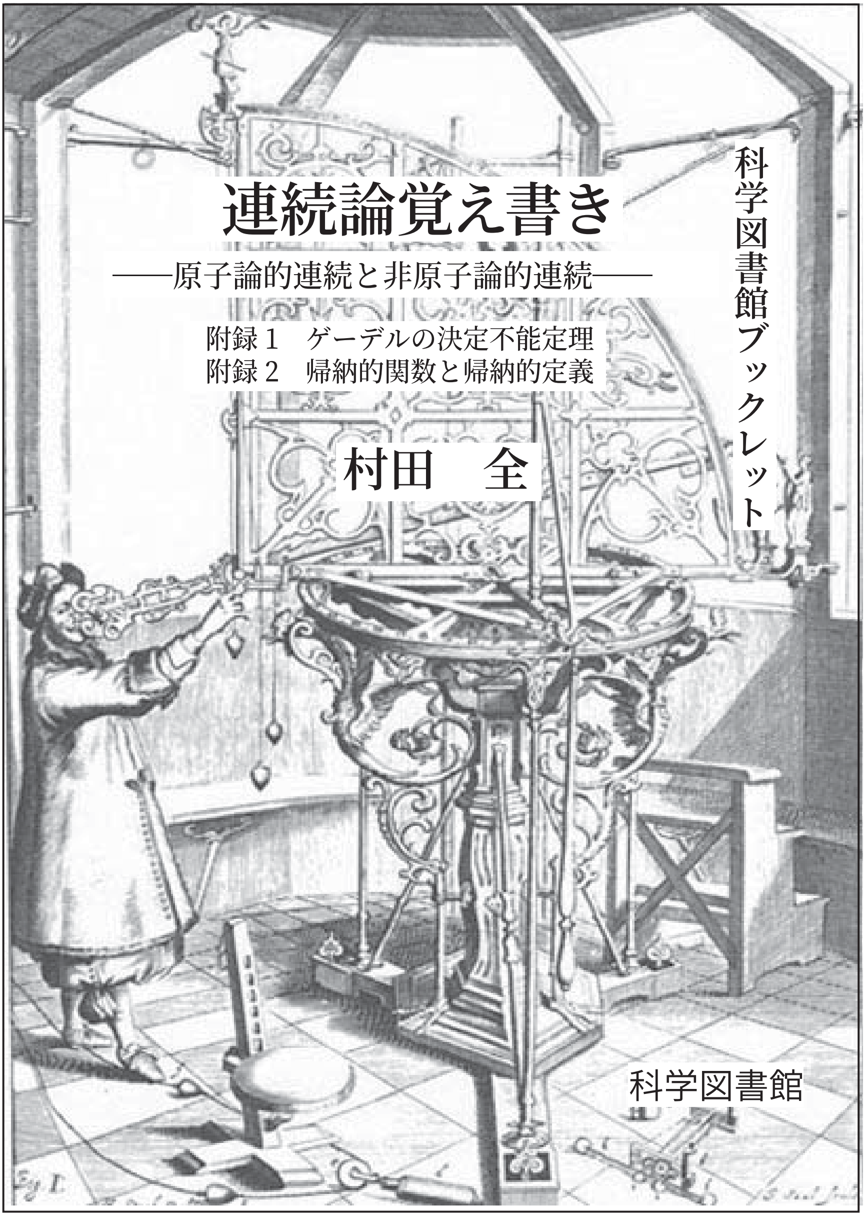

連続論覚え書き

——原子論的連続と非原子論的連続——

附録１　ゲーデルの決定不能定理
附録２　帰納的関数と帰納的定義

村田　全

科学図書館ブックレット

科学図書館

連続論覚え書き

――原子論的連続と非原子論的連続――

村田　全

本章の原型は「集合論の初期における二つの連続観」（1966）と「反原子論的連続観の後退を巡って」（1967）（共に『科学基礎論研究』第8巻）だが，以下はそれらを踏まえての書き下ろしである。「ボレルの‘エフェクチフ’とチャーチのテーゼ[1]」に続く未定稿的覚え書きだが，同じ考えが三十年ほど前にも私の中にあったことの記録でもある。「哲学者は最後に出発点に戻る」そうだが，私の場合には単なる空舞（そらまい）だったと思わざるを得ない。私の三十年にわたる数学と哲学の間のそのような彷徨の跡として見ていただきたい。

1　初期のボレルにおける非原子論的傾向の連続観

先ず集合論形成当時のカントルの連続観（「カントルにおける数学と哲学[2]」参照）と，或る意味でこれに対照的なボレル達のもの（「ボレルのエフェクチフ概念の形成」，「フランス経験主義の数学思想[3]」）とを原子論的角度から比較してみよう。即ち集合を元（げん）の集まり以上のものと見るか否かの問題だが，それをその根底にある数学以前の問題まで遡って考察するのが窮極の目的である。

われわれが数学的に連続を意識するについては，時間の流れ，空間の拡がり，あるいは意識の流れなどがきっかけとなり，次にその数学的モデルが作られ，また逆にこのモデルがそれらの流れや拡がりを象徴すると見られよう。そのモデルとは実数連続体，つまり実数の集合である。今ではこれが明確に定義されているからこそ，例えば微分積分学の基礎も確実なのである。

けれどもここにはまた別の見方もあり得る。連続体を点の集合と考えて良しとするか否か，言い換えれば，直線は確かに点を含むが，点を

1) 『数学と哲学との間』(玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/borel-effectif-utf.pdf 所蔵。

2) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf 所蔵。

3) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/France-keiken.pdf 所蔵

「集める」だけで直線ができるかという問題はゼノンの逆理以来の難問で，ライプニッツは連続の問題を中世スコラの呼称を承けて「数理哲学の十字架」と呼び，19 世紀フランスの哲学者ルヌヴィエ (Renouvier) も無限と連続の問題をめぐって「形而上学の迷宮 (Les labyrinthes de la métaphysique)」(*Critique philosophique*，tomes V–VI，1876—77) という長い論文を書いている。

元来，集合の概念は現代数学で最も基本的だが，それだけにその原子論的性格はむしろ当然のこととして受け取られ，今や現代数学は集合一元論的性格のものである。勿論，ボレル達も集合の概念を拒否したわけではなく，初期においては，ただ連続体の原子論的把握に疑問を呈していただけである。

カントルの「定義明確な (wohldefinit) な集合」の概念 (「カントルにおける数学と哲学」) に対してボレルは『関数論』初版の初めにこれに言及し，

「面白いが意味の分かりにくい説明である。集合 (ensemble) とは最も素朴で根元的な概念であり，実例を挙げるだけで意味は分かるが，集合の「イデー」(idée) は示せない。……同じく集合を「与える」と言っても，自然数列と定規(じょうぎ)やコンパスで描く連続体のイデーの差には打たれる」

とした。この ‘ensemble’ は日常語の“アンサンブル”，他方，カントルは論文中で「集合のイデー (Idea) を与える」と言っている。

カントルも実は実数の集合を天下りに定義し，それに基づいて時間や空間を論じており，ただ数学的連続をいかに表現するかに迷っていた形跡があるだけだが (「カントルに於ける数学と哲学」3–4 節)，ボレルは感覚的体験の連続性を先ず認め，連続を点や実数の集合として表現するのが適当かどうかで迷っていたのかもしれない。ベールが「連続体または自然数の無限列の全体と，整列集合との間に (濃度のような)

共通の測度はない」としたのなどは(「フランス経験主義の数学思想」補説2) その一証査である。勿論，ボレルやベールにそのような哲学的意識があったか否かは分からないが，これはフランス哲学に伝統的な，分析的，科学的，かつ二元論的という傾向と合うし，あるいはベルグソンの『意識の直接与件』（1883；英訳 (1910) で『時間と自由』の標題が採られ，その標題で平井啓之訳（白水社，1990）また岩波文庫版等がある）などの影響もあったかもしれない。

こうしてみると，ボレルの連続論が濃度論へ向かわず，測度論へ，次いで確率論へと進んだのも分かるような気がする。さすがに，測度 0 の点がどう集まって長さになるかなどのことには触れないが (「フランス経験主義の数学思想」補説 3–3)，「濃度の大小という言葉は，濃度を測度のように大小比較のできる量だと誤解させるので避けたい」と言明し，開区間 (0, 1) の各既約有理数 $\dfrac{p}{q}$ を中心に前後 $\dfrac{1}{q^3}$ の幅を除くと全長は 1 未満となる：

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{q}\frac{k-1}{q^3} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2) - 1 < 0.65 \quad (\zeta\text{はゼータ関数})$$

「こういうことを見ると，連続体とは何かが分かっていると思ったり，他の明晰な直観的な概念と同日に論じたりはできなくなるであろう」(『関数論』本文第 3 章) という。これは区間の有理数全体がルベーグの零集合の例であることに過ぎないが，そもそも零集合の点集合論的構造を明らかにすることなど，おそらく永久にできないであろう。

ボレルがカントルの対角線論法について「実数全体の数え方を示したわけでなく，その議論を数学の中で用いるとすれば帰謬法の根拠にしか使えない」と述べたのなども (「ボレルのエフェクチフ概念の形成」)，彼の連続観に繋がる考えであろう。

他方，ベールが上の引用の中で反原子論的主張を述べながら「連続

体または自然数の無限列全体」とした点は(「フランス経験主義の数学思想」補説 2)，連続体を自然数の無限列(つまり実数の連分数展開)と同一視した点で，むしろ原子論的連続観と言うべきかもしれない。

その半面，ルベーグの連続観はもっとカントル寄りで原子論的だったが,「カントルは連続体の点を個々別々に指名 (nommer) したのではなく, 対角線論法による存在証明はせいぜい帰謬法にしか使えない」というボレルの議論をわれわれに伝え，かつそれに賛成したのはルベーグであって(「五つの手紙」)，三人の連続観の関係はかなり錯雑している。しかしここで見失ってならないのは，ルベーグが「指名」(nommer) という言葉を「第 2 級順序数 “全体” の前提の下での個別的存在」までを許す意味に取り，解析集合以下，そうして得られた対象を「指名」したとしていることである(「フランス経験主義の数学思想」補説 3 参照。) それは具体的な定義ではあっても，もはや非原子論的連続観とは程遠いもので，ただしボレル集合とベール関数の関係は，彼のその仕事(「解析的に表現可能な関数」(1905)) によって明らかにされたのである。

このように集合論の初期においては，少なくともボレルとベールの中に多少とも非原子論的な連続観が見られるのだが，その後退が次の主題である。

2　ボレルにおける非原子論的連続観の後退

ボレルにおける非原子論的連続観の傾向は選択公理論争の頃から急速に後退する。その様子は,『関数論』第 2 版 (1914), 第 3 版 (1928), 第 4 版 (1950) の各付録の中で跡付けられる(「ボレルのエフェクチフ概念の形成」, 4 参照)。以下簡単に繰り返す。

第 2 版付録 IV–VI「集合論の逆理」(1908) は，実数の内で「有限個の言葉で明確に定義されるもの (bien défini)」の全体を「実用的連続体」(continu pratique) と呼ぼうという話である。これは有限語法に関する

リシャールの逆理に絡むことだが，ボレルはこれに余り拘泥(こうでい)せず，むしろ無視する。「このようなことはメタフィジックの問題にはなり得ても，科学の実際の進歩には影響しない。有限個の言葉で定義しうる対象のみが学問上有意義であり，それらの数の全体こそ実用的連続体である。」これは論理的に逆理を扱うときには乱暴な議論だが，ここではこれが既に原子論的連続観の下にある点に注意する。

もっとも，この付録 IV の IV には従来通りの意見も残っている。「連続体はよく知られた非可算集合の唯一のもので，私はこれを幾何学的直観によって得られたと見る。これを算術的に掴(つか)もうとすると，選択の原理 (1905) にまつわる難点が生ずるが，これは私には許せない。」そうは言っても彼が初めに少なくとも心理的にもっていたと思われるところの，緊密に繋がれた感じだが，やや漠然とした全体的連続観は，彼を含めて人々の視野から既に消え去ったようである。むしろズバリと言えば，その全体的連続観には，集合論的連続論に対抗し得るような説得力をもって別個の数学的連続概念を形成するだけの力はなかったと言えよう。

要するにボレルにおけるこの変化は，変化と言うより数学者たる彼の集合観に元々あったものでもあろうが，この頃から特に顕著になり，対象を個別的に指示する方向へ問題を絞っていったように見える。少なくとも『関数論』初版当時のような非原子論的連続観は，この後の彼の書物ではもはや見られない。なお，ベールは健康を害してその後まもなく第一線を退いており，ルベーグの連続観は初めからむしろここでの分類では原子論的である。

3　ルージンの場合

ルージンにおける解析集合と補解析集合の発見にまつわることは「フランス経験主義の数学思想」補説 4 で述べた通りで，その間ルージンは

ボレルからエフェクチフや実用的連続体の考えを吸収し，全体としてヒルベルトの形式主義的基礎付けに対抗した。ボレルは晩年までルージンの仕事を高く評価したが，そこには初期のベールに見られたカントルへの根本的批判，非原子論的連続観などはもはや影を消している。

ルージンの『解析集合論』(1930) はボレルの「関数論叢書」の一冊である。本文は五章からなり，初めの二章はボレル集合とベール関数の研究，次の二章は解析集合の研究で，最後の章で新たに射影集合が導入されている。

「フランス経験主義の数学思想」補説 4 で示した通り，非可算の解析集合 $(A = P_1)$ の濃度は常に $\aleph$(カントルの連続体仮説の世界！)であり，A はまたルベーグ可測性，ベールの性質を持つ。A の補集合 $CA(= C_1)$ (補解析集合) が同時に解析集合でもある場合，それはボレル集合だが，固有の解析集合，固有の補解析集合は確かに存在し，CA の射影 (集合の空間的次元は一つ下がる；一般には CA の連続像) P_2，P_2 の補集合 C_2, $\cdots$ は次々に新しい集合族を作り，その全体が射影集合の族である。

ところが CA の濃度は確定できず，それ以上の射影集合では上の三つの性質がすべて決定できない。ルージンはボレルの衣鉢(いはつ)を継ぎ，解析集合の範囲で古典解析学の具体的理論の完結を計ったが，具体性の線上にあったはずの射影集合にその夢を砕かれたのであろうか。すぐ下で示すように，彼はベールの“ヴィルチュアリテ (virtualité)”を，文言をまねながら「射影集合の潜在的性質」の意味に使ったらしく，「それらは永久に解決できないだろう」とまで書いている (「フランス経験主義の数学思想」補説 4–4)。

さて，問題はルージンの連続観である。彼は『解析集合論』の中で「この書の主たる問題は，直線が点からできているか否かというエレアのゼノン以来の問題の新しくなったもの」と言ったものの，自分の連続観が原子論的か否かには触れていない。せいぜい第 1〜3 階のボ

レル集合は，（例えば第 2 階ではカントルの完全疎集合のような）その階に固有の二三の型の部分集合に分解されること——点分解ではなく固有部分集合への分解——を示すだけである。結局ルージンの数学では非原子論的連続観からするカントル批判はすでに消滅し，その意味ではすでにカントルの側に立っていると思われる。次にそれを示す二つの事実を挙げる。

第一は『解析集合論』の「結論」の部に見られる次の章句で，上のヴィルチュアリテに関連する。詳しくは拙著『数学史散策[1]』「付録」(1973) を参照されたい。

(L)「そしてそれらのヴィルチュアリテが二つずつ縮約あるいは還元不能 (irréductibles) である可能性は十分にある」(Et il y a bien des chances que ces virtualités soient irréductibles deux à deux.)

この章句は,「フランス経験主義の数学思想」補説 2 のベールの章句 (B_1) “et ily a des chances pour que ces deux virtualités soient irréductibles”

とほぼ一致する。ルージンはこれを借用したのだろうが, ベールのヴィルチュアリテはカントルの濃度 (Machtigkeit) に対する彼の試訳とも推測できるもので，自然数と連続体という二つが「濃度」のような共通な尺度に還元はできないという明確なものであり，かつカントルに対する根本的な批判であったのに対し，ルージンの方はヴィルチュアリテが何であるかも，何が「二つずつ」で，どう「縮約あるいは還元」するのかもはっきりしない。

ここで考えられるのは，これとは別の「五つの手紙」(「ボレルのエフェクチフ概念の形成」, 4) の中のベールの手紙にある次のような別の章句である。

---

1) 「科学図書館」に収録。http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/ramble.pdf

(B$_2$)「無限を語るときわれわれは具体的世界にいるのでなく，ヴィルチュエルなる状態(le virtuel ; 潜勢的状態？)にいる。つまりいくつかの規約［例えば濃度，可測性など？］をたて，別の規約によって対象［例えばボレル集合，射影集合などか？］を定義するとき，それらの対象が先の規約の性質を持つかどうかを確かめるという，そんな状態にあるだけである。」

これで見ると，ベール自身は1a virtualité と le virtuel を別個に使っていたようだが，ルージンはこれを混同したのではなかったか。少なくともベールの (B$_1$) に秘められたカントル批判はすでになくなっている。

ルージンがカントル的な原子論的連続観に完全に移行していることを示す第二例は，彼がカントルとは別の「連続体仮説」を提唱したことである。

カントルの仮説は

(C) “$(2^{\aleph_0} =)\aleph = \aleph_1$”

だが, ルージンは最後の論文「空なる解析集合について (1935) において

(L) “濃度が $\aleph_1$ なる集合は補解析集合 CA である”

を「疑問の余地のないもの」として提唱した。この論文自体には多少問題があるが，それにしても仮説 (L) は当否が簡単に決定できるほど底が浅くない。しかもこの二つの仮説は両立しないのである。実際もし両者を共に認めれば，解析集合の濃度は $\aleph$ だから (C) によって $\aleph_1$ となり，(L) によって解析集合は必ず補解析集合になるが，これはすべての解析集合がボレル集合になることを意味し，ボレル集合でない固有の解析集合が存在するという事実と矛盾するからである。

ところで目下の問題は (C) と (L) のどちらの説得性が強いかなどではない。最近(1996 現在)の記述集合論ではカントルの仮説が普通の公理系から独立であることはよく知られており, ルージシの仮説もその理

論の表現の下では同じく独立であることも証明されたと聞いた (1997) が，問題はそれでもない。われわれに重要なのは，ボレルの後継者として自他共に許したルージンが点集合としての連続体にかくも立ち入った考察をしたことである。彼のカントル批判はあくまで集合の具体性やその性質の問題にあり，連続体が「点の集合か否か」ではなかったのである。

そういえばボレルやベールは「連続体仮説」について一言もしていない。それは彼らにとって「数学の外での問題」だったのである。考えてみるとルージンの『解析集合論』(1930) はボレルの『関数論』(1898) からすでに三十年，選択公理論争からでも四半世紀が経っている。集合論はすでに学界に定着し，連続体を点の集合と見るのはもはや常識であって，改めてベールの (B_1) のような「根元的批判」を口にする時代ではなくなっていたのである。

なおルージン自身は否定概念について，ブロウエルの排中律とは別の角度から一種の哲学をしばしば口にしている。これは射影集合の形成において補集合をとること (否定的演算) の難しさをその形で述べたのであろう。

余談ながら，いずれにしても否定概念は厄介である。実際無限概念そのものが，本来，有限でないという否定概念であり，否定概念は考慮の範囲を定めなければ止めどなく拡がる。「学生でないもの」と言うと，気持は学生以外の人間を指すつもりでも，論理的には学生以外の森羅万象が入り，果ては「学生の集合」や「学生でないものの集合」などまで入ってくる。また「集合」を集めろというと，「全集合の集合」自身その元になるし，「集合でないもの」を集めろというと，「集合」以外の森羅万象が全てそこに入る。これは自己引照の怖さだが，実はそれを限りなく拡げて考える人間の思考能力が怖しいのである。

4　ラッセル，ヒルベルトの場合

20 世紀前半で数学基礎論と言えばボレル達は傍系で，ラッセルの論理主義，ヒルベルトの形式主義，ブロウエルの直観主義の三つ，特に形式主義が主流だったが，連続観について注目に値するのはボレルとともにブロウエルである。ただしその前に先ずラッセルとヒルベルトについて触れておく。

数学者ラッセルは同時に哲学の専門家でもあるが，彼の数学的連続観は全く原子論的である。『ライプニッツの哲学』(1900),『数学の原理』(1903)，ホワイトヘッドとの共著『プリンキピア・マテマチカ』(1910–13),『西洋哲学史』(1945) などの著書があり，特に『プリンキピア』は論理主義の古典として永く残るであろう。しかし私はその準備的な著書『数学の原理』こそ，そのライプニッツやカントに関する哲学的記述とともに，数学と哲学にまたがる彼の思想の大筋が鮮明であるため，もっと読まれて良いと思う。

ヒルベルトは世紀末から 1940 年頃まで,「カントルの楽園を回復すべく」しばしば基礎の問題に沈潜し形式主義の主唱者となったが，彼の場合はカントルの後継者として当然ながら，非原子論的な連続観は全く現れていない。

5　ブロウエルの場合

ブロウエルの仕事はボレルたちより遅れ，ボレルが非原子論的な連続観を口にしなくなった頃から始まっている。彼は自分でも「出発点においてボレルたちに近い」といっているが，ボレルより哲学的であり，リシャールの逆理についてもボレルのような実際主義的扱いはしない。ただどうも抽象論一本で押す傾向があって，私などはその真意の計りかねる場合が少なくない。下記の「二 - 一性 (two-oneness) の直観」などもその一つである。

そんな事情でブロウエルについて述べる自信はあまりないが，その連続観の変遷という点に絞ると，総括的論文「直観主義的集合論」(1919) とその文献リストにある「直観主義と形式主義」(1912) を主とし，他には「排中律と独立な集合論の基礎付け I，II」（1918–19），「直観主義的数学の基礎付け I–III」(1924, 26, 29) を時折参照するだけですみそうである。

「直観主義と形式主義」はアムステルダム大学の就職講演で，当面の相手はヒルベルトである。話は数学上及び自然科学上の真理とは何かから始まり，数学の超経験的で普遍妥当的な真理性の根拠という古来の難問に入っていく。そして「直観主義者(大体はフランス人)はそれを人間の精神の中にありといい，形式主義者 (ドイツ人) は紙の上 (on paper) にありという」と皮肉な言い方をする。もっとも，本当に皮肉なのは，彼の直観主義の原型がドイツ人カントであることかもしれない。

周知の通り，カントは古典数学の真理性の根拠を人間の外に求めず，それが超経験的普遍妥当性を持つために人間の理性はいかなる性質を備えるべきかの「批判」へと視点を移したが，その数学が古典的な数論と幾何学に限られていたため，平行線公理の妥当性(非ユークリッド幾何)や公理系の構造(射影幾何の双対性)に関心が生じてくると，カントの理論も影が薄くなった。またその間，彼は連続について古典的なイメージに満足していたようで，時間空間は語るが連続について「コペルニクス的」に考えた形跡はない。時空は「連続」と頭から決めてかかっていたようである。ただカントはなお隠然たる影響を持っていたようで，ヒルベルトもブロウエルも自分こそカントの継承者だといっている。この二人の間の論争については，「数学における無限と有限の弁証法[1]」の「ブロウエルの直観主義の場合」の項で引用した文献

1) 『数学と哲学との間』(玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/math-inf-finite-utf.pdf` 所蔵

を参照されたい。

ブロウエルはカント的空間の先験性を捨てる一方，時間の先験性を一層強調し，それによって生まれるのが新しい直観主義だといい，この文脈の中で「二 - 一性の直観」が現れる。以下はその英訳による私の試訳である。

> 「この新直観主義においては，生のモメントが質的に異なる部分にバラバラに分裂するのを，人間の知性の基本現象である時間によって切り離されてはいるが，知性の (its) 情緒的［カントの ästhetisch に対応か？］内容の捨象によって数学的思考の基本現象であるむきだしの二 - 一性の直観へと移行する限りにおいてのみ，再統一されると考える。」
>
> (This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition on the bare two-oneness.)

これは『科学基礎論研究』(vol. 8, 1967) での拙訳の改訳で，分かりにくい文だが，察するに「二 - 一性の直観」とは数学を支える根元的直観で，心に生起する多様な現象を捨象した純粋の時の流れの中で例えば 1 を生み，別の 1 と併せて 2 を，これに別の 1 を併せて 3 をと生んでゆく心の働きのことであろうか。謎めいた表現だが，事柄の性質上やむをえまい。（カントでは多者をまとめる統覚に対応するか。補説参照）。いずれにしても分かりにくい文である。ただこれに続く部分は文面だけははっきりしている。

> 「この二 - 一性から 1 も 2 も, 更にすべての有限順序数も創られる……
> さらに ω 列も生ずる。この二 - 一性の中では連続者 (the continuous)

も不連続者 (the discrete) も一つにまとめられるので，これから直ちに線状連続体の直観，すなわち“between”の直観が生ずる。これは，間にいくつ単位 (units) を容れても尽きることのないもの，従って単なる単位の集まり (co1lection) とは見ることのできぬものである。」

この引用には非原子論的な連続観が，少なくとも潜在していると思われる。ただそれにしてもこのブロウエルの議論はいささかとらえがたく，このままではカントルの向こうを張って客観的な議論を展開するのは難しいであろう。この感じはその後の「数学的集合」に関する部分を見ても変わらない。

「直観主義の数学では，あらゆる数学的集合はこの根元的直観からただ二通りの仕方，有限順序数を作ることと無限順序数を作ることとで導かれるものに限られる。……この数学で許される濃度はすべて可算である。」

「線状連続体の直観の上に立って，もし自由選列［各桁を“自由に”選んだ無限小数］を許すならば，連続の濃度の非可算集合になる。」

こうなると直観的連続体は数学的集合でないわけだが，その先はどうなるのか，例えばボレルの実用的連続体とどんな関係になるのか。ともかくここで期待されるのは，二 - 一性の直観とそこからの数学的展開をより具体的に明確化することであろう。しかしこれに続く彼の議論はその方向にではなく，集合の定義を巡る排中律の問題に移る。そして有名な論文「排中律と独立な集合論の基礎付け 1，II」(1918–19) 以後になると，「根元的現象たる二 - 一性」は全く影を潜め，排中律一本になる。これはどうしたことであろうか。率直に言えば，ブロウエルの連続観に非原子的要素があるとすれば，それはすでにカントも持っていた古典的な連続観のようなものではなかったか。

こう見てくると，状況はほぼボレルの場合と同様に見える。実際，非原子論的な連続論は誰もが一度は考えてみたくなることで，デデキン

トでさえ連続体については「目のくらむような原子のつながりに打たれる」といっているくらいなのに，それを数学的な理論として系統的に述べるのがいかに難しいかを，非原子論的連続観の相次ぐ後退自身が示しているようである。そしてその底には，ゼノンの逆理以来の「人間の知性」の限界にまつわる深い理由があるように思われる。最後にそのことについて，完成した意見ではないが，なお二三の疑問を書き留める。

6　結論に代えて――数学史と数学の哲学との立場から――

言うまでもなく，原子論的思想一般を論ずるとなれば，それは学問の歴史そのものを論ずることになりかねない。広い意味での原子論と言えば，複雑な現象を或る根元的な単一者に帰着させることによって説明することだが，この場合，数学の範囲で見ても，集合論的原子論の前に公理論のような「論理的原子論」(logical atomism) があり，記号の使用のような「言語的原子論」(linguistic atomism) もある。これらの「原子論」的方便が果たして連続を解明しうるのであろうか。以下，うまく行くかに見える場合とそうでない場合とを検討する。

例えばユークリッドの『原論』($\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$, *Stoikheia*) では公理の名によってその理論の根元的要件が示されている。(そう言えば,「ストイケイア」というギリシア語も「アルファベット」と同じく，言語的原子論を思い起こさせる。)

ところで『原論』の形成に関する近年の研究には，全十三巻中で最初にまとまった巻を第 VII 巻の数論とする説がある。この部分は「単位」1 と「数」(1 の集まり) を定義すると，後は順調に進行する。これは原子論的対象を原子論的論理で処理した成功した理論と言ってよいであろう。他方，こうは行かなかったのが第 1〜VI 巻の図形学である。実際，例えば「点」を「原子」とし「線分」をその集合として定義して

みても，それでは事は少しも進捗しない。連続的運動による作図などを，言葉と論理というしずれも「原子論的」性格を本質とする手段で処理しようとする悪戦苦闘の中から生まれた結果が，今に伝わる「原論』なのではあるまいか。

ちなみに論理とは，各命題が例えば意識の流れのように，ずるずると連続的に変わるのでなく，

「A なり；A ならば B なり；故に B なり」

というふうに跳び跳びな非連続的段階に沿って進行する手続きである。

ついでながら，『原論』第 V 巻の量の比例論はギリシア数学における連続量の理論の基礎だが，これは点の運動も集合も巧みに避けて現代の実数論に近い理論に作られている。というよりも，これはデデキントの無理数論の源泉である。この理論では「量の比」の定義はなく，測度の発生も論じない。与えられたものである二つの量はどんなときに比を持つか，その比はどんなときに大小相等の関係に立つか，それが出発点であり，基本的には今日の測度論と変わらない。違いといえば，図形には必ず測度があると決めてかかった点が，先ず測度の有無を問題にする今日の立場と違うぐらいであろう。時代の隔たりを考慮すれば，それは驚くべく成熟した理論である。

上記と同様のことは 17 世紀から現代まで同じように起こっている。数と図形の二元論はデカルト以後，次第に数一元論化の傾向をたどり，ついに今日の集合一元論的数学になるわけだが，図形は点の集合というだけですむかどうか，図形の測度はどのようにして発生するかとかという問題になると，『原論』の時代からあまり変わっていない。せいぜい，そのような怪力乱神は語るべきでないと悟ったところが現代数学の手柄だと開き直るぐらいが落ちであろう。

微積分学で言うと，源流にはカヴァリエリの『不可分者(indivisibilia；複数)の幾何学』のような原子論的発見法や，アルキメデス伝来の「搾り

出し法」(method of exhaustion) のような帰謬法による証明があり，その一応の自立の段階でも，ニュートンの非原子論的な運動学の体系 (流率法) とライプニッツの原子論的な記号法（dx, dy など）の体系が対立している状況である。これはその後，極限概念によって止揚され，現代の原子論的数学である集合論に基づく実数論で基礎付けられたが，集合論的連続論がそれで収束したと言えるか否か，そこが問題なのではないか。最近の超準解析 (非標準解析) について良くは知らないが，この点は同じであろう。

ライプニッツに始まる関数概念にも注意することがある。それはライプニッツ以後しばらくは単一の式や関係のような全体的把握が前面に出て，その単一の法則性は彼の連続論にもつながっていると思われる。実際，ライプニッツからオイラーまでの「連続関数」は（定義域は関数とともに定まり，単一の式で表現されたもの等の意味で）有機的とさえ見られるほどの全域的規定であり，今日の解析関数の原型である。ところが今日，関数とは「変数 x のとる各値に y に或る値を対応させること」と定義され，全域における関数の連続性は，一点における連続性が定義されて後，それを定義域の各点において局所的に確かめられるに止まる。すなわち現代の関数概念は正に集合論に基づく原子論的概念なのである。

さて集合論の現状であるが，今日のメタ数学的手法によれば，記述的集合論は（定義域も値域も自然数の範囲にわたる）数論的な帰納的関数（「付録 2」参照）の発展によって格段の前進を遂げている。それは，ボレルたちが数学以前的な形で予想していたエフェクチフに曖昧さのない意味を与えたのみでなく，ゲーデルに始まるメタ数学の数論化を実現したのが他ならぬ一般帰納的関数だったためである。すなわち一つの「数学」における概念構成や推論はゲーデル数のような数値表現によって帰納的関数でおきかえられる。これは上で論理を，命題とは意識の

流れのような連続的変形でなく，一連の言明が跳び跳びの非連続的な形で進行する手続きとしたことの数学的表現に他ならない。言い換えれば，これは式の表現を言語的原子論で，推論という名の過程を論理的原子論で置き換えたと言えるもので，要するに今日のメタ数学は本質的に原子論的思考であり，連続の意識や直観は事の背景に下がって，せいぜいそのような原子論的思考に場を提供するだけなのであろう。

この表現はかつて『原論』第 VII 巻にあったような，対象と方法がともに原子論的で，理論展開も具合良く進行した状況に似ている。加えてここには，それら一切のことを人間がやり，神のような超越的立場からの真偽判定——ゲーデル以前の論理学の立場——は後ろに下がったと見られる状況がある。私はこの一連のことこそ現代数学が古代や近世近代の数学と決定的に異なる点と考える。そして論理及び概念構成という理論構造の核心がまさに原子論的構造を持ち，しかもそれが数論化されて数学的体系の中に展開されるとの事実を顧みると，数学におけるこの意味の原子論的性格の優位は少々のことで動くまいと考える。というよりも，これはおよそ「数学」なるものの必然的要素なのではないか。だとすれば，ボレルやブロウエルの連続観の後退も必然の道だったと言うべきかもしれない。

しかしそれにもかかわらず，私にはなおそれで連続の数学的把握は最終的に軌道に乗ったと言い切れない思いがある。例えば『原論』第 I〜IV 巻の図形学的部分の整理不十分（原子論的とも連続論的とも言い難い折衷的公理系）がそれである。そう言えばライプニッツにも，原子論的微分積分学とは一概に言えないところ，例えば関数を頭から連続的，あるいはむしろ整関数的と考えたところがある。また下村寅太郎は，ライプニッツのモナドロジィを西田哲学の「場」の概念につながる思想と解し，モナドを一個の原子であるとともに連続の場でもあるとし，モナドとは「人間」——人と人との間——のことと見ればよいとの

意見を示している(“「モナドロジー」と「場所の哲学」”, 1988 ; “Zu Leipniz’ Monadologie: Die logische Bestimmung des Monadenbegriffs”, 1968 ; ともに『著作集 7』所収)。私はまだその思想を十分に理解してはいないが, 説得性のある説たりうると考える。その場合, これを人間の学としての「数学」の根元と結びつけるならば,「人間的実存の中での数学的連続とは何か」ということも問われて良い。このような問いに関しては「数学」の範囲でも, ライプニッツの原子論的連続論 (!?) に今後なお掘り下げるべきものがあろうと私は考えている。

同じようなことはベルグソンの純粋持続, あるいは古くゼノンの逆理についても思うことがあるが, それはもう少し先の問題として残す。西田哲学の純粋直観あるいは場の哲学については更に五里霧中である。ただ, あえてもう少し私見を述べるならば, 人間の実存につながる「永遠の今」という難問がある。私はこれこそ人間の実存の一切だと考える。過去は「今」における記憶, 未来は予感された逆向きの記憶であり, 意識の連続性にしても根元的には記憶のなせる業なのではないか。ところが記憶というこの不思議な現象について, 最近の生理学ではディジタル (原子論的) だとする説が有力であるかに聞く。こうしたことを「数学」の将来の可能性と結びつけるのは, およそ数学なる学問と無縁な妄想であろうか。あるいはそうかもしれない。混沌たる創造活動においては知らず, できあがった数学は原子論的言葉と原子論的論理において書き上げられるべきもののようだからである。しかし, しばらく今日の数学を離れ, ありうるかもしれぬ将来の「数学」に思いを致すとき, 私はこの最後の件さえ軽々に信じがたい気のすることがある。実際, 混沌たる創造活動においては, (狭義の) 記憶ばかりか, 混沌に目鼻をつける一連の仕事——異同の弁別, 秩序づけ, あるいは象徴作用, 概念作用等の精神作用——が, 離散的とか連続的とかを分かちがたい形の広義の ‘記憶’ として, それもしばしば偶然のままに働い

ているからである。それとも「数学」は，記憶などの精神活動の「連続性」や「永遠の今」にまつわる事柄の如何に関わらず，それをディジタルな手段で (空しくも!?) 追跡することをもって本領とする，本質的に離散的な学問とすべきなのであろうか。

これ以上何一つ積極的なことが言えないのは残念だが，これが私の「連続論覚え書き」の現状である。

［付記］私は 1994 年，桃山学院大学定年の時に下村寅太郎先生から「数理哲学の歴史を論理学の歴史として，ただしありきたりの論理学史でなく，哲学史に新しい視野を拓くぐらいの気宇広大な視点から組み立てて見てはいかが。自分にできなかったことを他人に押しつけるようだが……」という手紙をいただいた。

考えてみると，これは『無限論の形成と構造』(1944) 以来，むしろ処女作『ライプニッツ』(1938) の頃以来，先生の念頭にあった問題であろう。実際，それは『ライプニッツ』における普遍（数）学 (mathesis universalis) の記号的象徴を巡る省察を主軸とし，数学的無限を介して西欧哲学史に「新しい視野を拓く」ようなつもりで書かれたものなのであろう。その視野の時代的限界は限界として，刊行当時，文字通り世界の学界に先立つ卓見を含んでいたと思う。しかも先生が「連続論を欠く故に」その再刊を躊躇されたことは「新版の序文」(1979) に明らかで，それを沢口昭聿氏が優れた解説と補遺「連続体について」で補われたのである。

先生の私への課題は連続論と限定されたわけではないが，私はそれを自分なりに取り上げ，沢口氏といくぶん違った角度から連続論を考えようと思っている。これは沢口氏の論説に不満があるというのではない。氏の補遺は教わるところの多い立派なものだが，私は同氏の業績を踏まえつつ，例の課題の線で自分なりに考えてみようとしているだけである。しかしそれが形をなさない内に先生は亡くなられ，一方，私の考えはいつまとまるか分からない。「カントルにおける数学と哲学[1)]」と本稿と

1) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」http://

は，せめてそのまとめ難さを記録する意味で現在考えていることを整理したものである。

（1996 年 10 月）

付録1　ゲーデルの決定不能定理

これはゲーデルの原論文 “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I” (*Monatshefte* 38, 1931) を，原文に即して解説したものである。決定不能定理とは

> 「形式化された理論体系で自然数論が展開できるだけの広さを持つ S が無矛盾（実はやや強く ‘ω–無矛盾’）である場合，S の中の自然数の命題 $\boldsymbol{R}$ で，S の公理からは ‘$\boldsymbol{R}$’ も **‘$\boldsymbol{R}$ の否定’** も導き出せぬものが存在する。」

この $\boldsymbol{R}$ が決定不能な命題である。（ω–無矛盾は下で説明する，なおこの定理は後に無矛盾の仮定だけで証明された。）以下，証明の大綱を示す。

(1°) S の公理系は，そこで使われる論理法則を含めて高々可算個の基本記号のみで書かれている。例えば **0**［零］，$\boldsymbol{f}$［の後者］，＝［等号］，¬［否定］，⊃［ならば」，∧［かつ］，∀［全称］，**(，)**［括弧］，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\cdots$［1 階の変数」：$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\cdots$；$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\cdots\cdots$ 等の［n 階の変数］を用いる。以下では n 階の変数の件には触れないでおく。このあと **太字の記号と細字の記号との区別**が微妙なので注意されたい。

これらの基本記号を別個の奇数で置き換えても混乱は生じない（基本記号のゲーデル数）。例えば **0** を 1；$\boldsymbol{f}$ を 3；＝を 5；¬ を 7；⊃ を 9；∧ を 11；∀ を 13；**(,)** を 15，17；$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\cdots$ を 19 以下の素数，（n 階の変数は 19^n，…など）と表示する。例えば数 3 は **0** の後者の後者の後者で，S では $\boldsymbol{fff}$ **0** または 3, 3, 3, 1 と書かれる。

これは，S の外に普通の整数論 T を取り，S のメタ概念を T の数論で表現し，後に後者を S の中に翻訳するための準備である。翻訳のためには T の基本概念も S に翻訳できるものであることが望ましい。（このゲーデル数は便宜上，原論文と少し変えた。**太字**は S の対象の意味だが，(4°) 以後は複雑になりすぎることがあるので，用いなかった場合がある。）

(2°) S の記号列には，各記号のゲーデル数の列 $g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n$ に対して，数 $2^{g_1}\cdot 3^{g_2}\cdot 5^{g3}\cdot\cdots\cdot p_n^{g_n}$ を対応させる(記号列のゲーデル数)。ただし p_n は n 番目の素数。この対応は一対一であり，ゲーデル数からの復元も可能である。 **3** つまり $\boldsymbol{fff\ 0}$ のゲーデル数 $Z(3)$ は $2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^1$，また命題 $\boldsymbol{x=y}$ のゲーデル数は $2^{15}\cdot 3^{19}\cdot 5^5\cdot 7^{23}\cdot 11^{17}$ (以下，A と略記) である。

命題の列(例えば「証明」)には，各命題のゲーデル数の列 $h_1,\ h_2,\ \cdots,h_m$ に対して $2^{h_1}\cdot 3^{h_2}\cdot 5^{h_3}\cdot\cdots\cdot p_m^{h_m}$ を対応させる(命題列のゲーデル数)。この対応も一対一である。例えば命題列‘$\boldsymbol{x=y\ x=y}$’のゲーデル数は $2^A\cdot 3^A$ である。

自然数の各々は素因数分解によって，基本記号のゲーデル数か，基本記号列のゲーデル数か，そのどれでもないか——これが大多数——が分かる。

(3°) 以上の手続きによって，公理系での論理的推論などもゲーデル数に関する比較的簡単な計算， **原始帰納的関数** (primitive recursive function; p. r. f. と略) よる計算で置き換えられる。p. r. f. とは，自然数論に即して数学的帰納法的に定義される関数で，与えられた変数値に対する関数値は必ず有限回の手続きの繰り返しで計算できるのが特徴である。また自然数間の関係 $R(x,\ y)$ は，その真偽の判定が或る p. r. f. で置き換えられるとき(真は 0，偽は 1)，原始帰納的関係 (p. r. r.) と呼ばれる ［付録 2 参照］。

S のメタ的関係の中には p. r. f. で表されるものがある。例えば

(a) “「命題列」x は「命題」y の「証明」である”（記号：$x\,B\,y$）は，「命題列」x の冪(べき)指数が全て「公理」か「それ以前に得た命題から導出できる命題」かで，最後の冪(べき)指数が「命題」y である時に真，それ以外は偽であるが，その間の計算は全て p. r. f. で済む。例えば「公理」とは，公理に当たるゲーデル数の集合であり，n が「公理」か否

かは，n がその集合に属するか否かで判定される。「既得の命題から導出できる命題」なども同様で，それらはいずれも p. r. f. によって判定される。

要するに，ここで「　」で示した類の，S に関する一連のメタ概念は T における初等整数論の中で原始帰納的に計算，或いは判定されるのである。

(4°) 関係 $R(x_1, \cdots, x_n)$ が原始帰納的だとすると，変数値に対する（T での）真偽は有限的に判定されるから，その検証過程は（メタ概念も含めて）p. r. f. によるゲーデル数の算術に書き換えられるが，R を再び形式的体系 S に移した上，更にそれを T に戻したものを r とすると，T における R の「真」，「偽」は S において「r の証明可能」，「r の否定の証明可能」で置き換えられる。うっかりすると R の真を「証明可能」に，偽を「証明不能」にしかねぬことだが，以下見るように，この一連の手続きこそ，この壮大な天才的仕事の第一歩であり，p. r. f. による計算や判定の具体的有限性が大きく利いている。実際，R の偽は「R が証明可能ということの否定」ではなく，これを「R の否定が**証明可能**」として，r を作ることができるのである（なお「数学史における逆説の役割[1)]」6–1，6–2 節を参照）。二変数の形で詳しく言えば，

> 「原始帰納的な $R(x_1, x_2)$ に対して「関係」r，変数 x_1, x_2 に対して「自由変数」19，23 が存在し，x_1, x_2 の各々の値 a_1, a_2 に関して次の式が成り立つ。（後の利用のため (1) の方に $\overline{}$ を付けた。）
>
> (1)　$\overline{R(a_1, a_2)} \to Bew\left[Sb\ r\begin{pmatrix}19 & 23\\ z(a_1) & z(a_2)\end{pmatrix}\right]$
>
> (2)　$R(a_1, a_2) \to Bew\left[Neg\left(Sb\ r\begin{pmatrix}19 & 23\\ z(a_1) & z(a_2)\end{pmatrix}\right)\right]$

なお $Z(a_1)$ は a_1 の上記のゲーデル数，Sb は「代入」という操作のゲーデル数によるメタ演算で，例えば $Sb\ r\binom{19}{z(3)}$ は，r の冪（べき）指数である「命

1) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部所収。PDF 版は「科学図書館」`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/role-paradox-utf.pdf` に収録

題」の各々に現れた「自由変数」19 を，$Z(3)$ に対する $2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^1$ で置き換え，以後の冪（べき）指数を先送りにずらす操作，$Neg\ A$ は「A の否定」（を示すゲーデル数）で，否定記号 $\neg$ のゲーデル数 7 を 2^7 の形で先置して，後続のゲーデル数 A の冪（べき）指数を順にずらす操作である。この種のことはいずれも原始帰納的関数で計算できる。

(5°) ところが“命題 z は証明可能である”という述語（関係）は

(b) “xBz なる「命題列」x が存在する”（記号：$Bew(z)$）

と解されるが，z に対して吟味すべき x の範囲が限定されず，p. r. f. で処理できる有限的範囲を超える。（この判定は「x が存在する」との仮定で行われ，その過程で p. r. f. の具体性を少し弱めた一般帰納的関係（g. r. f.；付録 2 参照）が用いられる。）

ゲーデルは先ず，

“S から ‘$a(Z(n))$ for all n’ が得られるならば，S から $\forall v\, a(v)$ も得られる”

を望みたいが，それでは強すぎる（ω–rule を要請することになる）ので，せめて $\neg\forall v\, a(v)$ は証明できないとする。即ち数 1, 2, …… をそのニュメラルで置き換えるとき，

（c） “$a(\mathbf{1}), a(\mathbf{2}), \cdots, a(\boldsymbol{n}), \cdots\cdots$ がすべて導ける一方で，$\neg\forall v\ a(v)$ ［即ち $Neg(v\, Gen\, a)$］ も導かれるようなことはない”（ω–無矛盾）

という条件の下で S を拡大して S_k と呼ぶ。（ω–無矛盾は，ラッセルの無限列車の逆理，各客車はいつかは動くが，全体は動くのか動かないのかに対して，その隙間を衝くような条件である。）こうして彼は

“S_k において原始帰納的な述語 r で，$v\, Gen\, r$ も，$Neg(v\, Gen\, r)$ も S_k では導出できないものが存在する”

ことを証明する。Gen は S での $\forall$（ゲーデル数 13）に対応する「全称記号」。この $v\, Gen\, r$ が決定不能の命題で，r を定めるのがゲーデルの工夫である。

(6°) 決定不能定理の証明はほぼ次の通りである。

先ず数 x, y の関係 $Q(x, y)$ として

“x は $Sb(y\binom{23}{z(y)})$ の S_k での証明ではない” 即ち $\overline{xB_k[Sb(y\binom{23}{z(y)})]}$ を作る（B_k は ‘S_k における B’ の意味)。平たく言うと “「命題列」x は,「命題」y に(y 自身でなく) $Z(y)$ を「代入」した結果についての「証明」ではない” ということだが，(4°) により，Q に対応する「関係」q (「自由変数」19，23) が取れ，(1)，(2) から

$$(3)\qquad \overline{x\,B_k[Sb(y\tbinom{23}{z(y)})]} \to Bew_k[Sb(q\tbinom{19}{z(x)}\ \tbinom{23}{z(y)})],$$

$$(4)\qquad x\,B_k[Sb(y\tbinom{23}{z(y)})] \to Bew_k[Neg(Sb(q\tbinom{19}{z(x)}\ \tbinom{23}{z(y)}))].$$

が得られる。q は $[Sb(y\binom{23}{z(y)})]$ に到る「証明過程」を基に作られるが，左辺での $Sb(y\binom{23}{z(y)})$ の不成立は，右辺では $Sb(q\binom{19}{z(x)}\ \binom{23}{z(y)})$ の「肯定の証明」，その成立は右辺では「否定の証明」とあべこべになっている。これがこのあと利(き)いてくる。

ここで $p = 19\,Gen\,q$ とおくと p は確定する。そこで p の「自由変数」23 に $\boldsymbol{Z}(p)$ を「代入」する。手取り(てっとり)早く言えば，p 番目の命題 $19\,Gen\,q$ の自由変数に $\boldsymbol{Z}(p)$ を代入するのだが，p は厖大(ぼうだい)だが確定した自然数なので混乱の生ずる余地はない。（もっとも S と T とを往復する内に，これらの数はどんどん巨大になる。）

今 $r = Sb(q\binom{23}{z(p)})$ (r の「自由変数」は 19) と略記し，p を (3)，(4) の y に入れると，(3) は

$$\overline{x\,B_k\,Sb(p\tbinom{23}{z(p)})} \to Bew_k[Sb(q\tbinom{19}{z(x)}\ \tbinom{23}{z(p)})]$$

だが，左辺の Sb は $Sb(19\,Gen\,q\binom{23}{z(p)})$ を経て $19\,Gen\,r$ となり，右辺の $Sb(q\binom{19}{z(x)}\ \binom{23}{z(p)})$ は $Sb(r\binom{19}{z(x)})$ となる。(4) も同様で，結局，

$$(5)\qquad \overline{x\,B_k(19\,Gen\,r)} \to Bew_k[Sb(r\tbinom{19}{z(x)})]$$

$$(6)\qquad x\,B_k(19\,Gen\,r) \to Bew_k[Neg(Sb(r\tbinom{19}{z(x)}))]$$

が得られ，$(19\,Gen\,r)$ が求める不確定な命題になる。これを大雑把(おおさっぱ)に言えば，(5) は，x が $(19\,Gen\,r)$ の「証明」でないとき，x のニュメラ

ル $\boldsymbol{Z}(x)$ を r の「証明列」用の自由変数 19 に「代入」すると，q での「最終命題」として $19\,Gen\,q(=p)$ に対応する $r = Sb(q\binom{23}{z(q)})$ が「証明」できること，（6）はあべこべに，前者が「証明」であるときには，同様の手続きによって「最終命題の否定」が「証明」できることという，ちぐはぐな状況を示している。

今，もし $19\,Gen\,r$ が S_k で証明されたとすると，(6) の左辺の x があるはずで $Neg(Sb(r^{19}_{z(x)})))$ が証明できることになる一方，Gen の性質によって $Sb(r\binom{19}{z(x)})$ も証明されて矛盾になる。他方，$19\,Gen\,r$ が証明できない以上，「どの n に対しても $(n\,B_k(19\,Gen\,r))$ の否定」が成り立つが，（5）によって「どの n に対しても $Bew_k[Sb(r\binom{19}{z(n)}))]$」となるので，$\omega$–無矛盾の条件と矛盾する。即ち $19\,Gen\,r$ は，S_k では証明もできず，否定の証明もできない命題である。

これはリシャールの逆理に似た状況だが，「証明過程」のような一連のメタの考察を，理論の対象である自然数と，それらの数を用いて表現された対象を外部から数えるときの数(実はニュメラル) $\boldsymbol{Z}(\quad)$ とを峻別するなどの手段で逆理は回避されている。その代わり，q，p，$\boldsymbol{Z}(p)$ を始め，ここに現れるゲーデル数は気の遠くなるほど厖大になり，加えて S と T とを往復しなくてはならないから，この話はなかなか難しい。しかしよく検討すると明快であり，メタ数学的考察の一典型として，しかも初めて公理的数学の限界を示した点で，その後の基礎論への影響は巨大である。それだけでなく，この定理は論理的言語の本質の吟味に大きな意味をもっている。

次にその最初の結果として，彼がこの論文の最後に示したほぼ次のようなメタ定理が挙げられる。

“自然数論 P が無矛盾 (widerspruchsfrei) である場合，「P が無矛盾である」ということは P の中で証明できない”

“P を含む任意の体系 S_k (例：集合論の公理系 Σ :「カントルにおけ

る数学と哲学[1]」補説）が無矛盾の場合，「S_k が無矛盾である」ことを示す「命題」（これは S_k の論理式として表現できる）は，S_k において「証明可能」ではない”

平たく言えば，これは，「どんな弁護士も自分の関わる訴訟事件の弁護をすることはできない」というようなことを，然(しか)るべき条件の下で精密に検討した結果としてよい。ただ，それが並大抵(なみたいてい)の仕事ではなかったのである。

証明は上記の関係 $Q(x, y)$ の以下の議論と同様の形で進められる。詳細は略すが，もし「S_k が無矛盾」ということを表す「命題」w が，S_k で「証明可能」であると仮定すると，上の議論によって

$\overline{Bew_k}(19\,Gen\,r)$.

一方，「命題」

$w\,Imp(19\,Gen\,r)$

（Imp は S での $\supset$ に対応する「ならば」の記号，r は前ページの r）

も S_k で「証明可能」となり，そこから $(19\,Gen\,r)$ の「証明可能」，即ち，

$Bew_k(19\,Gen\,r)$

もまた得られることになる。これは不合理だから，このような w は S_k では証明可能ではない。

［**付記**］ここで示したのは，普通の意味での自然数の全体 N の中に「公理的自然数論の可算モデル」が作られる事情だが，実はこれと似た仕方で実数論や集合論の公理的理論の可算モデルも作りうる。

N の公理的理論の一切が N の中に作られるというのは逆説的な話だが，それが矛盾なく作られるのは上記の通りで，しかもそれは実際上ゲーデル数という特殊な形の自然数だけでできている。言いかえれば，N に

1) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf` に収録

はなお無数の自然数が残っているのである。

「数学における無限と有限の弁証法[1]」で集合論 ZF (「カントルにおける数学と哲学[2]」補説 3) を用いるコーヘン・モデルについて触れたが，種々の特異な「集合論」のモデルが作られるのは，それら「残る無数の」自然数が利用できるからである。「数学史における逆説の役割[3]」補説 2 も併せて参照されたい。

---

1) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部，所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/math-inf-finite-utf.pdf に収録
2) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部，所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf に収録
3) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部、所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/role-paradox-utf.pdf に収録

付録２　帰納的関数と帰納的述語

(a)　原始帰納的関数・原始帰納的述語

原始帰納的関数 (primitive recursive function；p. r. f と略) は数論的関数(定義域も値域も自然数)の一種で, その原型はデデキンドの『数とは何か』の「§9 の帰納法 (Induktion) による写像」にある。本来 'recursive' は「回帰」「繰り返し」の意味だが, 内容的にはデデキント的「帰納 (induction)」と同義である。また 'primitive' は 'general' に対して本来は,「元々の」というぐらいの意味であろう.

p. r. f. は次の五つの手続きを有限回繰り返して得られる関数である。

(1)　x の後者 x' をとる関数：$F'(x) = x'$

(2)　定数 q を取る n 変数関数：$F^2_{n,q}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = q$

(3)　変数の中から１個を取る n 変数関数：$F^3_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_k$

から出発し,

(4)　代入：例えば，既得の p. r. f. $X(_1, x_2)$ に

$$\text{p. r. f. } Y(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

を代入する：

$$X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X(Y(x_1, x_2, \cdots, x_n), Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)),$$

(5)　帰納的手続き：既得の p. r. f. $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $Y(y, z, x_1, \cdots, x_n)$ とから，次の関数 $Z(y, x_1, \cdots, x_n)$ を得る手続き

$$\begin{cases} Z(0, x_1, \cdots, x_n) = X(x_1, \cdots, x_n) \\ Z(y', x_1, \cdots, x_n) = Y(y, Z(y, x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

要するに $Z(y', x)$ を，直前に得た関数値 $Z(y, x)$ (と x や y) から既得の関数 $Y(y, z, x)$ によって定めることである。

例えば加法 $x + y (= f(y, x))$ は下記の通りだが，やや略記してある。

$x + 0 = x$　　　　$(f(0, x) = F^3_{1,1}(x) = x)$,

$x + y' = (x + y)'$　$(f(y', x) = F'(F^3_{3,2}(y, f(y, x), x)) = (x + y'))$

として, また乗法 $x \cdot y(= g(y, x))$ は, 加法 $f'(y, x)$ を用いて,

$$x \cdot 0 = 0 \qquad (g(0, x) = F^2_{1,0}(x) = 0),$$
$$x \cdot y' = x \cdot y + x \qquad (g(y', x) = f(g(y, x), x))$$

として、p. r. f. である。

束縛変数のない命題関数 $A(x, y)$ についても，変数 x, y が自然数であれば（真の時は 0, 偽の時は 1 をとる）表現関数は p. r. f. になる。例えば否定 (not)，選言 (or) の表現関数は次の $n(x)$, $p(x, y)$ で与えられる。

$n(x)$：$n(0) = 1$，$x \neq 0$ の時は $n(x) = 0$.

$p(x, y)$：$p(0, y) = p(x, 0) = 0$，x も y も 0 でない時は $p(x, y) = 1$.

両立 (and)，含意 (if, then) の表現関数もこれで表現できる。‘x and y’ の表現関数は $n(p[n(x), n(y)])$ である。

また数の相等に対応する表現関数 $q(x, y)$ も p. r. f. である。

$q(x, y)$：$x = y$ の時は $q(x, y) = 0$, $x \neq y$ の時は $q(x, y) = 1$

数の不等 $x < y$ は $(\exists z)[x + z' = y]$ だが,$(\exists z)$ を使わなくともすむ：
「$x+0' = y$ or $x+0'' = y$ or $\cdots$or $x+0''\cdots' = y$ ($''\cdots'$の個数は $y - x$ 個)」

一般に束縛変数のある命題 $(\exists x)R(x, y)$, $(\forall x)R(x, y)$ も，不等性の場合と同様，x を検査する範囲が（y で定まる p. r. f. によって押さえられる）有限範囲である限り，真偽関数が p. r. f. になることが確かめられる。

表現関数が p. r. f. で表される命題は原始帰納的述語 (p. r. p.) と呼ばれるが, 数論の多くの関数や命題は p. r. f. の範囲で論じられ，ゲーデルの決定不能定理（附録 1）で重要な役割をする。

(b)　一般帰納的関数・一般帰納的述語・チャーチの提言

一般帰納的関数 (general recursive function：g. r. f. と略) は p. r. f. の条件 (1)—(5) に次の (6) による $f(x)$ の定義を加えたもので，$F(x, y)$ は既得の関数，$\mu y R(y)$ は，$R(y)$ を満たす y が存在すればその最小値，さ

もなければ 0 をとる関数とする。x は一般には $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の形でよい。

(6)　$(\forall x)(\exists y)(F(x, y)=0)$ の時に限り $f(x)=\mu y(F(x, y)=0)$

要するに p. r. f. の与える具体的計算を具体性のやや弱い作用素 μy によって拡張したのが g. r. f. であり，g. r. f. を表現関数とする述語を一般帰納的述語 (g. r. p.) と呼ぶ。（本格的な説明は成書，, 例えば Kleelle, *Introduction to Metamathematics* (1952) などをご覧頂きたい。）

チャーチの提言は，ボレル以来種々問題のあった ‘effectif’ の概念について，「エフェクチヴに計算可能な関数」とは g. r. f. のことと考えようという提言である。勿論(もちろん)これは証明すべくもない主張だが，多くの実例によって妥当と考えられている。有限的に計算可能あるいは決定可能の範囲をこの辺に見定めたのが，チャーチの提言の真意であり手柄である。

次にゲーデルの証明で，p. r. f. では収まらないところを実例によって示そう。ここで論理式はゲーデル数 (付録 1) で表現されているとする。即ち，基本記号を自然数 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ で置き換えた上で、記号列たる論理式 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n})$ には自然数

$$k = 2^{a_{i_1}} \cdot 3^{a_{i_2}} \cdot \cdots \cdot p_n^{a_n} \ (p_n\text{は } n \text{ 番目の素数})$$

が，また論理式の列 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ には自然数

$$j = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \ \cdot \cdots \cdot p_m^{k_m}$$

が対応し，式の数表現もその逆表現も常に一意的に可能であるとする。

(例 1)　「x は y を割り切る」という命題

$$A(x, y) = (\exists n)[n < y \,\&\, n \cdot x = y]$$

の表現関数 $a(x, y)$ は p. r. f. であり, $A(x, y)$ は原始帰納的述語 p. r. p. である。実際、[　] 内の条件で，$n < y$，&，$n \cdot y$，$=$ はいずれも p. r. f. で表現でき，n を探す範囲は y まででよい。それによって，$A(3, 5)$ に対

しては $a(3, 5) = 1$，$A(3, 6)$ に対しては $a(3, 6) = 0$ となる p. r. f. が得られるわけである。

(例 2)　「x は素数である」という命題

$$B(x) = (\forall n)[1 < n < x \to not A(n, x)]$$

の表現関数 $b(x)$ も p. r. f. である。

念のために繰り返すと，上の $A(x, y)$，$B(x)$ で $(\exists n)$，$(\forall n)$ の n を [ ] 内の式で探すのに，$(\exists n)$ においては&，$(\forall n)$ においては $\to$ の形で, $n < y$ や $1 < n < x$ によって有限範囲に押さえられているのが重要で，この条件が表現関数 $a(x, y)$，$b(c)$ が p. r. f. になる決定的な条件なのである。

(例 3)　「命題列 Y は命題 X の証明である」という命題 $C(X, Y)$ では, X, Y を表わすゲーデル数 x, y は極度に巨大になるが，, 彼はそれでもそれらの探索範囲が有限に止まることを示して，その特性関数 $C(x, y)$ を p. r. f. の形で得た。即ち $C(X, Y)$ も p. r. p. である。ところが

(例 4)　「命題 X にはその証明たる命題列 Y が存在する」という命題 $D(X)$ の表現関数 $d(x)$ は「$(\exists y)c(x, y)$ となる最小の y」とまでは書けるが,「命題 X」が証明不能の場合もあるため，y を探すべき限界 $z(> y)$ の定めようがなく，$d(x)$ は有限性を本領とする p. r. f. になってくれない。

(c)　階層の理論

前にボレル集合，解析集合，射影集合その他には，種々のニュアンスや不透明さが現れることを見たが，チャーチの提言を容れると事は大幅に明確になり，少なくとも理論的骨組みに関する限り，多くの問題や予想が肯定あるいは否定されている。特にボレル集合や射影集合

に現れた階層的構造（「フランス経験主義の数学思想[1]」補説 3，4 参照）は帰納的関数の基盤の上で，クリーネその他の人々によって極めて整った「階層の理論」に発展している。

算術的述語とは，g. r. f. $R(a)$, $R(a,x)$, $R(a,x,y)$，…から出発して，等号，普通の論理演算（変数 x, y, … は自然数の範囲に限定し，$(\exists x)$，$(\forall x)$ を許す）を有限回施して得られる述語を言う。このとき $(\exists x)(\exists y)\cdots$ のように同種の限定記号が並んだ場合は一つの $(\exists *)$ の形に直せるので，それらは

$$R(a),\quad \begin{array}{ll} (\exists x)R(a,x), & (\exists x)(\forall y)R(a,x,y),\cdots\cdots \\ (\forall x)R(a,x), & (\forall x)(\exists y)R(a,x,y),\cdots\cdots \end{array} \tag{1}$$

に整理され，右へ行くほど広範な述語群になることが分かる。(1) において k 個の限定記号を持ち，$(\exists *)$ が先頭に来るものを $\sum_k^0$ または $\sum_k$，$(\forall *)$ が先頭に来るものを $\prod_k^0$ または $\prod_k$ とすると，g. r. p. は $\sum_1 \cap \prod_1$ となるが，これは射影集合論において，ボレル集合族が $\boldsymbol{P}_1 \cap \boldsymbol{C}_1$ に一致するのと対応し，全体として「フランス経験主義の数学思想」の補説 3〜5 における階層と対応する。$\sum^0$ や $\prod^0$ の上付の ^{0} は，算術的述語を，より広い解析的述語（自然数とともに，自然数から自然数への関数，つまり実数 a, b,…… をも変数とし $(\exists a)$，$(\forall a)$ などを許すもの）について $\sum_k^1$，$\prod_k^1$ があるからだが，ここでは省略する。

ともかくこれらの理論は具体性ある p. r. f. ないし g. r. f. に基づく数論的構造の議論であり，射影集合論などに比して著しく透明な上，(g. r. f. の定義の出発点を (1)–(3) の他に或る適当な関数族を追加するなどの考慮によって）ボレル族や射影集合族と関連がつくため，現在では古典的な難問をこの形で取り上げることが多い。しかしこれだけが無限や連続の問題に迫る唯一の道かどうか，私自身は未だに迷っている。

1) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/France-keiken.pdf 所蔵

チャーチの計算可能性には，チューリングの機械という理想的コンピューターによる定義など，同じように説得的な同値な提言がいくつかある。この機械の場合，コンピューターはディジタルつまり自然数上の計算だから，当然と言えば当然のことながら，例 4 の，証明 ‘Y’ のない場合だったら，チューリングの機械は永久に（!?）動くだけの話である。

- 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部，1998 年 12 月）所収。
- 適宜振り仮名をつけた。
- PDF 化には LaTeX 2_ε でタイプセッティングを行い、dvipdfmx を使用した。

科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/science/sciencelib.html

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs