

# 純粹数学と応用数学

——その謎に関するメモ——

村田 全

これはまとまった議論ではない。このテーマのもつ或る哲学的側面を紹介し、自分が日頃考えていることに一つの形を与えるのが目標である。

## 1

数の知識はどこから来たか。特に自然数は天与 (apriori) なのか、後天的 (aposteriori) なのか。生理的リズムや自然現象の反復 (順序数)、物事の多い少ないの比較 (基数) 等はその知識の発端だろうが、一旦、理論になると、それは一切の経験を超えた真理と見られる。しかし経験を超えた真理とは何か、人間はいかにしてその種の真理を認めうるのか、これが第一の謎である。

手近な例で言えば、水  $1l$  と米  $1l$  の「和」は、水が隙間に浸入するため  $2l$  でなく、水  $1kg$  と米  $1kg$  の「和」が  $2kg$  だが、 $1 + 1 = 2$  はそれらの経験を超えた真理とされる。そして改めて経験によって、前者はこの真理の適用が不適切な場合、後者は適切な場合と判定される。 $1 + 1 = 2$  は経験に始まった知識のはずだが、いつか経験という母胎を超越するのである。

よく知られているように、これは18世紀の哲学者カントが取り上げ、一応の解決を与えた問題だが (カントの『純粹理性批判』)、それにしても今日のわれわれがそれで満足できるか否かは別の問題で、これが人間にとって今も謎であることは変わっていない。

## 2

有理数や正負の整数には別の事情が加わる。有理数の源はまだしも連続的量の測定や比の問題といえるが、零および負数となると規約的性格が強く、自然数に

比べて多分に人為的である。それらの数も天与なのか、それとも人間の創造物なのか、これもまた一つの謎である。

19世紀、ガウスの影響下で、「保守的」なクロネッカーは「自然数は神の創りたもうたもの、他はすべて[死すべき]人間の仕業」という意味のことを言って数学における自然数主義——数学の数論化——を主導したが、すぐ次のデデキントは同じくガウスの影響下で「数は人間精神の創造」として、集合論的構成によって「数」の世界を拡大する思考形式を確実にし、カントルはまた「数学の本質はその自由性にある」として同じ道を更に推進した。その意味でこの第二の謎は「数」「関数」「集合」などの現代的概念を視野におくとき、カントの処理を超えて現代の数学基礎論の根底にある哲学的問題に直結する。

### 3

通約不能量（無理数）の発見、むしろ創造は、更に深い問題を含む。これは、経験的現実存在せぬ対象を数学的存在と認知した事件だからである。ギリシア人は二つの量の共約量に基づいて比の概念を構築した後、共約量の存在せぬ場合がありうることを認識し、「比」の概念をそこまで飛躍させた。更にその結果として、大きさのない「点」、幅のない「線」のようなイデアル（理念的）な対象からなる「観念の世界」を数学において発見または創造した。上の超経験的真理はこの世界においてこそ成り立つ。だがこの「観念の世界」とは何者なのか。

ついでに注意すると、発見は既に存在するものあるいはことを見出すことだが、創造となると、本来まだ存在しなかった対象を創り出すことを意味する。この区別もまたこの世界を考えるに当たっては本質的である。いずれにせよプラトンはそれらイデアルな対象からなる「イデア界」を想定し、人間はかつてその世界にあったため、現世においても当時の「想起（アナムネイシス）」に基づいて、理想通り（イデアル）の真理に近づけるのだとした。この議論を信ずるか否かは別として、ともかくプラトンはこれで超経験的真理の存在を一応救済（save）したのである。

### 4

さてこの観念的数学の創造は後の数学の命運を定めた。近代の解析学はもとより、現代の純粋数学はすべてこの線上にあると言っても過言ではない。そしてここで改めて強調すべきは、観念的世界と経験的世界をつなぐ学としての数学のもつ不思議さである。実際、各々の数学的事象は、たとえ特定の経験から生まれたにせよ、一旦、理論として確立されると一人歩きを始め、予想もしなかった広範な応用範囲を経験的世界にもたらすことさえ多い。

一例を挙げよう。ギリシア時代、アポロニオスは純幾何学的に円錐曲線を創ったが、ケプラーは約二千年後にそれを惑星の軌道の表現に用いた。もちろんアポロニオスの想像外のことである。今日この種のことは、宇宙の真理が数学的性格をもつ事実の例として、むしろ当然視されている。しかし考えてみると、これは極めて不思議なことで、アインシュタインか誰かが言ったように、「この宇宙に不思議なことは何もないとはまた何と不思議なことか」である。

それだけではない。地球の軌道である「楕円」と数学的楕円とはいくらかズレているが、その誤差は他の惑星その他からの影響のせいで、「本当は」楕円軌道だとされる。しかし「誤差」とは「真の値」があって初めて言えることであり、「真の値」の所在は数学の世界にある。そしてこの「本当は」という点はニュートン力学で更に詳しく説明されるが、そこでも理論と経験の関係が複雑になるだけで、事柄の不思議さ自体は変わらない。これを自然と数理の調和と呼ぶのはやさしいが、その調和の根拠を人間の外に求めるか内に求めるかは、大変な難題である。

なお惑星軌道が円錐曲線で表現されたことは、円や球などの「完全図形」に基づいた古代の宇宙論を根底的に覆した事件で、これは、重力や摩擦力などの外力が働かない場所そんな場所は経験的現実世界のものではなく、観念的世界のものであるにおける運動が、直線上の等速運動をするという事実の認識ガリレイに始まるとともに近代科学革命の重要な一步である<sup>1)</sup>。

以上要するに、人間が心の中で考えた数学が経験を越えた真理と認められ、かつその考慮の範囲を超えて外界を説明すること、更に理論からのズレがあれば、それは理論上の真の値からの誤差あるいは近似として処理されること、その根拠は何かがこの問題だが、これは宇宙における人間存在の根底に潜むまことに

<sup>1)</sup> 「『数学』の概念と数学史への視点」(『数学と哲学との間』村田全著、玉川学園大学出版部、1998年所収)のp.224以下参照

解きたい謎である。

## 5

こうした例は枚挙に暇がない。目新しいところでは、19世紀にカントルが定義した或る点集合(完全疎集合<sup>1)</sup>)を用いて後継者によって定義された特殊な関数が、全く別の経路から物理学に出現し、かつフラクタルの形で数学的に説明されたり、およそ応用と無縁なような整数論にまで出番があったりという状況がある。

そもそも数学的真理は人間の外の世界の中に埋め込まれていて、人間の精神はその潜在能力の一環として単にそれを映すだけなのか、それとも逆に、人間の精神に先天的に内在する或る能力が経験的世界の中に秩序を付与し、それが数学的真理と呼ばれるのか、この二つの見方は大昔からあって、両者の優劣を定めることは、学問の歴史から見ても事実在即しても不可能に近い。しかもこれは、観念と経験との二本の足に立つ学問としての数学にとって、最も本質的な点なのである。数学的真理の代わりに音楽の旋律や和音をとり、これが外界にある何者かの反映か、人間の内的創造かと問われたら、簡単に答は出せないであろう。

## 6

18世紀のカントはこれについてコペルニクス的転回をしたと自ら書いている。それは彼が純粹数学の超越的真理性と応用数学の経験的可能性との双方を所与の事実と認め、そのような認識が可能のために人間の理性はどんな条件をもつべきかというふうに、視点を180度、転回させたことによる。

この考え方は卓抜だが、端的に言えば、プラトンがイデアの世界を持ち出したのと同様に、現象を救済(save)するための弁明だったと言ってよい。彼が「数学」と考えていたものは18世紀数学の水準から見ても決して新しいものではなかったが、とにかく彼は数学や物理学に深い関心をもっており、またその批判を介してそこにもかなりの影響を残した。例えば彼はユークリッド的な三次元空間——ニュートン力学の基盤でもあるもの——を天与(アプリオリ)としたが、その批判は逆に数学者の社会に空間論への関心を呼び起こし、非ユークリッド幾何学の

<sup>1)</sup> 「カントルにおける数学と哲学」(『数学と哲学の間』村田全著、玉川学園出版部、1998年所収) 参照

誕生を先導する一つの要因になったとする評価もある（近藤洋逸『新幾何学思想史』）。しかしカントの後継者たちの関心は（「物それ自体」のような）より認識論的な方向に向かったため、彼の数学、物理学の真理性の問題はしばらく哲学の主流から離れた。しかし20世紀になっても、例えばヒルベルトとブラウエルは数学の基礎について、意見を異にしながら共にカントを援用している。カントの考え方にはそれだけの重さがあるのである。

## 7

しかし数学の歴史的展開、特にその発見的側面に注目している私には、このカント流の考え方にも満足できぬ点がある。ここで詳しく述べる余裕はないが、彼の考え方が人間の理性をそれ以外の世界から余りに画然と切り離しかつ固定して、両者を対等に扱っているように見える点が気にかかる。更にその背後には、数学的真理を含めて、およそ「超越的真理」など、果たして人間の手に届くのか、それは幻想とどう違うのか、という疑問さえある。そう言えば、歴史における「真実」などどこにあるのか、またたとえどこかに存在していても、それをいかにして認識できるのか、大いに疑問である。（私はここで、「歴史的眞実」の存在に深刻な疑問を投げかけた芥川龍之介の小説「藪の中」を思い起こしている。）

私のこれらの疑問は「歴史主義」と呼ばれる一連の哲学に包摂され、その哲学が蒙った批判を免れまい。また後半の懐疑主義は学問的追求の放棄と見られるかもしれない。しかし私は、数学も人間の営みだし人間は本質的に歴史的存在だと考えているので、上のような考え方も軽々に捨てられない。しかしその実現のためには、デカルト的な物心二元論を再検討し、人間精神も自然の一員だという一元論的批判にまで到らざるを得まいから、これは差し当たり一つの白昼夢としておこう。

もちろん、上記のことは数学の技術の修得には役立たない。しかしそれは「愛知<sup>フィロソフィ</sup>」の始まりであり、数学の本質への省察は深まる。そしてあえて言えば、この愛知の精神こそ、数学教育を含めて現代日本の教育の重大な欠落の一つであろう。

---

## PDF 化にあたって

本 PDF は、

村田 全『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）

を元に作成したものである。

村田全先生のその他の著述は

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

<http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html>

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは、

「科学図書館掲示板」

<http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs>

を御覧いただくか，書き込みください。