数学史における逆説の役割

村田　全

ここでは「逆説」がきっかけとなって現れた数学史上の革命的転換を二三の実例によって示そうと思う。私はこの背後に将来の課題として，一般に逆説が数学の上に果たした積極的な役割を考え，むしろ，人間の知的活動の一つの頂点としての数学は，実は逆説的な性格を本質の中に持つ学問なのではないかという意識さえ持っている。後者はその当否自体を含めて人間の知的活動の根元にまで遡って系統的に考えてみる値打ちがあるように思うが，今のところはせいぜいこれについて二三の私見を述べるに止めざるをえない。
今回，1985 年の旧稿を全面的に改稿し，補説を加えた。

1 概　説

試みに手許の日常用辞典（『広辞苑』第 2 版，『新英和大辞典』第 5 版など）を見ると，「逆説」即ち「パラドクス」(paradoxe) の大意は

(1°)　普通に真理と認められていることに反する説，

(2°)　一見，真理に反するようで実は真理である説，

(3°)　外見上，同時に真であり偽である命題，

などである。逆説は元来論理の問題で，そこでは真偽が厳格に区別されるから，「外見上」という断りがなければ (3°) は矛盾そのものである。むしろ

(4°)　相互に矛盾，対立する二つの命題が同じ権利を持って主張されること，つまり「二律背反」(antinomy) の状態にある命題，

即ち言語の自家撞着の問題として捉えるのが明快であろう。その場合 (3°) は，(4°) でなければ，真偽の確定できない不確定的要素を持つ命題と考えうる。

以下では「逆理」を (3°) または (4°) の意味に使い，「逆説」はこれらを含む総称の意味に使う。また「二律背反」は使わない（補説 1 参照）。次に逆説として直ちに思いつく例を二三挙げる。

1-1 (1°) の例――ゼノンの逆理――

「普通に真理と認められていることに反する説」の典型的な例はゼノンの逆理であろう。これには多くの議論があるが，運動という明瞭な経験的事実を理屈の上で否定して見せたものとすると (1°) 型の逆説，というより詭弁の例になるが，(4°) 型と見る意見もある。しかしその論理のどこがいけないか，またその目的は何だったかなどと本気で考えると，意外に難しくなって古来多くの学者を悩ませ

てきた。そもそもその目的が，運動の否定論なのか多者の否定論なのかも分からないため，アリストテレスの『自然学』などの古い史料に色々な解釈を補わねばならず，今も甲論乙駁が絶えない。(拙著『数学史の世界』所収「ギリシア数学史におけるゼノン」参照，また山川偉也『ゼノン 4 つの逆理』(講談社，1996) は独自の優れた見解が示された好著である。)

ここであえて私の現在の意見を述べれば，この逆理は，人間の意識の流れのような根元的「連続」を，跳び跳びの区切りを本質とする論理的言語によって表現ないし分析することの難しさを示すもので，音韻やニュアンスを重んずる詩的言語の類ならいざ知らず，数学を頂点とする論理的言語の限界を示すもののように思われる。(本書のあちこちで触れるように，これは数学や言語に関する私の考えの基本線である。)

早い話が「二分割」と「アキレスと亀」は，運動なる現象の言語的表現ないし分析には，近付けそうで近付けぬ「無限」の距離が残ることを，また「飛ぶ矢」と「競技場」には，仮に運動が言語の上で要素に分解されたとしても，その要素から運動を言語的に再構成するのに無限の距離が存することを，それぞれ示している。なお，この初め二つのような無際限な思考列に陥る逆理を，ゼノンの逆理を含めて，しばらく無限追跡型の逆理と仮称する。

1-2 (2°) **の例——無限集合——**

「真理に反するかに見えて実は真理」という (2°) の型の逆説は，経験や直観から独立に展開される純粋数学にも，歴史の中に時折現れて或る種の役割を果たすことがある。近代の微分積分学などに例があるが，それは後に回し，手近なところで集合論でいう一対一対応を挙げる。

例えば自然数の全体 N と偶数の全体 P とは ($n \leftrightarrow 2n$ と) 一対一に対応付けられ，それによって N と P は同一の濃度をもつ，つまり無限的同数とされる。しかし N の一部たる P が N と「同数」であるというのは奇妙なことで，ユークリッド『原論』の公理「全体は部分より大きい」という「真理」に反するかに見える。しかし濃度の定義を認める限り，これも，奇妙だが真理とせざるを得ないのみでなく，現代数学におけるその効用は極めて大きい。

例えばルベーグの零集合の定義などはそれに当たる。閉区間 $[0,1]$ の有理点を

$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n, \cdots\cdots$ と並べて固定し，r_1 の左右からそれぞれ $\dfrac{\varepsilon}{2}$ の小区間を除き，以下，r_n の左右から $\dfrac{\varepsilon}{2^n}$ を除く。有理点は稠密(ちゅうみつ)にあるから，$[0,1]$ のすべての点はこの操作によって除かれると思うのが直観的な常識であろう。ところが可算集合とともに無限等比級数の和の定義を認めれば，除かれる区間の和は高々(たかだか)，初項 ε，公比 $1/2$ の等比級数の和 2ε となり，ε の値はいくらでも小さく取れるから，残る無理点は無限にあるという「非常識」な結果になる。ルベーグ測度論では点集合を覆う小区間の総和がいくらでも小さくできるとき，それを「零集合」と呼ぶが，これには非可算集合の例もあり，ルベーグ積分論において極めて大きな役割を果たす（「フランス経験主義の数学思想」補説 3）。

別の好適例として数理論理学でスコーレム - レーヴェンハイムの「逆理」と呼ばれる定理があるが，専門的になりすぎるから補説 2 にまわす。

1-3 (3°) **の例——無限列車の逆理——**

(3°) の型として無限列車 S の逆理が挙げられよう。（これはラッセルの出した逆理の一つと記憶するが，出典は覚えていない。）

S は機関車 $L(=C_0)$ の引く無数の客車 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n, \cdots\cdots$ の列で，各車輛の連結部に隙間があるため，一つが動いて次が動くまでに少し間があく，S が停車中で L が発進するとき，S 全体は動くか動かないか，これが「逆理」になる。

先ず「‘C_0 は動く’ と ‘C_n が動けば C_{n+1} も動く’ から全ての C_n が動き，従って S 全体は動く。」他方，‘C_n が発進すれば C_{n+1} も発進するが，その間少し間があく’ を $F(n)$ とすれば，「‘$F(0)$’ も ‘$F(n) \to F(n+1)$’ も正しいから，$(\forall n)F(n)$」がなりたつ，つまりどの C_n の発進直後に必ず停止がある。ここに「C_0 は発進する」を追加すると，どの C_n の発進の前にも停止が入る。つまり S 全体は動かない。」

共に数学的帰納法を使いながら，この「矛盾」は極めて微妙である。それは先ず，「無限列車が動き始める」の定義をどうすべきかの問題で，こうなると「無限系列」なるものがわれわれに本当に分かっているかさえ心許なくなってくる。（仮に C_n の発進と C_{n+1} の発進の時間差が $\dfrac{1}{2^n}$ とすると，計算上 S は有限時間内に動くはずなのに第二の論法では S が動き出さない!?）それ以上に私には停車中の列車 S は見える気になれても，S 全体の発進は見える気がしないのである。

この状況の原因は，純数学的な理論の中に時間という直観的な要素が介入して，

そこ無限の時間が現れるためかと思われる。(たとえ間隔が $\dfrac{1}{2^n}$ の場合でも，無限級数の「和」とは極限値という規約であることも考えてよい。)

数学的帰納法がまっとうに使えるのは，この論法の使える範囲を「自然数」と呼んだデデキント的自然数の世界——そこには時間などは介入しない——だけである。その世界を離れると，数学的帰納法の使用で自然数全体を論ずるというのはまだ不十分なのである。

実はこの微妙な状況を積極的に活用した例がある。ゲーデルはその決定不能定理(『数学と哲学との間』付録 1「ゲーデルの決定不能定理」)の証明を，考えている公理系 K が $\omega-$ 無矛盾との条件の下で証明している。$\omega-$ 矛盾とは，K における自然数に関する或る命題 $P(n)$ について，'おのおのの n について $P(n)$ であることは証明できるとともに $(\forall n)P(n)$ の否定も証明される' 場合を言い，そのような $P(n)$ が存在しないときを $\omega-$ 無矛盾と呼ぶのである。

時間などの介在こそないにせよ，この条件は無限列車に見られる微妙な間隔を衝いた巧みな条件と見られるであろう。

1-4 (4°) **の例——集合論の逆理——**

現代数学で一番注目されるのは (4°) の「逆理」だが，これにも古い例がある。クレタ島の人エピメニデースが「クレタ島の人の言うことはみな嘘だ」と言ったという有名なエピメニデースの逆理がそれである。これは端的に言うと「私の言うこと全て嘘」(立言 K と略) と言うことで，この一言だけでも，K が嘘でなければ自家撞着，K が嘘なら「私の言うこと必ずしも嘘ばかりではない」となってこれまた自家撞着，進退ここに窮まるわけである。

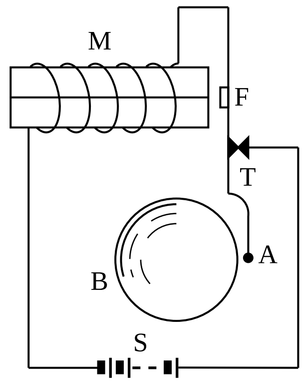
近年の例でこれに似たものに床屋の逆理がある。床屋が「自分では調髪できないものだけに限りその頭を刈れ」との命令を受けたとすると，客がいてもいなくても，自分の頭を刈っていいのか悪いのか。彼はバリカンを上げかけては下し，下ろしかけては上げるという無窮動を始めてパニックに陥るであろう。

今世紀の初めに数学を根底的に揺るがせた「集合論の逆理」はこれらと同類で，次のラッセルの逆理などはさしずめエピメニデースの現代版である。

「集合を，自分自身を元として含む $M \in M$ 型(例：抽象的対象の集合)と，そうでない普通の $M \notin M$ 型の 2 種に分類するとき，後者の全体 $\boldsymbol{M}$ はどちら

の型としても（$\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{M}\rightarrow\boldsymbol{M}\notin\boldsymbol{M}$かつ$\boldsymbol{M}\notin\boldsymbol{M}\rightarrow\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{M}$という）矛盾に陥る。」

これらの逆理は電鈴（電源Sから電流が流れると電磁石Mが鉄片Fを引きつけてベルBを叩き，同時に接点Tが外れて電流が切れる。すると腕Aが戻ってTがつながる。以下この繰り返し）に譬えられ（第1図），仮に電鈴型と呼ぶ。



第1図

集合論の逆理では，超限順序数の全体Wに関するブラリ・フォルチの逆理も良く知られている。超限順序数αはα未満の順序数を大小順に並べた整列集合の順序型として表され，αはそれらのどれより大きい直後の順序数となる。ところがW自身も順序数の整列集合になるので，その順序型は「すべての順序数」のどれより大きい順序数となって矛盾を生ずる。

これは先の無限追跡型の逆理と見てもよい。ただし順序数形成の手続きに注目すれば，同様の手続きの反復だから電鈴型と見てもよく，電鈴型も時間的に考えれば無限追跡型になる。要するにこの区別は特に大切ではなく，本質は，同一過程が（もっとも，何が同一かには問題があるが）無限に空回りすることによって論理が自縄自縛に陥ることである（補説3）。

集合論の逆理は，絶対的真理の体系と目されてきた数学に内在する矛盾と見られて，当時の数学と哲学に極めて深刻な衝撃を与えた。しかしこれに応じてやがて公理的集合論や数学基礎論が誕生し，少なくともそれは「数学」そのものの内包する矛盾ではなく，そこに用いられた集合概念の曖昧さによるという認識に達した。即ちエピメニデースのK，調髪不能な人の集合，ラッセルの集合M，或いは順序数の全体Wなどを，明確に定義された真正の集合ではないとして斥ければ，一応解消される。これが現代数学の拠って立つ立場である。この件は後でまた取り上げる。

1-5 逆説と無限

それよりもここで注意したいのは，無限の追跡が人間に実行不可能なのはもとより，実際の電鈴も電源Sの枯渇，接点Tの劣化などのため，その運動はいつか終わるし，床屋もその内に投げ出すのが落ちだが，言葉・論理という働きはそのよ

うな制約を持たず，言葉はいつまでも存続し，論理は頭の中で終結することなく続けられる，少なくともそう見ることができるという事実である。数学的に見れば当然のつまらないことのようだが，私はこれを，理念の世界にある純粋数学と経験的現実の世界における知見とを分かつ本質的な点の一つと考えている。これは，先にゼノンに関して論理的言語の限界を云々したとき，私の考えの底にあった考えでもある。

このように純粋な論理的世界に現れる逆理は，言葉の呼び出す対象をそのままに解して固定し，それに杓子定規に論理を適用して無限の空回りに陥った自縄自縛の状況である。ところがその半面，数学の最も数学たる所以(ゆえん)は言葉が明確に固定した安定した対象を，きまじめに論理によって処理する学問であり，しかも言葉も論理も（言葉の意味や論理の根拠を究極的に確定しようとすると無限背進に陥ることを始め）しばしば無限に直面するから，数学は常に逆理という深淵に危うくも接している学問と言える。というよりも，理論的学問としての数学は独り集合論的無限に止まらず，大きさのない点，無限小数，無限数列など，無限にまつわる畏怖すべき事柄を有限の言葉に託して平然と（!?）扱うという逆説的な性格を本領とする学問であり，もっと強く言えば，その逆説性を前面に押し立て，経験を超越した擬制的存在を理念の世界の中に構築している学問なのである。

20 世紀前半の大数学者ワイル (H. Weyl, 1885–1955) は「数学は無限の科学である」といったが（『数学と自然科学の哲学』第 1 部第 2 章），この章句はこのように数学の逆説性と結びつけて解するとき最も適切であろう。

2 一対一対応の逆説性

数学史には（広義の）逆説的状況が時として数学に根底的変化をもたらし，その性格まで革命的に変えた例がある。一対一対応の逆説性にしても集合論の普及とともに常識化し，特に逆説として意識されなくなってはいるが，それがもたらした革命的変化を再評価する意味で改めて考えてみよう。

18 世紀の数学者・哲学者ボルツアーノ (B. Bolzano, 1781–1848) は遺著『無限の逆説』（1851；藤田伊吉訳，1978，みすず書房）によってカントルに大きな影響を与えた。彼は「二つの無限集合の間に一対一対応が付くとき，両者の元の個数は‘相等’と見なしうる」ことを指摘してカントルを先駆したが，同時に，一方の集

合で若干の元を留保して考えてもやはり一対一対応が付けられることを指摘して，「両者の元の個数は相等とも不等とも見なされる」（正に逆説！）とも述べた。一方，カントルは「両集合の間に一つでも一対一対応が付けられれば，その濃度は等しい」とした。この差は一歩というには余りに飛躍的である。

これに似た例はガリレイ (G. Galilei, 1564–1642) の『新科学対話』（1638；今野武雄，日田節夫訳，岩波文庫）にもある。この話はよく引用されるが，時にはガリレイが集合論的論法を肯定していたかのように解説した例もある上，新旧の思想的基盤の交代の雰囲気を伝えているので，彼もそこまでは行っていなかったことを注意しておく。これは時代精神の質的変化の一例であろう。文中の「数」は自然数，サルヴィヤチは新科学の，シンプリチオはスコラ科学の，またサグレドは知識的市民のそれぞれ代表で，「第一日」の対話である。

サルヴィヤチはシンプリチオの問いに答えて，

> 「無限にまつわる議論の難しさは，われわれが有限の知力をもって無限を論じ，有限なものについて知っている性質を無限に押しつけることから生ずることで，大小，相等などの性質は無限者には通用しない」

という意味のことを述べる。無限に対するこの姿勢はボルツアーノ的ではあっても，カントルと違って消極的だが，ここで 4，9 などの平方数と，3，5 などの非平方数を持ち出してシンプリチオを混乱させる論法がカントルと似ているのである。

サルヴィヤチは一応

> 「すべての数は平方数より多いと断定して良いでしょう」

と言い，シンプリチオの肯定を待って，

> 「それでは平方数はいくつあるかと問えば，その根の数だけあると答えるでしょう。……しかしいかなる数も或る平方数の根と考えられる以上，それは数の全体と言わざるをえません。……最初，数の大部分は平方数でないと言いましたし，平方数の密度は範囲を大きくすればするほど小さくなります。百までには十個の平方数があり全体の $\frac{1}{10}$ を占めますが，百万まででではたった $\frac{1}{1000}$ になるのに，それでも無限数までの間の個数を考えるとすれば，数全体と同数の平方数があると認めざるを得ないのです」

という。そこで市民の代表サグレドが

「そうなると，結論は一体どうなるのでしょう」
との問いに対するサルヴィヤチの答が上の引用であり，次の結論なのである。

「私に言えるのは，全ての数の全体は無限，平方数の個数も無限，その根の個数も無限で，平方数の個数が全ての数の全体より少ないとも言えないし，後者が前者より多いとも言えない。結局，「等しい」「多い」「少ない」などの属性は有限の量にあるだけで，無限の量にはない，こういうことだけです」

この否定的な意見が「新科学」の代表サルヴィヤチの意見なのである。自然数全体と平方数全体との逆説的状況は同じであるにもかかわらず，一方はこれを否定のままに解し，カントルは肯定的に解して積極的に濃度の概念を打ち立てる。われわれはこの違いの背後にカントルの飛躍の大きさ，むしろその困難さを改めて認める。（なお，平方数の集合の密度の問題は集合論とは別に，素数分布の問題として現代の解析的整数論で取り上げられている。）

このガリレイの議論は幾何学と機械学の関係から出発し，機械の強度のような実際的問題から「真空」に関連する自然哲学的考察にまでまたがるもので，無限，不可分者，運動などのことが吟味されるのもこの脈絡においてでである（補説 4 参照）。そしてこの議論の背後には，アリストテレスを継承したスコラ的自然哲学に対抗して，やがて今日の物理学につながる新しい自然哲学の構想という大きな意図があり，無限に関する考察もまたその同じ線上にあるのである（「『数学』の概念と数学史への視点」補説，「科学革命について」参照）。

ついでながら，この引用の少し先には，連続体の可能的な無限の分割と完結的無限への分割というアリストテレス以来の問題に関連して，「有限量と無限量の中間にある第三の量」への言及がある。「連続体に含まれる有限部分の個数は有限か無限かと訊かれたときに最も良い答は，それらの数は有限でも無限でもなく任意の数値を取りうる量とすることだ」というサルヴィヤチのリマークがそれで，数学史的にはカントルとの関連よりもこの方が意味深いかもしれない。それは，まもなく固まる変数の考えの先駆と見られるからである。

ガリレイどころではない，実はカントルの集合論の同時代にもガリレイのように，カントルに似た出発点から正反対の方向に論を進めた例がある。新カント学派のフランスでの指導者ルヌヴィエ (C. Renouvier, 1815–1903) の「量の無限に関

する覚え書き」(Note sur 1'infini de quantité, *Critique philosophique*, 1877) がそれである。当時彼は同誌に百余頁の論文「形而上学の迷宮 (Labyrinthes)——無限と連続——」を連載し (1876–77)，ゼノン以来の問題をライプニッツ，カント以下，哲学，数学，自然科学等について検討していたが，主題は数学的無限小，自然学的原子論に限られ，当然カントルの名は現れない。しかしルヌヴィエの与えた「多者」の定義には，二十年後のカントルの「集合」の定着（「超限集合論の基礎付け」，1895–1897）と通うものがある。次に両定義を並べてみよう。

「私が‘与えられたもの’(chose donnée) と呼ぶのは，それと同じ性質または別の性質を持つ他のものと判別され，かつ空間，時間，或いは単に思考の中でその存在が定義されるような任意のもののことである。与えられた集合または多者 (multitude) とは，与えられたものの集合または多者のことである」(ルヌヴィエ，1877)	「われわれが‘集合’(Menge) と呼ぶのは，われわれの直観または思考の対象で他と明確に区別されるもの m を，一つの全体にまとめた各々の M のことである。(m は M の元と呼ばれる)」(カントル，1895)

この二つの文はかなり似ている。カントルはその二十年の間，時折ルヌヴィエに言及しているから，カントルがその文章に影響されなかったとは言えない。しかし二人はこの先，右と左に分かれる。カントルはここから超限集合論を始めるが，ルヌヴィエは上文に続いて「実無限」(l'infini actuel) を定義し，実無限存在の仮定は自家撞着だとするのである。根拠はガリレイの場合とほぼ同じである。

この差を，例えばユークリッドの公理「全体は部分より大なり」を取るか無視するかに置くのは，説明としては当たっていても突っ込み不足の感は否めない。実際，この公理は穏当なものだけに，カントルがそれを捨てた事情にこそ，現代数学の革命の機微があるはずだからである。

幸いにして，彼が当時もっていた考えの動機，発展経路，更にその間に周囲から与えられた批判とそれに対する反論などまで，論文「無限線状点集合について (1)–(6)」(1879–1884) その他によって見ることができる。詳細は「カントルにおける数学と哲学」に委ねるが，根本は「数は有限に限るのでなく，無限の数もあ

る」という彼の確信であるように見える。

もっとも，その確信の生まれた経路までは判然としない。その第一の要因は点集合論 (1872) や超越数論 (1874) 等での成果だが，その背後には神学，形而上学，自然哲学などの要素が働いていたかもしれず，それは彼の幼い頃からの家庭環境や学歴にまで遡るように見える。ただこの種の哲学的要素が彼の創造の真の原動力か，それとも数学的成果の上に立つ後知恵かははっきりしない。

確かなことは，彼が 1883 年にアリストテレスを批判して「そこで無限なる数の存在が斥けられた根拠は，数には有限しか存在しないという論点先取にある」と述べ，そこから超限数論の哲学を始めたことだけである。論点先取となれば，カントルについても「数は有限に限らないことを前提にして超限数論を展開している」との批評は避けがたいから，これは結局，二つの論点先取のぶつかり合いになり，最後はそこからの積極的な成果の問題に帰着するであろう。これはカントルを先導したデデキント，或いは彼らを継承したヒルベルトなどの人たちの力である。しかしそれにしてもカントルの「回心」の真の原因となると，今のところ，それは彼の天才的で確信犯的な信念だったとせざるを得ない。

なお，カントルの議論の'確信犯的'な性格については，可算濃度に対する連続体の濃度の導入についても明瞭に見られる。実際，連続体濃度が可算濃度より「大きい」ことの内容は，実数全体が可算だとすると矛盾を生ずるという否定的な事実だけで，これを連続体濃度なる一種の数に転換したのは，そのような無限態の勘定が前もって存在するとした信念の他にない。

ところで，このカントルのような開き直りは数学史のいくつかの段階で現れている。次にはギリシア数学と近世数学の中からこれに類する例を見ようと思うが，その前に現代数学の基礎付けを巡って一瞥しておこう。

3 エピソード——数学の基礎付けについて——

数学は昔から普遍的絶対的な真理の典型と考えられ，これは特に西洋哲学において，人間の真理認識の可能性の問題と絡んで極めて重大な意味を持っていた。

デカルトもスピノーザもまたカントも，論理とともに数学を不動で普遍的な真理として，そこからそれぞれの学問論を始めている。しかし無限集合の採用が逆理を生み出して以後，数学的真理に対する信頼は大幅に揺らぎ，色々な試みが行

われた。ヒルベルトを中心にした無矛盾性の証明の試みはその一つで，今日の数学基礎論はその保証を求めて出発した (「数学における無限と有限の弁証法)。しかしその結果得られたものは数学にも原理的な限界があるという認識である。例えば数学で普通に用いられるどんな公理系も，自然数の理論が展開できる程度の広さを持つ限り，その無矛盾性を自らの体系内の道具で証明することは原理上不可能だというゲーデルの「決定不能定理」（1931，『数学と哲学との間』付録 1「ゲーデルの決定不能定理」参照）はその例である。そして私は今密かに，論理ないし言語にもその種の制約がありはしないかと疑っている。

早速断っておくが，この数学の制約はあくまで矛盾の可能性を絶対的に排除する問題に関することで，実際の数学的活動に際しては，今まで知られている逆理を生む「危険な集合」を排除するような「集合」の定義があり，安全で有効な公理体系はいくつも得られている。つまり数学の中に矛盾が生じ，数学が危機に瀕するような差し迫った心配は事実上，起こっていない。

ここまで来ると，われわれに言えるのはせいぜい，人類の今日までの経験の堆積から見て数学の現実への適用に矛盾の生じたことはないし，今後もおそらくそうあり続けるだろうということくらいであろう。

ついでながら，数学なる理論的学問の妥当性に関する窮極の根拠を人類の長期にわたる経験に見出すことは別に新しい考えではなく，昔から今までしばしば現れているし，同じ根拠を経験にではなく，人間精神の働きの中に求める立場も同様に古くかつ新しい。そういえば基礎論の俊秀コーヘン (P. J. Cohen, 1934–) の『連続体仮説 (*Set Theory and the Continuum Hypothesis*』（1966；邦訳，東京図書）にも，次の意味の一節がある。

> 「われわれの［数学的］直観は全て，数学的世界［the mathematical universe, この文脈では数学的普遍クラスでもある］という自然な，ほとんどフィジカル［物理的］なモデルの存在に関するわれわれの信念から来ている。」（原著 p.107，訳は村田）

私はここで，数学が観念的世界と経験的世界との楔合点（けつごう）にある神秘と言いたいような不思議な学問であることを，改めて痛感する。

ついでに一言すると，上で述べた逆理は集合論の構造自体に深く関わっており，

時には概念形成に利用される場合のあることも注意すべきである。ブラリ・フォルチの逆理はカントルの順序数論を逆手に取ったようなもので，言い換えれば順序数論は元来，逆説的な性格を持つものである。

またラッセルの逆理は，集合 M の濃度が冪集合 2^M の濃度より小さいことへのカントルの証明を原形としている。即ちカントルは両者が対等との仮定から，部分集合 $P(\in 2^M)$ に対応する元 $p(\in M)$ の内で $p \notin P$ であるものの全体 Q を取り，Q に対応する元 $q(\in M)$ について $q \in Q \leftrightarrow q \notin Q$ という矛盾を導いて，対等の仮定を否定した。この証明において Q は 2^M の元として「現存」するが，ラッセルの前記の $\boldsymbol{M}$ には存在保証がない。証明と逆の違いはこの点だけとも言える。

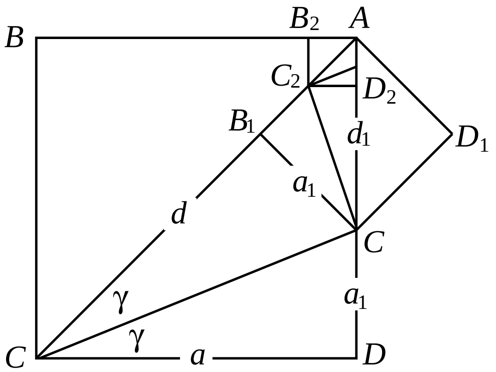
別の型の逆理として後述のリシャールの逆理にも似た事情があり，それはゲーデルの決定不能定理の証明にうまく逆用されている。

してみると，これらの逆理は初めは数学の絶対的真理性への疑念の重大な要素になったが，この角度から見ると，集合論の逆説的性格を摘出するのみでなく，それをうまく使って（毒をもって毒を制す？）逆理の克服に示唆を与え，時には数学に新しい視野を拓いている。私はこの辺に数学が他の学問と異なる特殊性を認め，そこから逆に数学の性格を探ることも面白いと思う。

4 ギリシア数学における逆説的状況とその克服

前節では集合論を取って或る逆説的な状況が数学を変貌させた様子を示したが，ギリシア数学でこれに対応するのは，下記の通約不能量の比例理論の創造である。即ちここでも先ず或る逆説的な状況が現れて否定的な結果が確認され，次いでその否定的結果の肯定化が起こっている。

正方形の対角線と辺との通約不能性については「数学における無限と有限の弁証法」でも触れたが，問題は例えば二本の線分の長さの比が整数の比で表せないことがありうるという認識を，人はいかにして獲得したかである。実際，メソポタミアではギリシアよりずっと以前に種々の平方根の近似計算が行われおり（ファン・デル・ワルデン『数学の黎明』（村田全，佐藤勝造共訳，みすず書房）参照），実用的にはどんな長さの比も整数比と考えて困らないし，まして「万物は（自然）数なり」というピュタゴラス学派の格率の下では，むしろそれが自然だったはずだからである。正方形の辺 a と対角線 d の比が通約不能という発見の



$$
\begin{aligned}
(a,d) &= -(AD, AC)\\
&= (AD, AC-AD)\\
&= (AD, AB_1)\\
&= (AD-AB_1, AB_1)\\
&= (AC_1, AD_1)\\
&= (d_1, a_1) = \cdots\cdots\\
&= (a_2, d_2) = \cdots\cdots\\
&= (d_3, a_3) = \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

第２図

衝撃は，現代数学における集合論の創始やその逆理の発見に勝るとも劣らなかったであろう。

a と d の通約不能性は帰謬法によって証明され，それがそのままその発見につながったとする説もあるが，第２図の作図によるとするのも，史実の裏付けはないが説得力はある（拙著『日本の数学・西洋の数学』（中公新書）参照)。

それは，整数 $m, n(m>n)$ の最大公約数 (m,n) を求める「ユークリッドの互除法」を a, d に適用して，その通約不能を知ったとするものである。その方法とは，m を n で割って $m = kn + r_1$ とおくと，この式が示すように，(m,n) は r_1 を割り切り，同じく (n, r_1) も m を割り切るため，(m,n) は (n, r_1) と一致する。更に n 割る r_1 の余り r_2 があれば (r_1, r_2) とも一致する。この手続きを進めると，自然数 m の場合，$m > n > r_1 > r_2 > \cdots\cdots \geqq 1$ だから，結局，有限回の後に (m,n) に到達するという方法である。これは暦の周期計算，建築技術その他でエジプトやメソポタミアでも知られていたと推定されている。ところがこれを第２図について試みると，

$$(a,d) = (a, d-a) = (a, a_1) = (a-a_1, a_1) = (d_1, a_1) = \cdots = (a_2, d_2) = \cdots$$

と，図は次第に小さくなるが，自然数における１のような終結点がないため，現実の作図ではともかく心の目に映るこの手続きはいつまでも終わらない。つまり (a,d) は得られないのである。この発見がピュタゴラス学派に非常な衝撃を与えたと言われるのも無理はない。

ところが次の時代になると——その期間は四半世紀ないし高々（たかだか）一世紀ぐらいと

推定されるが——，人びとは，$a:d$ に相当する「整数の比」が存在しえないという否定的状況を，近似のような経験的段階の問題で打ち切るのではなく，「量の比」という理想的・観念的な対象を積極的に数学に取り入れようという意志を固めたらしい。目に見え，手で描ける現実の図形にかえて，大きさのない点，幅のない線などという理想的・観念的な対象を導入したことは，この意志と無縁ではなく，ひいてはそこに一種の「論点先取」——「比」があるとの考えの下で「比」を導入する——を認めることさえできる。これらのこともまたカントルにおける想念の飛躍，概念の形成過程とうまく照応するといえるであろう。

『原論』第 V 巻は，自然数の比に関する理論 (第 VII 巻) のみならず，通約不能量の「比」も厳正に扱えるように構成された理論だが，これは今日の実数論の源と言ってよい。実際，デデキントは『連続と無理数』(*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872) に対する批判に応えて，『原論 V』を引用し，「このまさしく超古代的な信念こそ，たしかにいまの私の理論の源泉 (Quelle) である……」と述べているくらいである（『数と何か，また何であるべきか』(1887)，序文）。（両論文は河野伊三郎訳『数について』(岩波文庫) にある。）

しかし，この比例論の水準の高さにもまして強調されるべきは，ギリシア人が数学を，技術から理論的学問へと変貌させたという点である。それというのも，これは数学を或る既成の学問を手本として形成したというより，むしろ学問以前の混沌の中から，「学問」なる営みの一典型を打ち出したものと見られるからである。

実際，ギリシア人はこの種の思考過程を経て，通約不能量とその比を構成したが，それは同時に，経験的技術を超越した想念の世界における学問としての「数学」を創り出すための枢要ないとぐちあったに過ぎない。上記の「点」や「線」の定義は，そのような数学的世界を，理念的図形を対象とする学問という形で実現する重大な一歩であった。それが彼らの「幾何学」すなわち理論数学体系であり，時としてプラトン学派などに見るように，哲学に到る必須の準備階梯だったのである。

このような脈絡で見るとき，通約不能量の比にまつわる一連の事情は単に数学史上の大事件というに止まらず，人類文化史の上でも屈指の重大な意義をもつ事

件だったといってよいのではないか。

5 近世数学における逆説的状況

デカルト，ニュートン，ライプニッツなどからオイラー，ラグランジュに到る17〜18 世紀の近世数学にもギリシア数学や現代数学と比べられる特色があるが，通約不能量の比例論や集合論のように逆説と直結する事柄が数学上の革命を導いたとは言えない。それよりも近世数学の成立の背後には，思想，宗教，学問，技術，更には社会的・経済的基盤など，数世紀にわたる世界観の根底的変貌の凝縮したいわゆる 17 世紀科学革命と 18 世紀啓蒙運動があり，もしここにも逆説とその克服などを考慮しようとすれば，それはそうした広い視野を要し，近世数学の形成などもその一つの要素として見なければなるまい。いずれにしても，ここではちょっと立ち入りかねる問題である。しかし現代の科学文明の立場から見れば，この 17 世紀科学革命は集合論のもたらした変革より更に深刻な革命であり，長い目で見れば，現代もまたその革命の延長上の一駒とさえ言えるかもしれない(「『数学』の概念と数学史への視点 1 補説参照)。

勿論，近世数学にも無限の概念を巡って種々の新しい視野が開けている。パスカルにおける数学的帰納法や公理的方法の自覚，デザルグ，パスカルにおける射影幾何学的無限遠点の導入などはその例だが，それらは逆説的状況に刺激されたというよりも，特にパスカルの透明な天才的精神の寄与が大きく，かつその背後には「無限」を肯定する学問的雰囲気が，宗教上の状況の変化を含めて変わりつつあったという事情があったのであろう。

なお，これらのことから連想すると，ギリシア数学や現代数学についても，あるいは社会経済的な，あるいは宗教社会学的な検討がなされて良いと思うが，それはさしあたり私の任ではない。

数学内で逆説の問題という場合，解析学（つまり一種の記号代数学）たる初期の微分積分学の中に多くの例がある。即ちそれは多少の逆説を恐れぬ記号的な発見法として新分野を開拓する一方，それらの逆説的状況を超克し理論を純化するという両面で大きな寄与をしている。

先ずニュートンの流率法（微分法の原形）には‘暴力的’記号代数の面がある。という意味は，変数値の変化 Δx に対する関数値の変化 Δy を，$\Delta x \neq 0$ の条件の

下で割り，その後で Δx の項を抹殺する，つまり $\Delta x = 0$ と置くのである。ライプニッツの無限小解析（同上）も原理的にはこれと変わらない。これを救済したのはダランベールに始まる極限値（という数値的概念）だが，その純化にはコーシー以下の 19 世紀の前半を要し，それが結局デデキント，カントルの無理数論につながるわけである。

そもそも微分法も積分法も図形として見ると，$y = f(x)$ の差分商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ から微分商 $\dfrac{dy}{dx}$ を得る過程は，微小な三角形を「点」で置き換えるようなものだし，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は，幅が 0 の縦線分 $f(x)$ に無限小の幅 dx を掛けて加えるような逆説的なものである。この状況は古来の図形的モデルを捨て，新たに用いられだした小数による数値モデルの下で極限概念を持ち込むことによって超克されたのである。一般の量を「延長」とし，延長を線分で置き換えるのが，この転換の下敷きになっており，線分がやがて実数で置き換えられるわけである。

なお，このいずれの場合にも，数学が経験を超えて理念の世界に踏み込んでいることは依然として正しい。例えば，無限数列の極限値という場合，先ず無限数列，例えば一つの一般の無限小数を実際に書き尽くすことは人間の経験を超えている。円周率はもとより，たとえ $\dfrac{1}{3} = 0.33\cdots\cdots3\cdots\cdots$ のように簡単な無限小数でも，それは先々まで見通せるというだけの話で，これを書き上げることはできない。極限値とはこの種のことを前提してのことである。

集合論以後，近世的無限はしばしば生成的無限で実無限ではないとされるが，これは集合論の実無限に引きずられた結果かもしれない。生成的無限の数学化と呼ぶべきものは無限数列 $\{a_l, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots\}$ の対象化の方であって，これに対置された極限値は，当時においては一種の実無限的対象だったのではないか。これはどちらでも良いことのようだが，本論文 1–3 節での数学的帰納法と自然数全体の概念の間にありうる隔たりの補足として付け加えた。

本論に戻って，この他，数学的逆理が近世数学に寄与したことと言えば極限概念の精密化を促したことであろう。一例として

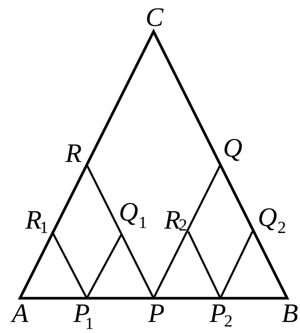
「$\triangle ABC$ の底辺 $AB = a$ が他の二辺 $BC = b, CA = c$ の和に等しい」

という逆説の「証明」をとろう。辺 a, b, c の中点を P, Q, R とすると，

$$b + c = BC + CA = (AR + RP) + (PQ + QB)$$

だが，$\triangle APR$,$\triangle PBQ$ に同様のことを行って，以下どこまでも続けると，山 ACB は鋸状となって長さは変えないまま「極限」において AB に「一致」する（第 3 図）。

この「証明」の誤りは極限概念の曖昧さに由来する。鋸の歯の長さはどこまで行っても常に $b+c(=x)$ であり，同一の値の列 $\{x, x, \cdots\cdots, x, \cdots\cdots\}$ の極限値は x そのものと定義されるので，$a = b+c$ とは決してならない。図的直観と極限値が一致するのは鋸と底辺の囲む図形の面積の数列の場合で，その値の列は極限において確かに 0 である。



第 3 図

この種の概念の浄化の例として，関数（という無限態）にまつわる一様性，例えば一様連続，一様収束などの概念の確立も大切である。細かい説明は略すが，関数列がその定義域の各点で収束するとき，収束の条件が定義域の全ての点という別の無限態に影響されて，例えば連続関数の極限関数が不連続になるというような奇妙な現象を示すことがある。一様性はその防壁になる概念だが，それらの奇妙な現象を逆説的と解すれば，多少こじつけめくものの，これも逆説の積極的な役割と言えなくもない。

6 現代数学における逆説の役割

フランスの数学者グループの長老で数学史にも造詣の深いデュドンネ (J. Dieudonné) 教授は「'革命' の多い物理学史と違って，数学史に '革命' と呼べる事件はただ一回，ギリシアにおける通約不能量の発見しかない」と書いている。一つの見識だが，私は現代数学もまた別の '革命' と考えている。

次に集合論の逆理の別な一つの型を紹介しかたがた，3 節に引き続いて数学基礎論のメタ理論について解説する。

6-1 リシャールの逆理

3 節でラッセルの逆理，ブラリ・フォルチの逆理が集合論の定理や定義に深い関連を持つことに触れたが，別に 1905 年に現れたリシャール (Richard) の逆理にも同様のことが見られる。これは「有限的表現」に関する逆理で，対角線論法と

も似ており，ボレルの「有限的定義」にも関連するが（「ボレルのエフェクチフ概念の形成」参照），ここでは下記のゲーデルの決定不能定理と対比しつつ解説する。

リシャールはフランスのリセ（高校）の教授で，その原形は次の通りである。先ず $abc \cdots\cdots$ の 2 字，3 字，……からなる重複順列から，フランス語で数の定義になる文章をとり，定義される数をその字数と abc 順で $u_1, u_2, \cdots\cdots$ と並べた表 E を作る（小数の表現は $1.0 = 0.999 \cdots\cdots$ のように無限小数に統一する）。次に

「E の n 番目の数の小数第 n 桁を p とするとき，整数部分を 0，p が 8 か 9 ならば 1，さもなければ $p+1$ で置き換えた小数 N」

という文章（G と略記）を考える。G は文章としては E に入る数 N を確定するかに見えるが，それは E のどの元とも一桁は食い違っていて E の元となりえない数を規定するという逆理になる。

リシャールは G を，“E が完成するまでは「数を定める」文でないから消し去ればよい，N は無限に多くの言葉を用いるのでなければ定義できない数であり，この矛盾は見かけの矛盾だ” と片付けている。なお彼はその後に付言して，“E と数 N からなる新しい集合を取り，N を何番目かに入れて表 E をつくれば，G はまた N とは異なる N' を定める” としているが，これではかえって事が紛糾するように思われる。

そもそも “表 E が完成する” とはどんな意味か。E の完成は本論文 1–3 節の無限列車全体が動き出すことに当たり，それを認めるなら，いっそ “N は確定と不確定の間を無限に往復するから可算無限でも矛盾を含む” と言いきるか，あるいは “ここにはメタの数え方と対象理論での数との混乱があり，E による集合の定義は真正な定義でない” とすべきであろう。またもし E は生成されるが完成しないとするなら，矛盾は起こらない代わりに N も完成しない。今日のわれわれは集合論を認めているので “「集合」の定義は慎重に” と言うだけで済ますが，無限集合を完結者として考えるのが，いかに大きい思考上の飛躍であるかを，時には思い返すのも良いであろう。

要するにエピメニデースの逆理も同じだが，逆理が生ずるのはメタの定義 G を普通の（対象言語による）定義と同列に扱うためで，G と対象言語とをうまく切

り離せば，リシャールの逆理からゲーデルの決定不能定理（『数学と哲学との間』付録 1「ゲーデルの決定不能定理」）への道が開ける。ゲーデルの定理はメタ言語と対象言語の峻別によって，進退不能の逆理の代わりに，問題の体系では肯定の証明も否定の証明もできないような「決定不能」の命題を構成するのである。

なお，ラッセルの逆理 ($M \in M \leftrightarrow M \notin M$) は，その文章の論理的骨組み（文体）の吟味だけで明らかになるが，リシャールの逆理では，文体以外に文章の意味が介入してくる。前の型の逆理を文体論的 (syntactic) 逆理，後の型を意味論的 (semantical) 逆理として区別することがある。この意味でいうと，ゲーデルの証明は，意味論的な真偽を文体論的な証明可能・不能で置き換えるのだが，核心は，単なる証明不能の代わりに否定を証明可能で置き換える工夫（メタの数えあげを理論内の数（ニュメラル）に直すこと等）にある（詳しくは『数学と哲学との間』付録 1「ゲーデルの決定不能定理」)。文体論的と意味論的の別は，逆理の問題に限らず，現代の論理学で大切な主題の一つだが，ここではこれ以上立ち入らない。

6-2 ゲーデルの決定不能定理

形式化された公理体系で自然数の理論が展開できる広さを持つもの S を考える。S としてはラッセルが『プリンキピア・マテマティカ』で与えたものやツェルメロの公理的集合論などいくつかの例があるが，以下はその種の体系についての一般的なメタ定理である。

> 「そのような S が無矛盾である限り，S にはそこにおいて決定できない命題 A，つまり ‘A’ も ‘A の否定’ も S から証明できない命題が作られる。」

これがゲーデルの決定不能定理である。以下その大筋をリシャールの逆理と対置しながら示そう。詳細は『数学と哲学との間』付録 1「ゲーデルの決定不能定理」を参照されたい。

ゲーデルは S における理論展開を一連の記号列と見なし，それを自然数論 T の中に移す。先ず S の基本記号を自然数（奇数）で表し（基本記号のゲーデル数，G 数），S の自然数や命題を基本記号の G 数の列あるいは数列の列で置き換えた上，それらを 2 以降の素数の肩に順次置いた数（記号列の G 数）で表現する。また証明のような命題の列にも，記号列の G 数を 2 以降の素数の肩に置いた形で表現する。次に S における理論展開を G 数に関する比較的簡単な計算（「原始帰納的関

数」p.r.f. と略）で置き換えて行う。例えば「命題列 X は命題 Y の証明である」の判定なども X と Y の G 数の間の p.r.f. で行われる。p.r.f. は有限回の手続きによって計算或いは判定ができる関数である。

S では自然数論を展開できるから，T における表現は S で再現できる。そこで T での'自然数 x に関する一変数命題関数'（x のクラス）$R(x)$ の中からリシャールの逆理と似たクラス $P(x)$ を作る。リシャールの場合には x に $P(x)$ の番号 p を代入して矛盾を導いたが，この場合，$P(x)$ には p を代入できない。p は S の外から $P(x)$ に与えた番号だが，P への「代入」は S の中で行われねばならないためである。そこで S において p に当たる対象（0 に p 個の後者を付けた対象,「p のニュメラル $Z(p)$」）に書き換え,「代入」もそれに応じて考えねばならない。これで逆理は避けられて，代わりに肯定も否定も証明できない決定不能命題が得られるのである。

（$P(x)$ を作るには，先ず x, y の二項関係 $Q(x, y)$ として

"「命題列」x は,「命題」y の自由変数に $Z(p)$ を「代入」した結果に対する「証明」ではない"

を考える。$Q(x, y)$ の真偽判定は p.r.f. によって有限的に判定できるので。その判定経路まで含めての Q の G 数を q とすると（「自由変数」は 19，23），T での真か偽かが，S では q の否定の証明可能か肯定の証明可能かに置き換えられる。次に $p = 19\,Gen\,q$（Gen は T での「全称記号」; 内容的には'全ての「命題列」について q は成立'）とおくと，p はその G 数でクラスとして自由変数 23 をもつ。ここで q の 23 に,（p でなく）p のニュメラル $Z(p)$ を「代入」した数を r と置き，改めて $19Gen\,r$ を取ると，これは証明可能でも不能でも矛盾になることが確かめられ，S が無矛盾なので，決定不能命題になる——という次第だが，複雑な話なので詳細は『数学と哲学との間』付録 1「ゲーデルの決定不能定理」に委ねる。

6-3 公理的数学の理論的限界

ゲーデルは決定不能定理から

「無矛盾な S の中で'S の無矛盾性'を証明するのは不可能である」

を導いた。これは，もしそのような証明が得られたとしたら，それを算術化した上で，決定不能定理の証明の各段階を検討することによって，そこで決定不能

だったはずの「命題」がこの仮定から導き出されることを確かめ，結局‘Sは矛盾を含む’との結論を導くものである（『数学と哲学との間』付録1「ゲーデルの決定不能定理」)。

むしろ大切なのは，この結果が決定的なもので，公理論的に形式化された数学の原理的限界を示している事実である。この種の限界はスコーレム - レーヴェンハイムの逆理について補説2でも触れるもので，‘逆説的’に言えば，この種の限界を明瞭に描き出したことこそ，集合論の逆理が理論的数学の世界にもたらした最大の意味と言えるのかもしれない。

7 なお考えたいこと

集合論と逆理が危うくも境を接していることと，他方，逆理を制するのに少し様子の変わった形で逆理を逆用するのが時として有効であることとについては既に触れた。最後にこの事実を少し違った角度から考えてみたい。

リシャールの逆理は「Aならば非A，非AならばA」という電鈴的構造を持つが，決定不能定理は，対象たる理論の展開される小世界Uを一旦，外のメタ世界Vから考察し，Uにおける‘矛盾’をVにおけるメタ的考察の導入とU, V双方の言葉の峻別によって回避するものであった。これは今日のメタ数学の一つの典型だが，勿論これだけがメタ数学なのではない。連続体仮説の独立性に関するゲーデルの別の仕事も少し違った型で，一つの体系の中に内的モデル (inner model) を作るものだが，これはポアンカレによる非ユークリッド幾何学のモデルに似ている。

一方，上記の無限列車の逆理は決定不能定理でω無矛盾の形で現れたと見えるとはいえ，そこにはなお活用の可能性があるようにも思われる。

このような考察を進めて，逆理とその活用手段について系統的な一般論は作れないだろうか。[既にあるかもしれないが私は知らないし，うまい工夫も浮かばない。逆理の新種を求めるつもりで誰か試みて頂けないものか。]

元来こんなことは実行を伴わないと無意味だが，これは逆理一般に対するメタの理論，いわばメタ数学のメタ数学である。私は実は論理や言語の問題まで俎上に載せることを考えているのだが，そうなると議論はもはやメタ・メタ状態になるかもしれない。

別に，言葉を言葉でという逆理の基本線からは離れるが，もっと遠い分野での

‘逆理’にまで視野を広げてみるのも面白いのではないか。一例は，粘性が 0 の理想流体における渦に関するヘルムホルツ (H. von Helmholz, 1821–1894) の理論である。この理論では，理想流体における渦は不生不滅で，形も位相数学的には不変になるが，実際に粘性を 0 に近付けて実験すると乱流になって収拾がつかない。即ち粘性を 0 にした極限では，理論と実験の間で自然法則に関する連続律が破れるように見えるが，これなども言葉の問題に直して，逆理の克服ないし利用に新しい視野を得ることはできないだろうか。物理学にはこの種の‘逆理’がなおいくつかある。

最後はとんだ夢物語になったが，私は数学を，創造的・発見的側面と演繹的・説得的側面の二面性を持つ学問と見ているので，この種の考察が数学の発見的側面への呼び水にでもなってくれたらと思ったのである——これは私の若い学者への期待である。

（原型『数理科学』第 261 号，サイエンス社，1985）

補説 1 カントの二律背反について

私は数学及び自然科学の真理性に関するカントの問題設定に深い関心を持つが，他方，彼の立論には現代の数学基礎論的考察とのギャップも感じている。カントのことは後で時折触れるからその事情について付言する。

カントは『純粋理性批判』において「純粋理性の二律背反」を論じている。それは人間の認識の分析（四種のカテゴリイ）に対応する四対の‘宇宙論的’命題からなり，第一は数学的，第二は力学的と名付けられている。数学的というのは時間，空間に関するもので，「世界には始め終わりがある」，「世界には始めも終わりもない」が共に「証明」できるとの主張，第二は物質的自然に関するもので，「世界には実体的で単純な構成要素がある」，「そのような構成要素はない」の二つが共に「証明」できるとの主張である。ただしその「証明」は極めて難解である。ゲーデルの決定不能定理の証明（『数学と哲学との間』付録 1「ゲーデルの決定不能定理」）も難しいが，これとは異質な難しさである。それは，後者で用いられる言葉が自然数に填め込まれるほど徹底して客観的・確定的なのに対し，前者では著者の言葉と読者の言葉の間に客観的な手懸かりが乏しく，こんにゃく問答に陥る危惧さえあるように見えるからである。

ともかく私に分かる範囲で言えば，もしその「証明」が無条件に通用するとすれば，それはその「論理」自身の破綻を示すとしてもよいように見え，言語や論理，あるいは記憶や連想などの能力の吟味に向かってもよさそうに見える。しかしカントにはその方の省察はない。彼はそれらを純粋理性の働きの下で「証明」してみせることによって，逆にその種の宇宙論的命題の判定には純粋理性が無力であることを示したとし，つまりは論理を信用して，そこから純粋理性の能力の限界を明らかにしようとした。それが彼の『純粋理性批判』の当面の目的であり。彼はそこから次の『実践理性批判』『判断力批判』に進むのである。私はカントに学ぶべきことはなお多いと考える者だが，当面の問題については本文の数学的逆理との隔たりを感ずる。

時間，空間に関する第一の二律背反は今日の数学で顧みられる型のものではないが，論理や言語が彼において全幅的に信頼されているらしいことは気に懸かる。それとも論理や言語まで疑っては数学や哲学はあり得ないのだろうか。それならそれで良いのだが，その底は衝いてみたいものである。

一方，物質の構成要素に関する第二の二律背反の方には，現在の数学的無限や数学・物理学的連続の問題と微かな関連が感じられる。それは単純な構成要素にまつわる分析が，物質の無限分割やその窮極要素の存在を予感させ，ひいては数学的無限過程や無限小，ないしその逆過程として数学的連続や物理的場が点によって構成されているのかなどを連想させるからである。（これについては，N. Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, (1961, Gallimard) が参考になる。これは英語版 (1958) の仏訳だが，監訳者の手の入った第 III 部 'Glossaire' が特におもしろい。）

補説 2 スコーレム - レーヴェンハイムの定理

この定理は数学基礎論で言う「メタ定理」の一つで，

「有限個，或いは高々(たかだか)可算個の公理から成る公理系が無矛盾ならば，それを満たし，かつ可算個の元から成る対象の集まりが存在する」

ことを主張する。平たく言えば，理論の外部（メタ）での普通の言葉でつじつまの合う（無矛盾な）形で述べている限り，その公理系でどんな「超限集合」が現れようと，その言語で忠実に表現したモデルは，（外から見る限り）可算の範囲

で実現できること，と言ってよい。

もっともこの主張には，そこで使われる論理が

「1 階の述語論理で述べられている限り」

という制約が付く。1 階の述語論理とは，変項記号 $x, y, \cdots\cdots$ の取る値が，その理論体系で '個体' と認められる対象に限られる論理で，個体の集合（つまり個体に関する述語），個体の集合の集合（述語の述語），……などの値を取る変項 $X, Y, \cdots\cdots$, などの 2 階，3 階の述語論理は許されない。ところが自然数の無限列 $(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ は連分数などによって実数と一対一に対応するから，自然数の世界における 2 階の述語論理とは個々の実数を天降りに認める論理であり，それでは可算モデルは作りにくい。「1 階の述語論理による限り」という条件の下での上の定理は，高々（たかだか）可算個の記号の組み合わせとして当然と言えば当然の結果だが，この種の精密な条件の下で曖昧の余地なく証明されるところがメタ定理の意義であり，またそのむずかしさでもある。

事実，集合論の公理系でも，ツェルメロが与えフレンケルが補正したもの（公理系 ZF）は，（変項記号のとる値が「集合」だけという）1 階の述語論理で書けるので，可算モデルが存在する。この場合，例えば「可算集合 x の部分集合の全体 X の濃度は可算濃度より大きい」ことも可算モデルの中で示されるが，ここに現れる各概念はその体系内の記号で表現されている。一例として「部分集合」をとると，これを体系内で正確に表現するには記号上の制約があり，（記号の個数を数える等の）メタ的考察の下では，「部分集合」や「その全体」等がすべてせいぜい可算の範囲の記号計算で置き換えられている。一切は，モデルというミクロコスモスでの出来事を，外から見渡している結果である（なお『数学と哲学との間』「付録 1　ゲーデルの決定不能定理」末の「付記」を参照)。

要するにこの定理は，外から見れば可算集合である範囲の中にあらゆる「超限集合」が組み立てられているという点が逆理らしいところだが，「超限集合」もその超限的諸性質も，普通の言葉で定義されている限り，言葉を（可算の範囲で）どこまでも続けて行く内にそこに入ってしまうことを言っている。勿論，言葉による表現は本来，可算的全体にも届かないもので，それが届いたと錯覚（!?）するのは，変項記号を始め言葉の中に手品の種が隠されているのである。もっと割

り切って言えば，どんな超限集合論の書物も有限の言葉で書かれており，そこに働く人間の想念まで言葉によって明確化しようとすれば，結局上のような始末になるという話である。ただその「始末」を初めて明確にするのは，普通の人間にとって容易ではなかったのである。

補説 3 無限反復と数学的帰納法――ラッセルとポアンカレ――

物事の操作には，一度行われると「同じ操作」が頭の中で何度でも行われることがある。数学的帰納法はその典型である。そのような無限反復を許す人間の頭の働きはどうなっているのだろうか。考えてみると不思議である。

カントは彼の意味の「純粋数学」を論じたとき，この能力を先験的統覚作用としては扱ったが，純粋理性の基本的カテゴリィには入れなかった。もっとも，彼はおそらくパスカル流の数学的帰納法を知らず，後に生まれる自然数論などは知るはずもなかったし，更に無限者を一個の全体者として把握する能力については夢想もしなかったことであろう。しかし集合論を含む現代数学において，この能力についての「批判」は改めて重要な意味を持つのではないかと思う。

この思考反復の能力をポアンカレは「先験的総合判断」と呼び（『科学と仮説』），それを「数学が単純な三段論法の繰り返しでない創造性のある学問であることの根拠」としたが，カントのように体系的な形にまとめることはしていない。これは数学者として当然だったかもしれないが，この件について現代数学の上で，特に逆理の問題を巡って改めてカント的な「批判」が欲しいように思う。そしてその際には，‘同一過程’ の ‘同一’ の意味の吟味までする必要が生ずるであろう。

実際，このポアンカレの先験的総合判断について，ラッセルは自然数がそのように定義されているものとし，更にこれを論理的に分析してポアンカレをカント的直観主義として批判している。彼はそれを自分の「論理主義」によって説明するが（ラッセル『数理哲学序説』岩波文庫など），これは彼の数理哲学体系の試みと見てよいであろう。

この件については，なお一つ付け加えるべきことがある。ラッセルは集合論の逆理について，集合を分類する文章において，「主語は一般にその述語に関する述語とはなりえない (subjects cannot in general be predicated of the irpredicates)」ことを要請している。例えば諸集合 m の集合 M の逆理は，m の分類のための述語を

M 自身に適用したために起こるというわけである（*The Principles of Mathematics*, 1903;IX–X 章），彼はこれを impredicable（述語たりえず）と呼ぶが，一方ポアンカレも同様の立場をとり，特にリシャールの逆理を「non prédicatif（非確定的;『科学と方法』，1953 年の吉田洋一による改訳（岩波文庫）による）」な分類として，循環論法を含むから真正の数学的分類になっていないとする。（imprédicatif を私は以前ラテン語の praedico の否定と見て「非前定的」と訳したが，日本語として吉田訳の方がこなれていると思う。）

これらは集合論の逆理の防壁として優れたものと思うが，困ったことにそれでは片づかぬ逆理もある。例の無限列車の逆理は時間という要素を含み，純論理的でないとして措くとしても，ゲーデルの持ち出した ω–矛盾の可能性は自己引照だけでは律しきれない。

その反面，自己引照あるいはそれに近い自己相似の概念は，最近フラクタル理論によってとみに注目されている。例えば到るところ微分不能なワイヤシュトラス曲線や高木（貞治）の曲線は，部分が全体に相似な図形の反復として，その理論の対象であるが，この理論はカオスの理論とともに，従来，せいぜい確率論的にしか扱えなかった対象に，決定論的な表式の繰り返しという手段を与えて，物理現象，生物現象，あるいは経済現象や社会現象などの解明に新しい光を与えている。始まったばかりの理論だが，「逆理」と関連しうる考え方による新しい応用数学開拓の方法として，次代の数学を大きく変貌させる可能性を秘めているように思われる。（解説書は多いが，例えば山口昌哉『カオスとフラクタル』（講談社，1986）は要領をえた好著である。なおカオスとフラクタルの関係を最初に明確に示したのは山口氏である。）

補説 4 車輪の逆理

半径 R の車輪がレールの上で一回転すると，円周上の点 P は $2\pi R$ だけ動くが，半径 $r(< R)$ の同心円の点 Q もまた同じ長さを「連続的」に滑り動く。ところが車輪の代わりに正多角形のがたがた車で同じことを考え車の運動の各停止段階に注目すると，同心多角形の辺は一定間隔での切れ切れの線となり，この場合の Q は連続運動でないように見える。ガリレイはこの跳躍部分を円の場合に移行させ，同心円上の Q の運動には「真空」がちりばめられていると考えている。勿論，こ

の時代の「真空」は単なる物理的真空ではなく，存在者の不在，ひいては神の支配する世界の性格にもかかわる問題であった。彼においてこの「真空」と「連続」或いは「無限」とは一連のものだったのである（「『数学』の概念と数学史への視点」補説参照）。

PDF 化にあたって

本 PDF は，

村田　全『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）

を元に作成したものである。

村田全先生のその他の著述は

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs

を御覧いただくか，書き込みください。