると仮定すると，その否定の証明までできる；$\mathrm{P}_l(l)$ の否定が証明されると仮定すると肯定の証明までできる”となるだけで，結局，議論の出発点であるもとの公理系に矛盾がないという条件の下では，$\mathrm{P}_l(l)$ もその否定も共に証明不能であるとする逃げ路が残るのである[1)]。

上で「メタの性質」を「内部的性質」に引きもどす，といったことの具体的内容はほぼ次のとおりである：Gödel は一つの理論体系の中における証明手続きを，巧みに一種の数計算に直してしまう。すなわち，その理論体系の記号も式も，（記号化された）公理や定理もすべて，混乱の起こらないように数を使って現わしてしまい（Gödel 数），甲の定理から乙の定理が出るときには，前者に対応する数から後者に対応する数を計算できるように工夫しておくのである。こうして“これこれの式からこれこれの式を出す”ことや“証明可能な定理”などの種々の「メタの演算」や「メタの性質」は，ある種の数の計算や数の集合などで置きかえられ，次いで（もし始めの理論体系が自然数論を展開できるに足るものであったならば），自然数論の内部の性質とみなされるという次第である。

Gödel はこうしてこのような「決定不能」の定理の存在を示したのであるが，更にこれに基づいて次のような重要な定理を証明した。すなわち，自然数論を展開しうるだけの力のある公理系がもし無矛盾であったとして，さてそれが無矛盾であるという事実を，その公理系で許される操作だけを用いて証明しようとすると，いかに工面してもそれは不可能であるという定理である。要するに外からの弁護がないと無矛盾性の（絶対的な）証明はできないというわけである。

このように Gödel の理論は今日の基礎論の事実上の出発点ともいうべきものであり，その紹介は少なくないが，

Kleene: Introduction to Metamathematics（メタ数学序説）(1952)

Mostowski: Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic（形式化された数論における決定不能命題）(1952)

の二つは特にすすめられる。前者は記号論理学の初歩から書かれていて，今日の

[1)] ）正確にいうと，Gödel の原論文では，もとの公理系は単に矛盾がないというよりも，もう少し強い条件（ω 無矛盾）を受けているが，後には単なる無矛盾というだけの条件で，この定理は証明されているから，ここで述べたような言い方をしても，まちがいではない。

基礎論の一つの標準的な入門書である。

9.　前節で述べたのは，Hilbert の当初の目標であった無矛盾性の証明が，絶対的な意味では不可能だということであった。そこで相対的な意味での無矛盾性の証明というものが改めて大きい意義をもってくるわけである。

この方面ではまず

Gentzen: Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie（自然数論の無矛盾性）Math. Ann. 112. (1936)

Gentzen: Die gegenwartige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlen Theorie（数学基礎論の現状，自然数論の無矛盾性証明の新説）(1938)

が注意すべき論文であろう。これは集合論の中から，自然数論を超えてはいるが明確なものと目される対象（ε 数の理論）をとって，それのもつある種の性質を承認すれば，自然数論の範囲で矛盾が現われないことを説いたもので，これは基礎論の一つの方向を示している。竹内外史氏の「一般論理計算（GLC）」の理論はこの方面の優れた業績に属する。（→補註 1）

これと別に，

Godel: The Consistency of the axiom of choice and of the continuum-hypothesis with the axioms of set theory（集合論の公理と，選択公理，連続体仮説との無矛盾性）(1940)

はまた一つの相対的な無矛盾性証明の一つの型を代表する。これはそこで公理的に述べられた集合論（これを Σ とよぶ）がもし矛盾を含まないならば，その公理系にもう二つの新しい公理を添加した公理系 (Σ^*) でも，矛盾が起こる心配はないということを証明している。いいかえれば，もし矛盾があらわれたら，その矛盾は添加以前からあったものだということを示したのである。新しい公理とは，一つは以前から議論の多かった選択公理と呼ばれるもの，他の一つは Cantor 以来未解決の難問である連続体仮説である。

大体の論法は次のとおりである：まず Σ で定義される集合の中から，ある種の集合を特にとり出して，その全体を Δ と名付ける。Δ を作るのに用いられる手続きはすべて Σ において許されたものであるが，巧みな作り方のために，Δ は集合論 Σ に対する一つのモデルになっていることが証明される。すなわち Δ だけを「集合」の世界だと見ても，Σ の公理はすべて満足されていることが確かめられるのである。更に Δ は実は選択公理と連続体仮説とを満足するようにもなっ

ている。証明はこの Δ を鍵として展開される。すなわち，もし添加後の公理系 Σ^* が矛盾を含んでいると仮定すると，その矛盾は当然 Δ の中にも現われるはずである。ところが Δ を作るのに Σ の公理以外のものは使われていなかったので，その点からいうと，Δ の中の矛盾は実は Σ の公理だけから出たものでなくてはならない。結局，Σ^* に矛盾があれば Σ にすでに矛盾があるわけであり，対偶をとれば，Σ に矛盾がなければ Σ^* にも矛盾はないことになる。

この Gödel の "Consistency…" も，その後の多くの業績の手本となったもので，この書物から入るのも一つの標準的な基礎論入門の途である。例えば 1963 年の有名な Cohen の論文とその後の動きを追うための第一歩も，この書物であろう。もっとも Cohen の業績はその 32 年前の Gödel の仕事にも比すべきもので，これが今後に及ぼすであろう大きい影響については別に十分の考慮を要しよう。（→補註 2）

III　より高い歴史的視野から

10.　基礎論の現代史を概観するについて，この現代史が永い数学の歴史において，どのような意味をもつかというような問題も，なかなか重要である。もっとも，この種の問題に明解な答はありうべくもないし，第一，今現に闘争中の問題を，下手に歴史の中で考えるというのは，余程の力量を以てするのでなければ，むしろ滑稽極まる話になりかねない。しかし問題を限定して，現代が過去といかなる点で違っており，またいかなる点で似ているか等の点を検討することは，やり方によっては学問の進歩に対して積極的な意味をもつこともあるであろう。以下はそのようなことを頭においた上での，筆者の覚え書き的未定稿である。

現代の基礎論を貫く大きい傾向として，まず数論化ということが挙げられよう。数学を，そこに用いられる論理の働きまで含めて数論化し，§8 のような意味でメタ理論の（通常的）理論化をはかるということは，Gödel の理論の際立った手法であった。しかしひるがえって考えるのに，このような数論化の傾向は必ずしも 20 世紀になって俄かに起こったものではない。われわれは現に 19 世紀後半に遡って Dedekind や Weierstrass，またその世紀の前半に遡って Gauss や Cauchy というような，いわゆる解析学合理化の動きに貢献した人びとの中に，同じような数論化の傾向を見出すことができるのである。

このような数論化の傾向は，いいかえれば連続の回避であり，また幾何学による数学の基礎づけという方向での，ギリシャ以来 17 世紀頃まで行なわれた理論構成を回避することにもつながるであろう。ところでここにおもしろいのは，同

じく連続の回避と見られる古典ギリシャ数学では，数論よりは幾何学に学問的重点がおかれたらしい形跡があり，またそれを継承したと見られる 17 世紀前半の数学でも，幾何学的方法は去尽法 (method of exhaustion) などの形で，ある時代まで（恐らくは Wallis まで；Huygens はその反対者らしい），承けつがれていたと思われる点である。連続が問題の種であることは，ギリシャ時代，17 世紀，20 世紀と，いずれでも等しく見られることであるのに，20 世紀ではこの点で特に徹底した数論化の方向がとられている。これはどう見ても現代の一つの特色といえるのではあるまいか。このことに関連して今一つ付け加えたいのは，例の Gödel による論証過程の数論化である。われわれの論理的推論過程は思考内容の連続的変形ではなくて，論証という不連続的な歩みの形をとって行なわれる。この点に関する限り，数学を基礎づけるのに数論的取扱いを以てするというのは，連続的取扱いを以てするのよりも，ずっと適当であると思わざるを得ない。

11.　それにしても，数学の基礎づけに対するいろいろな時代のいろいろな態度について，比較検討を試みることは，極めて興味ある課題である。この方面には

O. Becker: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung,（数学の基礎，その歴史的展開）(1954)

のような優れた著述もあるけれども，率直にいってこれでは既にやや古いのではないか。基礎論の現代史においても，古代数学史においても，筆者はこれに多少の不満を禁じえない。Becker の学殖にとやかくいうのではない。事ほどさように現代の学問の動きが激しいのである。少なくとも，バビロニア代数学からピタゴラス学派やエレア学派を経てエウクレイデスの「原論」に至るギリシャ幾何学の形成史，ないしそれと平行して行なわれたらしいギリシャ的連続理論の形成史，次いで 17 世紀に降って，最近ようやく研究が緒についてきたばかりの微分積分学前史，そして拙論で説いた Hilbert–Gödel 的，或いはむしろ Gödel 的な現代の数学基礎論の歴史，これらは Becker の著の視野に新しく取り入れられるべき重要な要素であろうと思われる。(→補註 3)

12.　Cantor 的な実無限 (das aktuelle Unendliche) の評価についても，基礎論の展開に伴う新しい視野が要求されると思われる。

かつて Cantor は実無限を論じて，“神性において実無限を認めるか否か，客観的・物質的世界において実無限を認めるか否か，人間の主観的・精神的活動において実無限を認めるか否か，この三つの問に対する諾否によって，古来のあらゆ

る哲学思想は $2^3 = 8$ 個の範疇に分けられる” と論じ，それにつづけて，“この三つの問にすべて肯定を以て答えるのは自分が恐らく最初であろうと思われるが，しかし自分の後には多くの人が続くであろう” と述べたことがある。(Cantor: Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche．実無限に関する種々の見解。Ztschr. f. Philos. Kritik Bd. 88. 1890)

Cantor のその時代の常識に対する闘争は今ではかなり広く知られているし，しかも数学界のその後の趨勢は，彼の言葉を裏書きするかのように見えたことであった。しかし今日は実無限について，或いはむしろ無限なるもの全般について，再び深刻な反省が要求される時代ではないかと思われる。少なくとも，§9 でのべた Cohen の仕事，上では触れなかったが，それに先駆した Skolem の（可付番モデルに関する）仕事などに関連して，そのようなことが考えられるのである。

13.　最後に数学的認識における人間的要素の介在を，どのように考えるかという問題もある。考えてみると 20 世紀においては，まず物理学の内部において，観察ないし操作する主体としての人間の役割が指摘された。すなわち特殊相対性理論における観測者の意義，量子力学における観測の理論などがそれであって，いずれも前時代までの超人間的実在に関する物理的理論と大幅なちがいを示している。

ここでわれわれは再び Gödel の「決定不能定理——Unentscheidbare Satze ……」を思い出す。ここでは超人間的な真偽の代わりに，人間が書き記すある体系と，その体系からの演繹可能性とが取り上げられている。これはやはり超人間的な真偽を論じたらしい前時代までの数学とは本質的に異なっている。少なくとも，公理というものの性格を従来の絶対的な位置から相対的な位置に引き下げた，例の非ユークリッド幾何学の意義にも擬すべき歴史的意義が，Gödel のその仕事には認められるように思われるのである。このようなことが過去にあったかどうかを筆者は知らない。しかしこれが広く数学者の社会に容れられ，数学的理論としての今日の基礎論を支えてすらいるという事実は，たしかに現代数学の最も顕著な特色の一つであろうと思われる。

14.　実をいうと筆者は従来，歴史における現代というものの価値を，過大に評価すまいと自制するのに急であって，どうかすると現在目の前で行なわれている事件を過小に評価する傾きがあった。評価の定まった古典に対する事大思想はなかったと思いたいが，なかったといい切る自信は必ずしもない。しかしこの頃

になって数学の歴史を考えているうちに，学問の進歩は極めて短い時日の間に飛躍的に行なわれることの多いものであることに卒然として気付いた。プラトンの学園，アルキメデスの前後，15〜16 世紀から 17 世紀……と見てみると，それらの真に飛躍的な時日は意外に長くはないように見えるのである。われわれの基礎論現代史も，恐らくはその類いのことであって，この後もかなり長い期間にわたって一つの歴史的—学問的ピークを形づくるものであるような気がする。Gödel の 1931 年の論文から Cohen までの三十余年は，数学数千年の歴史に比して短いともいえるけれども，プラトンの学園におけるエウドクソス，テアイテトスの仕事の前後 2—30 年の動きも，年月としては決して長くはない。しかし時流の激しさにおいてそれとこれとには或いは相通ずるものがあったのではないか。ガリレイの『新科学対話』（1637 年）から，ニュートンの『プリソキピア』（1686 年）に至る半世紀もほぼこれと同様である。われわれは実に遭いがたき時にめぐりあっているという思いを禁じえない。このような雑文がきっかけとなって，遭うて空しく過ぐることなかれという課題を自らに課する人が一人でも出られるならば，筆者にとって望外の喜びである。(1965.11.23)

（補註 **1**）1967 年 5 月の日本数学会の特別講演で，高橋元男氏（教育大大学院在学中）は，この方面において極めて優れた仕事を発表された。

（補註 **2**）Cohen の仕事の意義はその後いよいよ，その重さを増しつつある。第 9 節で述べたような公理論的集合論のモデルとして，いわゆる可付番モデルがとれるということは，一見まことに逆説的であるが（Skolem-Löwenheim の逆理），実はまちがいのない事実である。Cohen はこの事実から出発し，独特の新しい方法 (Forcing) を開拓して，集合論に残された多くの問題を解決した。すなわち選択公理や連続体問題（第 9 節）その他，従来，未解決であった多くの問題について，それらが実は集合論の公理から独立であって，いわばユークリッド幾何における「平行線公理」のような立場にあることを，その新しい方法によって示したのである。

これが数学的にはもちろん，第 13 節で述べたような見地からしても，今後に極めて大きい影響を与えるような古典的業績であることは，既に十分確立されたと思われる。次にその代表的な論文と，やや解説的な書物を挙げておく。

P. J. Cohen: The dependence of the Continuum Hypothesis I, II. (Proc. Nat. Acad. U.S.A., vols. 50, 51, 1963–64)

P. J. Cohen: Set Theory and the Continuum Hypothesis, 1966, Benjamin 書店発行。

（補註 **3**）少なくとも，古代史における B. L. van der Waerden および特に Á. Szabó の仕事，近世史における Whiteside の仕事などは忘れてはなるまい。

B. L. van der Waerden: Science Awakening, 1952

Á. Szabó: Anfänge des euklidischen Axiomensystems. (Arch. f. Hist. of exact Sc. vol. 1, 1961.) その他，論文あり。
D. T. Whiteside: The Patterns of the Mathematical Thoughts in the later Seventeenth century. (Arch. f. Hist. of Exact Sc. vol. 1, 1961.)

（1967 年 5 月）

本 PDF は,

『教師のための数学史講座　第 1 集』(富士短期大学出版部, 1967 年 7 月) 所収を元に作成したものです。

村田全先生のその他の著述は
科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」
http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html
に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内, その他「科学図書館」に関する意見などは,
「科学図書館掲示板」
http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs
を御覧いただくか, 書き込みください。