数学における無限と有限の弁証法

村田　全

本稿の原型は，竹内啓教授編『東京大学教養講座 1　無限と有限』（東京大学出版会，1980）所収の「数学における無限と有限 (II)——カントルからコーヘンまで——」だが，以下は全面的な改稿である。ただし，竹内氏の問題提起を承けたものだったため，文体は講義記録の形を保存した。

1 テーゼ:無限と有限の弁証法

無限という問題は数学や哲学のみならず非常に広くまた深く，それこそ無限に難しい問題で，種々の局面があり歴史がありますが，竹内氏は今回，無限と有限ということを学問の方法と結びつけて考えようというふうに問題を提起されました。この問題提起は非常に新鮮だと思います。そこで私の方でもその意気に感じて数学史の断片の解説に止めず，竹内氏の問題提起に対する私なりの考えを試論として提示することでそれに応えようと思います。

ここで示すテーゼは，勿論これで歴史を無理に解釈しようとするものではなく，逆に史実の観察の所産ですが，それによって今後，ものを考える手懸かりにしたいという気持ちはあります。考察のきっかけになったのは下村寅太郎『無限論の形成と構造』（弘文堂，1944; 再版，みすず書房，1979）です。私はその影響の下で伊東俊太郎，原亨吉の両氏との共著『数学史』（筑摩書房，1974，絶版）を書きましたが，私の書いた第 3 部には不備もあり，その後，私見にも多少の変化が生まれています。［今回はその変化の中間報告 (1996) であります。］

下村氏はその本で，無限なるものはそれを見よう掴もうとする意志，ないしその意志の主体たる自我がないと，見えも掴めもできないものだということを注意されましたが，これは私の考えの基礎になっています。しかしその半面，私は数学が，抽象的，理念的な学問であるとともに具体的，経験的な学問でもあり，いわば理念と経験の二本足で立っていると見ていることを強調しておきます。

ところで私のテーゼは，口にするとただの弁証法的見方であり，改めてテーゼなどと呼ぶほどでもない気もしますが，それはこういうことです。

「数学の発見的で創造的な局面において，**何らかの意味で無限論的**な論法は，

具体的で経験的な手懸かりを抽象的理念的なものに飛躍させ，最も根本的な発見や創造を生み出す有力な手段として働く。しかしそれは必ずしも整合的でも説得的でもないことがある。」

「それを説得力ある形に直し，特に具体的で経験的な現実に還元適用しようとするとき，その無限論的論法を潜在させた何らかの意味で有限論的な合理化が行われ，従来処理しにくかった「無限」が，その「有限」の角度から処理されるようなことも生じる。次の飛躍はこの新しい基盤の上に起こる。」

以上が，竹内氏の言われる「学問の方法としての有限と無限」ということについて，数学史の研究者としての私が温めているテーゼであります。勿論，最初の手懸かり段階での「有限」と，後の「有限」とは性質の違ったもので，後者はいわば回り階段を一回りも二回りもしたものです。ただ，時が経つにつれてこの後者の有限性が学界や社会の中に浸透定着し，人々がそれに慣れきって普通の経験的，具体的なものと感じるようになり，そこに再び新しい手懸かりが集められると，次の発見創造の地盤となるでしょう。それはギリシアから現代に到る普通の意味での数学のみでなく，今は「数学」と見られていないような広い意味での数学でも起こってくることのように思います。

注記：クーンは『科学革命の構造』の中で，科学の発展における「パラダイム」の変化ということを強調します。これは注目すべき論点ですが，私の考えはその発表以前からのもので，その影響を受けていません。その後，私は彼が科学史上の事件について，大小となく一律にパラダイムを持ち出すのもどうかと思いますが，特に科学革命における数学の変化の意義をさほど考慮していないらしい点に不満を感じます。クーンのことは「『数学』の概念と数学史への視点」補説で触れます。

ともかく発見や創造という仕事は意志的なものですから，そこではしばしば理念的な無限が或る役割を演じますが，他方，それを先導し，次にそれを跡付け，更には経験の範囲を拡大するという各局面において，理念を現実につなぎ止める役目を果たすのは有限性である，私は数学史を観察してそのようなことを考えているわけです。

実はこの話では，現代の数学的無限論の筆頭である集合論の発端という肝心の

所の吟味が不十分ですが，詳細は後章の話題として，集合論的無限論の歴史的独自性と現代数学の性格の説明には多少の役に立つかもしれません。むしろ集合論以後の数学基礎論の展開の方はテーゼによく合います。

白状すると，この概念構成には不十分な点があります。特に「何らかの意味での」ということをもっときちんと決めないと，テーゼ自身に意味がなくなるおそれがあります。しかしそれはこの吟味の中で検討して行こうと思います。また，無限概念が有限的なことがらの処理に役立つという点については，まだ考察すべきいくつかの要素があって，今回は深入りできません。

要するに私は，このテーゼを確立したものとして示すのではなく，それ自身も吟味すべき対象と考えながら事を運ぼうとしているわけです。

2 集合論・基礎論の場合

集合論の歴史的背景

17 世紀に微分積分学ができ，18 世紀以後それが物理学その他に広く応用されます。しかし当時この学問の理論的根拠などは，哲学的にはともかく数学的に論じられることはなかったようです。というよりも，数学を自然現象に適用するとこんなにうまく行くという，いわば数学の経験論的基礎付けという傾向が 18 世紀にはかなり力を持っていたように思われます。

ところが 19 世紀になると，その合理的な基礎付けについての反省が始まります。つまり微積分学で言う極限算法 (lim) について，従来はギリシア的な幾何学的基礎で済ませていたのに対し，それだと（例えば定積分という面積は幅のない線分の和であるかというような）逆説的な事情が現れたものだから，問題を自然数の理論から始めて，実数とは何かなどの根底的なところから，自然数の理論から吟味し直そうと言う機運が起こったわけです。これは数学の算術化または数論化 (arithmetisation) と呼ばれます。

なお極限算法は普通「成りゆく」という過程的な無限の数学化とされますが，一概にそうも言えないと思います。過程的な無限の数学化は，例えば無限数列

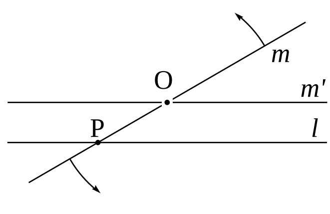
$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots\right\}$$

を一個の「数列」として対象化することであり，「成りゆく」のはここまでで，そ

の数列の果てに「極限値」0を求めることは一種の実無限，実在する無限者の導入とも言えるからです。極限算法を過程的無限の数学化とするのは，原理的に別の実無限である無限集合が導入されて後のことではないでしょうか。

数学の算術化の機運の中心にいたのはガウスです。彼はアルキメデスやニュートンにも比すべき大数学者で，整数の中に隠された数理の深い意味を明らかにし数学の現代を拓いた人ですが，無限について二つの相反する主張をしています。先ず,「もの」として存在する完結的な無限，いわゆる実無限は数学で使うべきでない，数学で使ってよい無限は，どこまでも大きい値の取れる変数，どんな小さい限界も超えて小さくなれる変数など，可能的・過程的なものであって，要するに「変化する有限」についての一種の言い回しに過ぎないと言います。これは非ユークリッド幾何学の無限遠点等の存在に関する発言ですが，他方，彼の本領である整数論では，個々の整数の代わりに剰余類[1)] という無限集合を導入して整数論に新しい地平を拓きます。デデキントはこのガウスの考えを継承した人ですが，同じくそれを継承したクロネッカーという人はガウスの無限批判の方に重きを置き，やがてカントルの集合論に対する激しい批判者になります。クロネッカーはカントルの旧師の一人で,「整数は神様が創り給うたもの，残りはみんな人間の仕業」という有名な言葉を残しましたが，勿論これは人間の仕業を讃美しているのでなく，死すべきものである人間の，かりそめの仕業だというニュアンスを含んだ言葉なのです。

ただしこの辺の状況を見ると，少し前までとかくの議論のあった可能的無限の算法 lim が，既成事実として学界に定着しつつあったことが分かります。これは私のテーゼの一つの裏付けです。



第１図

ガウスが否定した実無限の例として，射影幾何学の「無限遠点」が挙げられます。これは規約的 (conventional) な意味での実無限の例でもあります。

直線 l と，l の外の１点 O があり，別に直線 m が O を中心に，時計の針の向き

[1)] 剰余類とは，例えば整数全体を 3 で割って剰余が 0 のもの，1 のもの，2 のものと三分し，その三つの集合のおのおのを「3 を法とする剰余類」と名付けたものです。整数論の対象として数の代わりに集合を用いるのは，複素整数や代数的整数まで整数論を拡大するときに，実の整数の世界にはなかった事情に対処したもので,「カントルの集合論形成のスケッチ」の補説 1 で少し触れてあります。

に連続的に回るとします（第 1 図)。普通であれば l と m の交点 P も連続的に移動しますが，l と m が平行 m' になる一瞬，P はパッと消えて連続性が破れ，次の瞬間に逆の方から現れてきます。ところがこの「平行」における「交点」を「無限遠点」として実体化する，あるいはそれを「無限遠点で交わる」という便宜上 (conventional) の言い方をすることができます。つまり回転の連続性と交点の連続性との対応が破れないような規約 (convention) を公理として前提して，一つの整合的で美しい理論体系を組み立てることができるのです。この無限遠点などは近代数学では最初の実無限的対象ですが，これを規約として導入するところに，現代数学の（公理を規約とする）公理主義の発端があると言ってよいでしょう。ついでながら，後で触れるポアンカレも公理や定義の規約性を強調し，時として規約主義者と呼ばれますが，彼の言う規約はむしろ経験的現実に対する数学や自然科学の前提の規約性のことで，これも後で触れる数学基礎論における公理主義の考え方とは一応区別してよいものです。

カントルにおける集合論の芽生え

現在では，無限というと集合論，集合論というとカントルというのが普通ですが，彼の集合論は濃度，超限順序数などの分野の開拓に極めて独創的な力を発揮したのが特色で，現代数学一般における集合論の意義を考える場合には，むしろデデキントの寄与が重要です。

カントルはクロネッカーの弟子で，博士論文までは整数論をやっていたのですが，先輩の勧めで，少し前に亡くなったリーマンの解析学上の研究（三角級数表現）を少し改良しようとします。詳しくは「カントルの集合論形成のスケッチ」で述べますが，

「関数 $f(x)$ について，性質 P が定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ の全ての点で成り立つならば，その関数は Q という性質を持つ」

という形の定理があったのを，彼は先ず

「定義域の中に性質 P が成り立たない例外点が有限個あっても，$f(x)$ は Q をもつ」

ことを示し，更に進んで

「例外点が無数にあっても，それが例えば $\dfrac{1}{x}\,(x = 1, 2, \cdots\cdots)$ のように飛び飛

びになっているなど，散らばり具合の如何によっては，同じ結論が得られる」ことを証明します。そしてその目的に合うように無理数の理論をうまく組み立てる一方（補説1），そのような無数の点の散らばり方とはどんなものであるかを吟味し，数学的に表現しようとします。この一連の理論が点集合論の発端で，今日の位相数学（トポロジー）の一つの源であり，カントルが現代数学に残した最大の直接的寄与でしょう。これは1872年のことです。

これも一応は有限から無限への飛躍ですが，それでは表面をなぞるだけで，集合論の発端として単純過ぎます。大切なのは，有理数列の極限としての無理数論が，無数の例外点の場合にも同様に使えると悟ったことでしょう。

もっと扱いにくいのは，その二年後の1874年に整数論の方面で持ち出した別の革新的な考えです。実数や複素数には，代数的数と超越数の二種類があります。整数 $a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_0$ を係数とする代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

の根になる数が代数的数，それ以外が超越数なのですが，自然対数の底 e や円周率 π は超越数であることが知られています。ただし当時，e の超越性は知られたばかり，π の方は未解決だった問題で，その証明は数論的に極めて難しい技巧を要します。ところがカントルはうまいというか，ずるいというか，実の超越数の存在をあっさりとこんな形で証明しました。

「代数的数の全体と自然数の全体の間には，前者をうまく配列すると一対一対応が付けられるが，実数全体では，どう工夫しても自然数との一対一対応が付けられず必ずはみ出しが残る。そのはみ出しは超越数を勘定に入れる結果である。それなら超越数がないわけはない！」（補説2）

この論法によると，e や π がどうなるかなどの具体的なことは分かりません。これがクロネッカーなどの古典的数学者から攻撃されます。しかしその半面，この論法に卓抜新鮮な飛躍があることは誰しも認めざるを得ないでしょう。先ず，自然数その他の各種の数が無数のメンバー（元）の集まり（無限集合）の形で数学の中に正面切って登場しました。次いでそれらの無限集合の間に，自然数全体と一対一対応の付く集合（可算集合）と，実数全体のようにそれができない集合との2種類が区別され，無限集合の元の個数と呼ぶべき濃度に大小が付けられまし

た。こうして過去に類例を見ない新しい証明法，集合論的論法が出現したのです。なお可算集合の濃度は $\aleph_0$（アレフ・ゼロ），実数全体の濃度は連続体濃度と呼ばれて $\aleph$ で示されます。

無限へのこの飛躍は有限的手懸かりなしに行われているように見えます。この「はみだし」の議論を，椅子席が満員で立見客のいる劇場では見ただけで客の数の方が多いという議論の無限化と言うのでは，後知恵もいいところでしょう。問題は代数的数の全体が可算だという着想がどこから来たかです。デデキント宛の手紙によると，カントルはそれまでに，分数を分母，分子の和で大分類し，次にそれを分母の大小順に並べて分数全体の可算性を知っており，実数についてもこの種のことを模索していました。そこでその考えを代数的数にまで拡大したことまでは分かりますが，それは飛躍の事実であって説明にはなりません。

これを説明するには，カントルに対するデデキントの影響を考慮すべきかもしれません。実際，カントルの破天荒な着想はデデキントに触発されたと見られる節があるのです。カントルは 1872 年の春，14 歳年長のデデキントとたまたまスイスで会い，その後ずっと文通を続けて多くの影響を受けます。上記のカントルの手紙はその最も初期のものですが，デデキントはそのずっと前から一種の集合論 (Systemenlehre) を考えていたので，カントルの仕事が 1872 年以後に立て続けに発表されるのはこの巡り会いによるところがあるのかもしれません。勿論，カントルの独創性は十二分に認めての話です。

デデキントにおける集合の理論

一方，デデキントにおける集合論の発端も一筋縄では行きません。彼の集合理論は私のテーゼでは特に扱いにくいものです。それは彼が初めから無限集合を持ち出しているからです。彼も 1872 年に無理数論（「連続と無理数」，岩波文庫『数について』所収）を発表しますが，この構想は 1858 年頃に得られていたもので，勿論カントルとは互いに独立です。有理数の全体を上下二つの組に分け，その「境目」を「実数」と定義したいのですが，実数のイメージなしに「境目」を定義するのは困難です。そこで方針を変え，有理数の上組，下組（共に無限集合）をそれぞれ一個のものとして，両者の一対を「有理数の切断」または「実数」と呼びます。つまり初めから無限集合が個体として扱われるのです。

彼の自然数論（「数とは何か，また何であるべきか」(1887),『数について』所収）でも同様です。彼は先ず，無限集合とはそれ自身とその一部分（真部分集合）との間に一対一対応が付けられる集合と定義します。そして無限集合が存在することから出発して，自然数以下，普通の数学的存在を全てそこから創り出してみせるのです。クロネッカーの「整数は神の創り給うたもの」に対抗して「数は人間精神の自由な創造」と宣言し，プラトンの有名な標語「常に神は幾何学す」の向こうを張って，ギリシア語で「常に人間は数論す」と書いています。この間の事情をたとえ話で説明してみましょう。

缶詰のラベルによくある例ですが，ラベルの中の娘さんがその缶詰を持っていて，その中にもそのラベルが描かれているとしましょう。つまり全体と一部との一対一対応です。この場合，実際には或るところから先は見えなくなりますが，心の眼でこれを先々まで見通すことはできましょう（数学は理念的な学問！）。そこでラベルの本体とその縮図である第2のラベルの中の像との間にある，例えば娘さんの右目に注目すると，第2，第3の縮図にも必ず右目があり，以下それを辿って一まとめにすると，それは自然数列の雛形，むしろ自然数列そのものになります。要するに「無限集合が一つでも存在すれば」——もっともこの条件については「数学的存在」とは何かという難問を初め，デデキントがそれを証明した当の「証明」まで，色々難しい議論がありますが——，常にこの流儀で自然数が絞り出せ，その後は正負の整数，有理数，そして実数なども，また座標平面以下の数学的空間も，そこにおける関数なども，全て集合論的に定義できて，数学の役者は全て揃うのです。デデキントの集合論を現代数学に道を拓いたものとするのはこの意味です。

問題は，無限集合を先立て，それを真部分集合へ一対一に写像できる集合とすることを，彼がどこから思いついたかです。私が前に，私のテーゼにおいて集合論の発端を難しいとし，現代数学の歴史的な独自性に言及したのも，実はこのためなのです。彼らのこの超越的，飛躍的な無限像は，同時代からの彼らの超越ぶりを意味するのでしょうか，それとも時代精神がすでにその近くまで来ていたのでしょうか。私はこれについて，彼らの着想の背後にガウス（そしておそらくリーマン）の無限に関する見方が影を落としていると推測しますが，だとすれば，

全てはガウス，リーマンの大きさということになりましょう。正直に言って，これは私のテーゼの最も弱いところです。

余談ですが，カントルは裕福なユダヤ商人の子で，母（マリア・ベーム・カントル）の一族は多くの優れた音楽家を出しており日本にも来た指揮者カール・ベームもその一人ですが，カントル自身もヴァイオリンの名手でした。彼が数学に進んだことを，進路を誤ったとした親戚もあったと言いますが，その集合論には彼の芸術的気質が現れているようです。一方，デデキントは地味な人柄で，ガウスの生まれ故郷であるスイスのブラウンシュワイクに生まれ，そこの工科大学（字義通り言うと工科高校）の教授で終始するのですが，現代数学の集合論的構成を先導し，カントルにも影響したことは前述のとおりです。後で述べるツェルメロの公理的集合論にも直接の影響が見られます。

この二人の行き方を見ると，カントルが無限集合の翼に乗って華やかに天上に舞い上がったのに対して，デデキントは逆に無限集合から出発して現実の数学の方へと足を地に着けていきます。芥川龍之介の『西方の人』に「天上から地上へ上る梯子」という一見誤植のような表現がありますが，デデキントの仕事は正にそれで，これも極めて骨の折れる仕事です。何度も言うように，集合論というとカントルというのは，必ずしも事の真相を伝えるものではありませんが，ただデデキント流のそんな克明な仕事が厳密な理論の上で自由に行えるためには，極度に広大な集合概念が必要になります。その舞台装置を設定したのはやはりカントルの芸術的とも言える奔放な創造力だったのではないか。私はそう考えています。

デデキントの自然数論というと，もう一人，英国のフレーゲのことも話すべきなのですが，これは私の勉強不足で触れられません。

カントルの超限集合論

カントルは 1878 年頃から集合についての一般論をやろうという姿勢になります。核心は連続の問題で，先の二つの濃度，$\aleph_0$ と $\aleph$ の中間に第 3，第 4 の濃度はないかということが先ず問われます。それが元来の連続体問題で，彼はそのような濃度はなく，$\aleph$ は $\aleph_0$ の次の濃度 $\aleph_1$ であろうという連続体仮説を立てます。

ところが 1883 年になると集合論に飛躍的な変化が現れます。それが超限順序数の理論で，従来は無限集合の元の個数（濃度）の問題だったのに対して，個数

を勘定する前に数える順序のための超限順序数なる「数」を創り，それを介して濃度の勘定をしようというふうに考えが変わるのです。

超限順序数とは自然数 $1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$ を無限の彼方まで延長した「数」で，正確には「整列集合の順序型」と定義されます（補説 3)。要するに整列集合の特徴は，二つの整列集合の大小の比較が（元を初めから一々対応させることにより）常にできることです。そこで連続体を整列集合の形に直すことができれば，カントルの目的は達せられることになります。

これについては「カントルにおける数学と哲学」で詳しく論じますが，先ず概略を示しましょう。自然数を 0 から書き始めると，有限の n はそれに先立つ $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1\}$ の型になりますが，超限数はこの順序の型を無限を超えて進めようとするものです。最小の超限順序数は列 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$ の型のことで ω と書き，この列の後に記号 ω を付け加えた型が $\omega+1, \cdots\cdots$ という具合です。これは過程的無限の考えではなく，存在する無限，実無限の考えです。そして ω も $\omega+1$ も濃度は $\aleph_0$ で，以下しばらくは可算濃度の順序数が続きますが，可算順序数の全体の濃度はもはや可算ではあり得ないことが証明されます。これは有限の n の全体がもはや有限でない状態に似ていますが，その列の順序型 Ω の濃度は $\aleph_0$ の次に来る濃度の第 1 号 $\aleph_1$ になり，その後にまた同じ濃度の順序数が続きます。以下同様の議論で，$\aleph_2, \aleph_3, \cdots\cdots$ と続くわけです。これらの数をアレフ数と呼びます。

こうして連続体問題は $\aleph = \aleph_1$ であるかという形で数学的に明確な問題になりましたが，私の立場からいうと，カントルのこの歩みはテーゼの前半，有限から無限への飛躍の件とはよく合います。気になるのはその後半，この無限の有限化ですが，これは公理的集合論のところで考えましょう。

超限順序数についてなお二三の注意をしておきます。

第一は，これらの超限順序数やアレフ数の列がどこまで延びるのかという問題です。しかしこれはまことに考えにくい。理論的にはアレフ数の添数が $\aleph_1$ や $\aleph_2$ はもとより，$\aleph_\omega$ や $\aleph_\Omega$ 以下，超限順序数のある限り続けられる（!?）ことになります。超限順序数の一部であるはずのアレフ数が，実は順序数の列と同じだけあるという逆説的な話で，何が何だか分からなくなりましょう。そしてそれは，個々

の超限順序数が「実無限」だと思っている内に，その列が本質的には新しい可能態の無限だということであり，「無限」はやはり底知れぬ恐ろしさを秘めた深淵のようなものと思わざるを得ません。

実は無限集合を深淵に擬したのはカントルですが，このイメージは彼の哲学や神学上の意見とつながっていたのかもしれません。一方，デデキントは無限集合をあっさりと，ものがいくらでも取り出せる袋のようなものと言ったことがありますが，ここで問題が生じます。

第一の問題は，「超限順序数全体の列」が集合なら整列集合となり，その順序型は，順序数の作られ方から見て「全ての順序数」のどれよりも大きい新しい「順序数」になるという矛盾に陥ることです。「全ての順序数」なるものが矛盾を内蔵することはこの後問題にする集合論の逆理の一例で，ブラリ・フォルチの逆理と呼ばれます（「数学史における逆説の役割」参照）。

第二は勿論，連続体仮説の証明の問題です。これはカントルの痛ましいまでの努力にもかかわらず，結局解決できませんでした。というよりも，この仮説は 1930 年代にゲーデルがその肯定形を集合論の公理系の中で吟味して，それが他の公理から導けないことを証明し，また 1960 年代にはコーヘンが類似の吟味によってその否定も導けないことを証明したという厄介なもので，結局，連続体仮説は集合論の公理系の中で独立な命題ということになりました。これもまた連続の問題の底知れぬ恐ろしさです（「カントルにおける数学と哲学」，「連続論覚え書き」）。

この他に第三の論点として，カントルの哲学の方面の意見があります。これは今日余り注意されませんが，彼の集合論建設の陰の力のようなことで，連続体問題の根底に「連続とは何か」という古今の数学・哲学上の大問題があり，彼はこれを数学と哲学の双方から両者の接点を求めて吟味したのです。彼は集合を「一と多」を総合する新しい哲学として捉えようとしますが，「一と多」は単に哲学上の一元論と多元論につながるだけでなく，一者たる神と神からの流出 (emanatio) たる万物として神学の根本にも繋がれば，見方によっては，抽象的一元的な「法則」と経験的多元的な「現象」というふうに近代科学の根底にも繋がる問題です。そしてカントルはこの考えに沿って，超限数にまつわる逆説的な状況を，最終的

には万有を統べ給う神の絶対的な無限性に包摂されるとし，超限数を森羅万象の根本元素とする一族の自然哲学まで提唱しました。ただしこれは幻想的で受け容れにくい考えです[1]（「カントルにおける数学と哲学」参照。

集合論の逆理と公理的集合論

集合論の逆理は，超限順序数の全体が「集合」になるとすれば矛盾に陥るというブラリ・フォルチの逆理のように，集合概念そのものに矛盾が含まれる懼れのあることを示しています。集合論の逆理は他にも色々ありますが（「数学史における逆説の役割」参照），これは正に無限の合理化が必要なところです。ツェルメロによる公理的集合論はその最初の試みですが，私はこれを集合論の有限化の一例と解しています。

彼の公理的集合論は，逆理を防ぎ集合論の成果を救う目的で公理を列挙したもので，それは二つの集合の一致の規定，無限集合の存在，集合の部分集合を（逆理の防壁になるような）然るべき性質によって定めること，集合の和集合や冪集合（部分集合の全体）をつくること，その他から成っています。それによって集合論の骨組みは明確になり，逆理は一応避けられました。私がこれを集合論の有限化とするのは，曖昧さの残る言語で表現されてきたカントルの無限像（夢幻像？）を，記号という有限的・客観的媒体が集合論を有限の公理系で書き直したという意味です。言い換えれば，私は「有限化」の中にこのような意味を加えるわけです。実際，記号化された体系はやがてヒルベルトによって数学の新しい対象となり，それが数学基礎論につながることになるのです。カントルの主観の中に生まれた無限像がここで一段高い有限性を獲得し，その代償として本来的な無限はその表現をすり抜ける，これは最早どうしようもないことで，むしろその過程を経過してこそ，集合はその制約なりに現代数学の基礎概念となったことを知らねばなりません。

ツェルメロの公理系には当然，制約もありました。それは「集合とは何か，何であるべきか」を規定したというよりは，集合論の成果は救済するとともに，逆理を生む性質は制限しようという，悪く言えば臨床医の対症療法的性格のものでした。言い換えれば，ありうべきいかなる逆理も現れないという保証はなかった

[1] 上では彼の哲学を「集合論建設の陰の力」と断じましたが，私は現在，彼における数学と哲学の関係は更に慎重に吟味すべきものと思っています。この意味では（「カントルにおける数学と哲学」）も一つの中間報告です。（1998 年 3 月）

のです。（もっとも，この保証の実現はその後ゲーデルその他の研究によって，原理的に不可能なことが分かり，そこに数学的真理なるものの一つの限界が認められます。）別に「集合」と認められるものの範囲が意外に狭くなり，例えば濃度 $\aleph_\omega$ の集合が「集合」の仲間から漏れるという事情もありましたが，こちらはやがて修整されます。しかしそれで「無限集合」が尽くされるかと言えば，そうは行きません。一つの公理系を確定すれば，その都度，その表現から漏れるものが現れるのが現実なのです。

カントルは集合論の説明にニュアンスのある言葉の助けを借ります。一方，ツェルメロはそれを明確な記号表現に換えます。ところがこの辺がまことに難しいところで，言葉の魔力の呼び出した無限像／夢幻像を余りにも厳密に分析し，記号表現で書いてしまうと，妙に世界が縮こまってみすぼらしくなる，その兼ね合いが難しいのです。これを譬えれば，ピントの甘い安物のカメラだと目の前から無限遠まで一応均等に写ります。カントルの集合論を安物のカメラに譬えるのはどうかと思いますが，ともかく彼の表現の持つ或る種の曖昧さのおかげで，どの無限集合でも或る程度の像を結びます。ただそれはどこも少しずつぼけていて，人それぞれの解釈の余地が残るのです。ところがツェルメロの公理論は解像力の良すぎるレンズに似て，あるところは正確に写るけれども他はぼけてしまうというようなことになります。もっとも，カントルの夢想した集合の範囲が本当はどれだけの大きさだったのか，これはカントル自身にも分かるはずのなかったことです。

ところで集合論の逆理に対するカントルの反応は，逆理が続々と見出されたころ既に数学上の生産的な仕事から退いていたせいか，それとも逆理もまた絶対的無限者たる神（「神は矛盾の統一」（ニコラウス・クサヌス））の中に包摂されると思っていたせいか（深淵の懐の深さ！），連続体問題の場合ほどではありませんでした。しかしデデキントを初め多くの数学者はそれに非常なショックを受け，数学の基礎に関するその後の研究はそれらの逆理の処理解消に集約されたと言っても過言ではないのです。

ついでながら，ツェルメロは公理論によって集合論から時間性を剥奪したという意見がありますが，それは当たっていないでしょう。既にカントル自身，その

無限を時間の中で数えているのではなく，時間に先立つ（と彼の言う）超限順序数で考えていたらしいからです。ただし「時間」というのは，聖アウグスチヌスがいみじくも言い当てたように，人に「時間とは何か」と訊ねられるまでは一応分かっているが，訊ねられた途端に分からなくなるような不思議な代物ですから，この辺はもっとよく考える必要がありましょう。なお，カントル自身は，その形而上学的傾向にもかかわらず，時間の問題を掘り下げた形跡がなく，その『論文集』で見る限りでは，数学的に定義された連続を基礎において運動を考え，これによって時間を測るという，意外に単純な物理学的解釈で済ませています（「カントルにおける数学と哲学」参照。）

数学基礎論の誕生

数学基礎論もまた集合論の「有限的」合理化の一つとして，対症療法的な公理的集合論よりも根本治療的なものとして生まれた数学の一分野です。

基礎論といえば，今でもどうかするとラッセルの論理主義，ヒルベルトの形式主義，ブロウエルの直観主義，或いは数学の無矛盾性の‘証明’——数学に矛盾の現れないことの証明——などが挙げられますが，或る意味でそれらは既に歴史の一コマになりました。直ぐ話すように，公理的理論の絶対的な無矛盾性を，その公理系の中で証明することが原理的に不可能なことは今では既定の事実なのです。しかしその半面，人類の永い経験から普通の数学に矛盾のでないことは既に経験的事実と言ってよく，基礎論の課題は公理化された数学の理論構造の吟味の方に向かっていて，それはコンピューターの理論にさえ生かされているのが現状です。これは私のテーゼでは新しい有限の数学に当たりますが，ここではその方面のことは割愛して，上の三つの学派と，その前後にフランスに現れたポアンカレの立場とフランス経験主義と呼ばれる立場について，私なりの角度から考えることにします。

フランス数学の伝統の場合

私は前に 18 世紀には数学，特に解析学の真理性の根拠を，自然科学へのその応用によって経験的に確信するという風潮があったことを注意しましたが，19 世紀後半の集合論の初期には，特にフランスなどにその傾向が強く残っていたようです。

ポアンカレは数学には論理学に還元できない固有の直観があるとして，数学を論理学に還元しようとしたラッセルに強く反対し，またヒルベルトの形式化にも不満を表明しました。その点，後のブロウエルに近い立場ですが，それとも違って，特に数学的帰納法の原理の先天性を強調しました。これはカントの批判哲学に対する彼の批判的意見であったように見えます。また集合論の逆理については，「私の言うことは全て嘘」のように，或ること（私の言うこと）の全体と，それに関する立言（上の「　」の中の言葉）とを峻別し，後者を安易に前者に潜り込ませること（非前定的定義）を禁止することで逆理は避けられるとの意見を持っていました。しかしこれも薬が効きすぎては困る。実際，例えば実連続関数に関する中間値の定理は，定義域の部分集合から一つの実数を定めて証明されますが，この種の定理は許したいので，そこの匙加減が大変です。ポアンカレは基礎の問題に集中したわけでなく，この議論は特に展開されていませんが，示唆するところは大きいと思います。

ポアンカレに続いて，当時フランスで新進の数学者だったボレル，ベール，ルベーグなどは，可算集合や連続体濃度を解析学その他に適用して成果を収めました。しかし彼らは集合論をそのような具体論につなぎ止め，いやが上にも抽象的になる集合論の展開には次第にそっぽを向くようになって，それを中心に展開された基礎の問題からは離れていきます。しかし彼らは彼らなりに積分論，確率論（可算確率など）の方面で成果を積み重ねましたし，また彼らの集合論に関する主張や方法も，現在，基礎論の中で再評価されて新たな展開を示しています（詳細は『数学と哲学との間』第 II 部参照)。集合論の具体的側面を捉えた点でこれもまたカントル的集合論の一つの有限化であると考えられます。

これに比べると，ラッセル，ヒルベルト，ブロウエルなどは逆理について大なり小なりもう少し純論理的に考えた人たちです。

ラッセルの論理主義の場合

ラッセルは哲学者，平和主義者としても有名ですが，元来は数学と哲学（ライプニッツやカント）から出発した人です。彼は論理学の普遍妥当性を認める半面，数学に固有の直観を論理学の基本原理（自同律，矛盾律，排中律）に帰着させようとしました。つまり集合論を含めて数学の基礎概念を徹底的に分析して数学を

論理学に吸収させようと企てたのみでなく，数学に固有の先天的総合判断の介在する余地まで排除しようとしたのです（補説 4)。

論理学の原理が有限的と見なされる限りにおいて，もしこれが成功しておれば，数学の「有限的」基礎付けはできていたはずですが，そうは行きませんでした。それは，無限集合の存在を保証する公理と，逆理の防壁として工夫された「還元の公理」とが，共に論理学の原理だけに帰着できないことが判明したのです。後者は，或る対象（例えば順序数）と，それらの集合（順序数全体）から定義される対象とを一応切り離し，或る条件の下でのみそれを初めの対象と同列の域に還元するという公理で，ポアンカレの非前定的定義を避ける形になっています。ただしラッセル自身それと同様のことをかなり前から考えており，両者の関係は私にはまだよく分かりません。ともかくこれらが論理化へ還元できない以上，基礎論としての論理主義は終わったと言ってよいのですが，ただしその他の部分の分析はしっかりしたもので，数学の論理的分析——一つの有限的表現——の典型になるものだと思います。

彼の結果はホワイトヘッドとの共著『数学の原理』(*Principia Mathematica*, 1910–13) という野心的で彪大な三巻の書物——標題はニュートンの主著『自然哲学の数学的原理』(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) を思わせる——にまとめられています。ラッセルは『自伝』で，この仕事に若い情熱を捧げ尽くし，完成後は何もやる気がなくなったと言っていますが，これを読んだのは，二人の著者と，数学の無矛盾性の証明が原理的に実現不能だということを決定的に証明したゲーデルの三人だけ，という皮肉な話もあるほどです。しかしこの本には各巻，各章，各節，それぞれの初めに要約が出ているので，（私自身も大体はそうしたのですが）それだけなら一応は読めます。特に，数学としての数学基礎論に限定せず，数学をより哲学的に考えたい場合，この立場に学ぶべきことは少なくなく，それ以前の著書『数学の原理』(*The Principles of Mathematics*, 1903) も有益だと思います。

ブロウエルの直観主義の場合

率直に言うと，ブロウエルの議論が歴史における本質的な一歩なのか，単なるエピソードに終わるものなのか，私にはまだ良く判定できないので，ヒルベルト

より後に現れた議論ですがこれを先に取り上げます。

ブロウエルは数学の基礎を，18 世紀の哲学者カントの流儀で，もう一度根本的に見直そうというところから出発します。カントはその時代の数学について，数学が普遍妥当な真理であるために人間の思考はどんな先天的条件を満たさねばならないかを吟味して，哲学に「コペルニクス的転回」をもたらした人ですが，彼はそれを「時間」と「空間」の形式が人間に先天的に備わっている（先天的直観形式）と見て，そこから数学の真理性を説明しました。しかしその頭にあった数学がユークリッド的な幾何学と（ガウス以前の）古典的な数論だけだったため，非ユークリッド幾何学を初めとする数学の飛躍的な変化に対応できず，集合論の出現のずっと以前に，数学はもとより哲学の中心問題からも消えていたのです。

しかしブロウエルは，「カントの考えは間違っていなかった。確かにその空間論はユークリッド幾何学だけを見ての議論だからまずかったが，新しい数学を支えるには認識の基本的枠組みとしての時間を先天的直観形式として考えればよいのだ」と主張します。つまり彼の直観主義の「直観」は本来この意味で，その点ラッセルが数学的直観を論理に還元しようとしたのとは対照的です。もっとも「時間とは何か」は極度の難問で，彼もその点には深入りせず，やがて口にしなくなります。

彼の主張でこれより有名なのは，無限集合に対する排中律の適用（二重否定の肯定化）を無条件には認めないことです。ヘイチング (Heyting, 1936) はこれを直観主義の論理と呼んで整理しました。その根拠は無限の直観が有限のようには透明でないということで，存在証明を帰謬法でなく対象の構成によるべしという構成主義もここから現れます。この点，フランス経験主義と似ていますが，哲学的には大分差があります。（しかし私はヘイチングの解釈がブロウエルの思想にどこまで忠実かには疑問を感じています（補説 6)。）

ブロウエルはヒルベルトとの間に激しい論戦があり，良く分からぬことが多かったのですが，最近オランダの学者が詳しい報告をしています[1)]。なお，カントの哲学は数学者に対しても，表面的にはともかく潜在的な影響はずっとあって，ヒルベルトもまた，自分こそはカントの本当の継承者であると言っています。

[1)] D. van Dalen, 'The war of the Frogs and the Mices, or the Crisis of the *Mathematische Annalen*', *Mathematical Intelligencer*, vol. 12, 1990

ヒルベルトの形式主義の場合

ヒルベルトは20世紀前半の数学界で指導的役割を果たした人ですが，基礎の問題についても先駆者の一人でした。彼は今まで述べたどの立場よりもカントル寄りの立場をとり，喪失されかけた「カントルの楽園」の再興を企てます。そしてこれがその後の基礎論の主流につながることになります。

彼の最終目標は数学全体の無矛盾性を証明するという壮大なものでしたが，それを二段構えで実現しようとします。即ち，先ず数学を，そこに用いられる論理をも含めて公理的に書き表し，かつその一切を記号の形に書く仕事で，ラッセルの仕事などもそのために役立ちます。

ヒルベルトの創意は次の段階で，それは記号そのものを対象として行われます。即ち，或る証明を表す命題の列（記号による有限的表現とその列）を，その内容をしばらく無視して単なる記号列と見なし，推論は記号列に適用された変形規則（有限個）と見ます。彼はこの見方を「有限の立場」あるいは「メタの立場」と呼びました。メタの立場とは，一つの理論そのものを対象として，それをその「外部」から観察研究する立場のことです（補説5）。

ここで区別すべきことは，無矛盾性の証明というメタの立場の「証明」と，吟味の対象である個々の定理の「証明」の区別です。メタの立場だと，後の証明は一連の記号列の並んだ列に過ぎません。他方メタの証明は，ありうべき一切の「証明」という記号列の系列の中に，「公理」に当たる記号列から始まり「推論」という名の変形規則だけを使いながら，例えば記号列‘$1 \neq 1$’のような矛盾に終わるものが決して現れないことを示そうという仕事です。勿論，なかなか困難な企画ですが，極めて卓抜なものだということは分かっていただけましょう。そしてこれが，私のテーゼにぴったりの例であることもおわかりでしょう。正直なところ，このヒルベルトの考え方は私のテーゼの一つの重要なヒントだったのです。

ヒルベルトは1925年にこの構想による無矛盾性の証明について，かなり詳しい中間報告「無限について」を発表しました。彼が自分をカントの継承者だといったのもこの論文の中です。ところが正しくそこで示された考えの線を彼以上に忠実に辿った人が現れる。それがゲーデルです。しかしゲーデルが到達したのは，ヒルベルトの考え方には致命的な欠陥があり，無矛盾性の証明はその期待した形

では実現できないという結果でした。以後，数学基礎論は第二の時期を迎えることになります。

数学基礎論の新展開 (1)——無矛盾性証明とゲーデルの決定不能定理——

ゲーデルは1906年の生まれで，1978年の1月になくなりましたが，数学史に残る大人物の一人です。無矛盾性に関する彼の研究は極めて深い結果で，少々専門的になり過ぎますが，ここでは例のテーゼの「有限化」につながる範囲で，問題の所在を示しておきましょう。（詳細は『数学と哲学との間』付録1参照）

問題は結局，一つの理論体系 S の中で行われる「証明」と，その体系の無矛盾性を示すべき「メタ証明」とが，ヒルベルトの思惑と違って，うまく切り離せなかったということです。ゲーデルは「体系 S が無矛盾である」というメタ命題を巧みに自然数に翻訳し，その間の推論を自然数の間の計算に翻訳するという極めて卓抜な工夫で，その命題を自然数の理論の中にひいては S の中の命題に書き改めようとします。ところがその結果は，体系 S が無矛盾である限りでの話ですが，S において肯定も否定も証明できない「決定不能の命題」になってしまいます。事実，無理にそれを「定理」と見ると，S は矛盾を含むことになってしまうのです。

考えてみると，「私は嘘を言っていません」ということを，証人も弁護人もなしに主張しようとすると，その主張に弁明が要り，その弁明にまた弁明が要り，……，という追っかけごっこになるか，「なぜなら私は嘘を言わないから」という，居直りともいうべき同語反復的な理由付けで終わる他ありますまい。或る体系の無矛盾性の証明をその体系内でしようというのも結局は同じことで，ゲーデルはそれをメタ理論の形で決定付けたというわけです。

今述べた体系 S は決して特殊な体系ではなく，自然数の素因数分解や普通の算術のできる程度の理論体系ならば何でも良いという話なので，ツェルメロ，ラッセル，ヒルベルトなどの集合論に関するものは勿論，デデキント流の自然数論さえこの結果の支配を受けます。つまりヒルベルトの企画がこれで御破算になったばかりでなく，古来，普遍妥当の真理と謳われた数学自身の真理性もこの影響を受けることになりました。この克服，というよりもこれに対する対処の仕方がこれ以後の問題になります。

なお，ゲーデルのこの仕事は 1931 年，25 歳の時のものです。

数学基礎論の新展開 (2)——ゲンツェンの自然数論の無矛盾性の証明——

このようにして無矛盾性に関するヒルベルトの当初の企ては挫折したわけですが，ある理論体系の無矛盾性を，いわば弁護士を理論の外部から雇ってきて成功した例はあります。ゲンツェンが 1936 年（および 38 年）に証明した自然数論の無矛盾性は，その最もうまくいったものです。ゲンツェンはヒルベルトの弟子で，第二次大戦も終わりに近い 1945 年に 36 歳で戦死した人ですが，第 2 級順序数（可算濃度の超限順序数）の或る性質を弁護士役にして，その証明に成功したのです。

この問題のむずかしさは，公理的自然数論の各「命題」（記号の有限列）とその有限列たる「証明図」（その最終命題が「定理」）が無秩序な可算集合で，しかもその中には数学的帰納法のような無限論法も現れるため，どんな思いがけぬ矛盾が生ずるかもしれない点にあります。ゲンツェンは各「証明図」に，（小数部分をもつ数の形で表現された）極めて巧妙な第 2 級順序数の番号を付け，任意の「証明」の部分をなす各「証明」に与えられる番号は，順序数としてより小さくなることを有限的な記号操作によって証明しました。実際，前提は「$A \to A$」の形の自明な論理式と「数学的公理」だけであり，用いられる論理計算（彼自身の創った自然で明晰な方法 LK(Logisch–Kalkul)）には，証明の途中で一時的に用いられ結局は消去されるような命題がない形になっているため,「定理」の記号別の分析だけで万事がすむのです。このような還元過程を進めることによって，例えば「$1 = 2$」のような矛盾がそこに決して現れないことが明らかになります。なおここで補説 3 の，超限順序数の任意の列は大小順に並べると整列集合になり，一方，整列集合は逆方向に無限下降列をもたない，という二つの基本性質が利いています。

このメタ証明で少し気になるのは，自然数論について議論しているときに，自然数の延長である第 2 級順序数を弁護士役にしてよいかという点ですが，ここで用いられる第 2 級順序数は，$\varepsilon_0(=\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}})$ 未満という，超限順序数の中でも最も具体性の強い「有限的」に見通せる部分であり，自然数論の中に可能的に現れうる「定理のすべて」などと比べて遥かに単純明快な事柄なのです。換言すれば，私はテーゼで言う「有限的」の中に，このように見通しの良い可算列を入れるわけ

です。

なお上記の数学的帰納法は，定理 $T(n)$ が「全て」の自然数 n について成り立つことを示すのに，

(1)　$T(1)$ が成立する，

(2)　$T(n)$ が成立すれば $T(n+1)$ も成立する，

という二項目を証明すればよい，この二つは無数の自然数を押える「有限的」勘どころだ，という考えに基づいています。上の超限数 ε_0 を「有限的」と認めるのも，これと同類の意味においてなのです。

数学基礎論の新展開 (3)——連続体問題とゲーデルのモデル Δ——

私は前にカントル独特の問題として，第一に彼の超限列の延び方，第二に次の連続体問題を挙げました。今まで辿ってきたのは第一の問題の展開でしたが，今度は第二の問題のその後について簡単に触れましょう。

実はカントルは最後までこの問題に執着し最後まで空しい努力を重ねたのですが，彼の没後二十年余りたってから，例のゲーデルがここでもまた一つの解答を与えました。彼は一つの公理的集合論を組み立て，その体系の無矛盾性——その吟味は当分棚上げにしたままで——を前提条件として認めるとき，その「公理」の中へ連続体仮説を新しく「公理」として追加しても，そのために新たに矛盾が生じることはなく，両者はつじつまが合うということを証明したのです。これは 1938〜40 年頃のことです。

ゲーデルの証明の大筋はこうです。まず，もとの公理系 Σ の中に，Σ の各公理を満たすモデル Δ を作ります。Δ での集合は「構成的集合」と呼ばれますが，それらは空集合 ϕ から出発し，$\{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \cdots\cdots$ と，集合構成の一定の手続きを（Σ の）超限順序数の順に繰り返し適用して得られる集合のことです。いまその全体を L と呼び，Σ での（元来の）集合の全体を V と呼ぶと，L は当然 V の一部 $(L \subseteq V)$ ですが，（Σ での）集合を構成的集合（L の元）のみに限定した世界であるモデル Δ においても，Σ の各公理は成立することが証明されます。つまり Δ は Σ の対象領域の一部でありながら，いわばそのミニチュアモデル，いわゆる内部モデルになっているわけです。

更に Δ においては，「$V = L$（すべての集合は構成的である）」，「選択公理（axiom of choice, AC と略）が成立」（「カントルにおける数学と哲学」参照），「連続体仮説 (continuum hypothesis，CH と略）が成立」等の命題が，Σ での「定理」として証明されます。そこでそれらの「定理」を，Δ における「公理」として追加してもつじつまが合う（consistent，無矛盾）ことが分かります。

さて，もし Σ の公理に「CH」を追加した理論体系から矛盾が演繹されたと仮定すると，CH は Σ から既に導かれているのですから，結局，Σ は矛盾を含むことになり，Σ を無矛盾とした前提に反します。そこで対偶によって「Σ が無矛盾ならば，Σ に連続体仮説を追加しても無矛盾である」と結論するのです。

勿論，これは相対的な意味でのメタ証明ですが，この一連の証明が頭の中に明確に思い描ける以上，これを，私流に「有限的」として位置づけても決してゴリ押しではありますまい。もとより，Σ 自身の無矛盾性をどう証明するかは別問題で，少なくとも Σ の道具立ての範囲では不可能なことは上の決定不能定理から帰結されます。

数学基礎論の新展開 (4)——コーヘンのモデル構成法——

このゲーデルの証明から二十年ほど経た 1960 年といっても，私などは本当にきのうのことのように思うのですが，コーヘンという当時二十代半ばだった数学者が，連続体の問題を含めて，公理的集合論の世界にまたまた大きな一石を投じました（下の Σ，BG，ZF は「ボレルのエフェクチフ概念の形成」補説 3 を参照)。

彼の仕事の一例を大まかにいうと，ゲーデルが集合論の公理系 Σ（ベルナイス - ゲーデルの公理系 BG）と AC および CH の成立とは矛盾なく両立しうることを示したのに対し，コーヘンは（Σ とは少し違うが同等の）公理系（ツェルメロ - フレンケルの公理系 ZF）と AC あるいは CH の不成立等の主張とが矛盾なく両立しうることを示し，結局 AC，CH 等はその公理系から，肯定否定のどちらの形も導き出せないこと（それぞれの独立性）を証明したのです。（BG と ZF は共に「集合論」を表現していますが，特に ZF は変数記号 $x, y, \cdots\cdots$ の動く範囲が個体（実は集合）の範囲に限られた形（1 階の述語論理）で書かれていて，スコーレム - レーヴェンハイムの定理（「数学史における逆説の役割」補説 2）これはちょうど（平行線公理を前提する）ユークリッド幾何学に対して，（平行線公理の否定を前提する）非ユークリッド幾何学が作られ，それによって平行線公理

の独立性が証明されたのと同じような事態です。こうして，カントルが示唆した自然な秩序のある単一の集合論というイメージは打ち消され，少なくとも公理的表現に関する限り，いく通りもの「集合論」がありうることが明らかになってしまいました。厄介な話ですが，ともかくこれが，集合論ないし数学基礎論のここ三十年ほどの実状なのです。

コーヘンの仕事の簡単な解説は極めて困難ですが，目下の問題である有限と無限の問題に関連して一応の話だけはしておきましょう。

コーヘンの手本になるのはゲーデルのモデル $\mathit{\Delta}$ ですが，そこでは $V = L$ がなりたっているので，そのままでは役に立ちません。しかしスコーレム - レーヴェンハイムの定理によると，公理系 ZF には外から見て可算なモデル M が存在することが知られていますので，話を一旦 M に移し，$V \neq L$ その他の「自然でない」命題が成立するように M を修整しようとするのです。コーヘンはこのことを「一般的 (generic) 集合」という対象と「強制法 (forcing)」という方法とを導入して実現します。次に「$V \neq L$ だが AC と CH は成立する」というモデルを例として，その輪郭を説明してみましょう。別の命題，例えば「AC は成立するが CH は成立しない」などに対しては，それぞれ同様の考え方で別のモデルが作られます。

まず集合論 ZF の可算モデル $\mathit{\Lambda}$ を，（$\mathit{\Delta}$ の場合のように ϕ のみでなく）元を特定しない「一般的集合」a と ϕ とから作ります。次に五の全体的構成を考慮しつつ a の元を定めるのですが，その際，a は $\mathit{\Lambda}$ で「自然数」とされるものの全体 N の「部分集合」ではあるが，N の「構成可能な部分集合」の各々とは，少なくとも一点において喰い違うように「強制」して決めてゆきます。これは $\mathit{\Lambda}$ 全体の構成から $\mathit{\Lambda}$ の個物 a の元を決めるという逆説的な仕事（「数学史における逆説の役割」参照）ですが，$\mathit{\Lambda}$ も a も外から見ると可算であるため，a は $\mathit{\Lambda}$ の構成を崩すことなく，順次決定されます。実は「ゲーデルの決定不能定理」で一例で見るように，一般に $\mathit{\Lambda}$ で使われる自然数は極めて特殊な形になるので，未使用の自然数はふんだんにあり，そこにこの仕事が可能な余地があるのです（「ゲーデルの決定不能定理」の「付記」参照）。それにしてもこれは矛盾すれすれの，綱渡りのように微妙な仕事で，これを正確簡明に解説するのは，私の力に余ります。『数学と哲学との間』巻末の「参考文献」に挙げた Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypotesis*

（邦訳『連続体仮説』（東京図書）），江沢昭聿『連続体の数理哲学』（東海大学出版会），田中尚夫『選択公理と数学』（遊星社）などは私も参考にしました。）

強制法は直ちに多くの反響を呼びましたが，分かってみるとモストフスキー，竹内外史など少数の専門家は，コーヘンまであと一歩まで来ていました。この方法はまもなくブール代数という多値論理による処理が便利であることが分かりました。モデル Δ では $V = L$ という単一の形が問題ですが，コーヘンのモデルはそれを崩す多様性が重要なため，その論理が有用なのです。今回，コーヘンの理論はしばしばこの方法で解説されています。

現在の若い世代はコーヘンをさえ古典として研究を始めますが，これはコーヘンの仕事もそこまで数学界に定着して「有限的常識」になったことを意味しましょう。しかし自分にはできなかったことながら，その常識そのものへの批判も忘れないで頂きたいと思います。

第2節のまとめ

大分長くなったので，この辺で私のテーゼに戻って集合論の誕生以下の話を一応まとめておきましょう。

私のテーゼの骨子は，無限論的な論法を創造，発見に結びつけ，それに対応する有限論的論法をその合理化に結びつけ，それが数学の新しい適用にも役立つ，というものでした。勿論，無限論的考察だけが創造的，発見的な方法だなどと無茶なことを言うのではありませんが，数学の歴史にはいささか逆説的ながら有力な発見法である無限論的な考慮の下に始められた擬似的理論が，色々な経過を経て一段高い有限的表現を得て落ち着き，学界に定着した例が意外に多いのではないか——私はそういうことを言いたかったのです。

これを逆の面から見ますと，想念の飛躍とか空想のはばたきというものは，どんなに先走るかに見えても，人間に掴（つか）まえられるのは，所詮，その「有限的」な局面だけであり，少なくとも，合理的・客観的な学としての数学は，「無限」に支えられた想念の飛躍でさえ，有限的表現によってつなぎとめねば終結しない——このことも強調したつもりです。ただ，想念の飛躍がないと，新しい視野はなかなか得られないもので，「無限」とはそういう想念の飛躍をさせるのに最も有力な方法の一つだろうという話です。

今述べた「逆」の考え方の下で，もう一度カントルの仕事を振り返ってみるのもおもしろいと思います。カントルは何をやったか。彼は「実無限」を数学化して数学の世界に新生面を拓(ひら)いた。しかしその半面，彼はただその「実無限」のもっている或る有限的な契機(モメント)を掴(つか)まえた，ないしそのような或る契機が実無限の中にあることを指摘しただけだ——そういう突き放した言い方もまた可能でしょう。勿論，これは傍観者流の皮肉な言葉なのではありません。むしろそれは，彼の掴(つか)んだ勘どころのみが「実無限」を数学化する有限的契機のすべてだろうかという疑問をあえて持ち出し，そこになおもありうる未来への可能性について，注意をうながそうとしたつもりです。

ここで断わっておきますが，私は数学という学問を，きまりきった証明の体系や計算技法の集大成だとは思っていません。要するに，ここに一つの学問的現実がある，人はそこから何事かを発見し，むしろ創造し，かつその創造された対象を新しい学問的現実として認知してもらうべく体系化し，証明し，更に，できればそれを経験的現実に適用しようとする，こうした学問が「数学」だと思っています。何がその創造を呼び起こすのか。人類の新しい経験の積み重ねもあるでしょう，時代精神の変化もあるでしょう，また勿論，天才といわれる人間の力も作用するでしょう。何らかの意味の無限論的考察はそこで一つの有力な役割を演ずる。しかしそれを学問的社会の中に客観的に定着させること，それにはどうしても何らかの意味で有限的なものがないとだめだ。勿論「有限」といっても一つ一つ数える意味の有限のみをさすのではない。記号的表現ということのもつ有限性というものも私は勘定に入れて考えていることは，今までにもたびたび注意しました。ただその辺の事情を的確に表現することがむずかしい。下手をすると我田引水流のコジツケ論になるし，更に悪くすると自家撞着のおそれもある。それがまだうまくできないために，私は今なお「何らかの意味」でという言い方を捨てきれないでいるわけです。これをもっとはっきりさせるのは，これからの仕事だということになりましょう。

そういえば，デデキントの仕事を私のテーゼの下でどう考えるかについて問題のあることも，既に前に話しました。改めて正直にいうと，彼の数学的構成を強いて無限 - 創造的要素と有限 - 表現的要素とに分けたり，あるいはそうした区別

の枠組みの中で考えたりするのは，本当はいささか無理があるのかもしれないとも考えられ，その辺に私のテーゼに基本的反省を要する限界があるかもしれないとも思っています。

ツェルメロ以下，ヒルベルトまでについて述べたことは，特に付け加えることもありません。ただ，ゲーデル以後のことは大雑把な話しかできなかった上，事柄がむずかしいので，よく分かっていただけたかどうか。コーヘン以後にも大きな変化がありますが，これは私の手に余る上，既に内容が多すぎると思って切り捨てました。いずれにせよ，アリストテレス以来の蜿蜒（えんえん）たる歴史の果てに，更にカントルを超えて，ここまできたところで私がしみじみ感ずるのは，既に一度ならず口にしたことですが，無限なるものの恐ろしさ，それも自然数全体という一見比較的単純な「無限者」に既に潜在している，底の知れない恐ろしさです。勿論その一方で，その深さ恐ろしさをここまで描き出した，人間の「有限的」表現力の力強さにも感嘆しますが，それにしてもその有限的表現と想念の飛躍との間にある深く大きな隔たりには，畏怖の念を禁じえません。ただし私としてはむしろそこに人間の学問ないし学問の方法の将来における可能性を見たいと思うのです。

3 古代・近世の場合素描

これまでは集合論と基礎論を中心に話しましたが，私のテーゼの由来を示す意味で，より広い範囲の考察について，今度は概略だけを述べておきます。

3-1)　通約不能量の比例論の創造

通約不能量の比とは今日で言えば無理数のことですが，それは発見された対象と言うより，ギリシア人が意識的に創造したものです。例えば正方形の対角線と辺の間には通約的な長さが存在せず，両者は自然数の比は持ちません。この通約量ないし（整数）比の「不存在」という否定的な性質がいかにして確定され，更にそれが「通約不能量の比」（比のない量の比!?）として肯定的に捉えられたという事実は，ギリシアにおける理論数学の成立に直結する大問題ですが（「数学史における逆説の役割」参照），私のテーゼにとっても非常に重大なポイントの一つです。

この否定的性質の確定については，もし通約量があるとすれば矛盾が生ずるという，帰謬法によるとする説があり，作図などによる推定もあります。後者は発

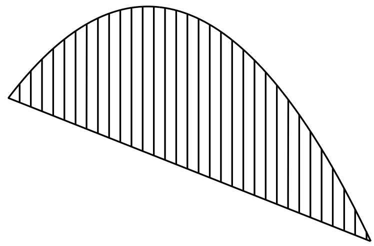
見の心理から見て，より説得性が高いと思われます。（詳細は「数学史における逆説の役割」で示しますが）それは，通約量たる線分を求める作図が無際限に反復され，図は限りなく小さくなって，結局，最終結果に到達しないというもので，もしこれが先行していたとすれば，帰謬法による証明はその決定的な追認だったのかもしれません。

このいずれにしても，否定を肯定に転ずるという点は重要です。つまりこの発見ないし創造において，経験的現実にないものを見ようとする意志が大きな働きをしているからです。そしてそれは，経験を超えたイデアの中にこそ真実在があるとしたプラトンの観念論的哲学に支えられていたのかもしれません。勿論，逆にプラトンの方が数学から影響されたという可能性もなお残ってはいますが。

作図の無限進行が発見を導いたと考える場合でも，実際の作図はそうは続けられません。それを見通すためには，点から大きさを奪い，線から幅を奪う必要があります。これは理念的な「図形」，即ち作図が無限に進行しうる対象の導入ですが，この新しい「図形」は，目に見えないと言う意味で逆説的な図形と言わざるをえません。これが私の言う「無限を潜在させた補填的対象」です。ユークリッド幾何学というのは今では「経験的」と見られることがありますが，実はこのような超経験的な学問であり，その「公理」にはこのような要素が含まれているわけです。帰謬法が発見を導いたとするときには，「無限」は隠れますが，公理のこの性格は変わりません。

ユークリッド『原論』は単純な図形学でなく，この公理系の上に整数論や今日の無理数論に当たるものさえ展開している壮大で高級な理論体系であり，他の古代文化に類例を見ないものです。それは純粋数学の原典として現代数学にまで影響したのみでなく，西欧的な合理主義の原型をなすほどの理論体系で，いわば人類の命運を定めた書物と言ってよろしい。今考えている通約不能量の理論は，その公理的理論の成立に直接関連した事件と見られるだけに，その理論化に無限過程が寄与した可能性のあることは注目すべきことでありましょう。勿論，私のテーゼにとってこれは重大な論点の一つです。

3-2)　アルキメデスの求積法



第２図

この問題は私のテーゼの最初のヒントになったものです。アルキメデスは紀元前３世紀の人で，彼の『方法』という本には，彼がたとえば放物線の切片の面積（の値）を「発見」するのに，その図を，幅のない平行線分からなるすだれ細工のようなものと見るという，矛盾すれすれの考え方——面積を，幅がなくて面積をもたない線分の集まりと見る——に従ったことが示されています（第２図)。詳しい説明は略しますが，これなどは無限論的方法を，（逆説的な性質は不問のまま）発見の手段に使った典型的な例だと思います。実際，すだれを構成する「線分」に幅をつけたのでは正確な議論はできないし，幅をなくしたのではその全体がどうして面積になるかの説明に窮します。しかし発見法としてであれば，それも大目に見れるというものでしょう。

ところが更におもしろいのは，彼が同じ問題を別の本では改めて純幾何学的に，つまり極めて説得的に証明していることです。そしてこの場合にも，結局は有限的・説得的ではあるが発見的ではない帰謬法が使われている点が注意されます。つまり，既に発見法によって推測されている値が，もし求めるものでないと仮定すると矛盾に陥るというやり方です。

3-3)　近世的解析学の成立

微分積分学に始まる近世的解析学の形成のことは成書（私の関係した書物で言えば，伊東，原，村田『数学史』（筑摩書房）の原氏による第II部，ブルバキ『数学史』（東京図書）など）に委ねるとして，その背景について特に注意したいのは，位取り記数法が普及し十進小数が考案されて（ステヴィン)，数学の枠組みが図形中心でなく数中心に替わったこと，また記号代数の方法が整備されたこと（デカルト，ライプニッツ）でしょう。

ここで「解析」という言葉について一言しますと，この原義は，問題になっている事柄から原理へと遡る方法ですが，或る意味では発見的方法のことで，近世以後それが記号代数の形を取ったため，一時は代数と同じ意味に使われましたが，「無限小」という記号を使う「無限小解析」（ライプニッツ）の略称として今日に及んでいます。

記号的方法の特色は単に計算を簡略にするという以上に，一見無縁な対象間の類似性を記号化した形から洞察したり，記号の意味を形式的に拡大して新分野を拓くなど，種々あります。勿論，無限有限の方法とは別ですが，無限は記号的象徴による他には表現しにくいので，記号法は無限の数学化においても本質的な役割を果たします。その思想的背景はデカルトとライプニッツで，特にライプニッツの『結合法』(*Ars combinatoria*) は今日の記号論理学やコンピューター科学にまで，遥かな影響を及ぼしています。

この種の記号法の活用については，18 世紀のオイラーの仕事には多くの例があります。例えば彼は実数 x について得られていた e^x の展開式，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

の x に形式的に虚数 ix を代入し，そこに $\cos x$，$\sin x$ の展開式を用いて，

$$e^{ix} = \cos x + \sin x$$

という重要な式を導きました。この代入の正当性が理論的に確かめられたのは，彼自身も模索していた後の複素関数論によるもので，ライプニッツ的な予定調和の数学的世界における現れの感があります。もっとも，そんなことを言えば，無限論的発見法も予定調和の一種だということになるかもしれませんが，ともかく，記号的方法は無限とは別の発見創造の重要な手段でありましょう。

このような眼で微分積分学の成立に到る近代初期の数学の歩みを見ますと，一方に近似計算という実用的・経験的な要素があり，それと並んで例のアルキメデス流の矛盾すれすれの「発見法」や，級数の一般項を記号計算を用いて（不完全）帰納的に（言い換えれば，さしたる理論上の根拠もなく）推定するような「発見法」がある半面，他方ではそれらの推定の結果をユークリッドやアルキメデス流に帰謬法によって証明する方法があるという混沌とした情況が目につきます。微分積分学という学問は，それらの諸要素が互いにからみ合いつつ次第に形をなしていった大きな学問的流れの一つの到達点だったわけです。これについては『ブルバキ数学史』の「微分積分学」の章が参考になりますが，より詳しい状況については，『数学史』（筑摩書房）の原氏による「第 II 部」を見ていただきたいと思います。

はっきり言えば，微分積分学の祖と称せられるニュートンやライプニッツ以前の人びとは勿論，この人達にしても，およそ今日の系統立った微分積分学とは異質のといってよいほどの，あるいは近似算的な，あるいは（不完全）帰納的な，そして時には矛盾すれすれのような，要するに解析 - 発見の法を駆使して道を拓いていったのです。そして「無限大」「無限小」などの無限論的考察はその解析法の最も有力で最も広く用いられた手法でありました。それらはほとんどの場合，今日の意味では「証明」と呼べるものではなく，証明が必要になると，人びとは昔ながらのユークリッドやアルキメデスの帰謬法に戻っていました。そうした無限論的な考察が許されたのは，少なくとも彼らの精神の底に，それが解析 - 発見の法であって証明とは別だという意識が働いていたためだとは考えられないでしょうか。具体的な話を抜きにしているので，十分わかっていただけるかどうか心もとないところですが，ともかくこの間の動きは，有限，無限に関する私のテーゼにとって，最も重大なヒントであり，また実例でもあるものなのです。

この発見法と証明法との隔たりは，ニュートン，ライプニッツの頃以後，少しずつ埋められる方向に進みます。そして，その距離は極限算法，つまり lim の導入によって，大幅に埋められるのですが，それはだいたい 18 世紀のダランベールあたりからのことであり，更にそれが本格的に「有限的 - 説得的な理論体系——学生諸君の苦手な $\varepsilon-\delta$ 論法」になるのは，19 世紀のコーシー以後のことなのです。今日，理科系の大学の教養課程で教えられている微積分学は，コーシーの行った体系化に多少の改良を加えたに他なりません。そして，私はそれを例のテーゼの第 3 段階たる高次の「有限化」と見なし，それが数学界でほぼ一般に普及し，私のいわゆる第 1 段階の有限的理論と見なしうるようになってきたあたりから，デデキント，カントルの仕事が始まってくると見ようとしている——このことは，人それぞれの批判は別として，もはや言うまでもありますまい。

ついでながら，この話の初めで触れた射影幾何学の無限遠点なども，その後，同次座標という工夫によって「有限的」な表現ができていることも併せて注意しておきましょう。

3-4)　将来の「数学」に向かって

最後に，こうした考察の現代的意義とでも言うべきことについて，ただし夢の

ような話を付け足します。

私は，事をこのような形で整理して新しい道を求める手懸かりにしようとしているのです。自分で何かを創ることができれば最善ですが，せめて創造力のある若い人が何事かをしようというときに，これが参考になれば幸いだと思っています。

既成のものの例として超準解析（nonstandard analysis；字義通りにいえば，非標準解析）があります。ライプニッツが残した「無限小解析」は，一旦「無限小」なる対象のない今日の流儀で整理されたのを，それを記号的に復活させ，それを用いて新しい体系を作る試みで，その基礎には基礎論の成果も働いていますが，既に相応の成果も上がっています。これなどはライプニッツの示唆したものを，改めて高次の視野から見直したものに他なりません。そのような新しい視野を拓（ひら）くことこそ，真に創造の名に値する仕事でしょう。

勝手なことを言ってよいならば，空間や時間，また連続などの概念にはなお多くの問題が残されているはずです。連続については数学の枠内ながら，大分話しましたので，空間と時間について少し触れましょう。

空間というのはプラトン，アリストテレスの昔からの大問題で，ニュートンなどはこれを「神の感覚器官」としていました。しかしギリシア数学では「空間」はせいぜい図形のおかれた場所というだけで，数学の対象にはなっていません。これが数学的存在になるのは 18 世紀後半から 19 世紀のことです。しかしその数学化が既に終わったとはいったい誰が言えるでしょう。

時間の数学化は一段と遅れているように見えます。「時間」の正体の分からなさについてはブロウエルのところでも触れましたが，私は，それが数学化されているのは，それを実数連続体で表現するという慣例（!?）と，物理学的に表現された不可逆性（エントロピーの増大），あるいはせいぜい確率過程の議論や最近時折聞かれる「時間」を考慮した一種の論理ぐらいではないかと思っています。宇宙の「初め」を論ずるビッグバン理論にしても，私は一つの数学的モデルとして，その「初め」より前のことが不可知なのは，この規約的モデルの中だけのことだという程度にしか分かりません。

それよりも「今」とは何でしょうか。それは数学的に言えば，ただの時点に過

ぎませんが，われわれにとって本当に実存するのは，「過去」についての記憶と「未来」についての期待の一切を包摂しつつ，自分が生きている間はひたすらに流れている（？）この「永遠の今」だけなのではないでしょうか。これは不気味な考えですが，この不思議な「今」の底に，深い省察によって数学化される日を待っている混沌はないものか。これは，ないとかあるとかいう性質のものではない。ただそこに興味があり，何か手懸かりが得られるならば，沈潜して良いだけの深さのある問題だろう，私はそう言いたい。時間を簡単に「無限で連続の流れ」と言い，集合論で話は済んだと言い，ビッグバン理論はそれで受け容れる，それはそれでよいけれど，たまにはそんな先入観を捨てて虚心にこういう千古の難問を考えるというのも結構意味のあることだと思いますが，いかがでしょうか。

話が大分脱線しましたが，私の言おうとすることはもう十分に分かっていただけたと思います。要するに，単に数学と限らず，およそ数学的要素を含む学問においては，何かしら根底的にものを考えよう，抜本的に新しい立場でものを見ようというようなとき，例の「何らかの意味」で無限論的な考察はしばしば有効な手段ではないか，ただしそれはあくまで具体的・経験的な基盤に立って意志的に行われるべきものであり，かつ発見的段階が一段落した暁には，それを他人に伝え自分でも納得できるように，「何らかの意味」の有限的考察が要るのではないか。そして実はそれがまた「数学」という学問の根本契機——少なくともその一面——なのではないか。同じことを何度も繰り返すようですが，これが竹内氏の今回の問題提起に対する私なりの答えの荒筋であり，同時にそれを明確に描いてみせることが，私自身の今後に対する大きな課題でもあるのです。

> この改稿を終えたとき，例えば無限等比級数のように「無限によって有限を探る」という，今回は十分に生かせなかったテーマがあることに思い至りました。もしこれを今後展開するとすれば，その標題は「無限と有限の対位法」とでもしたいところですが，今回はこれで止めます。

補説１　カントルの無理数論とデデキントの無理数論

無理数 a は，これに収束する有理数列 $\{r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n, \cdots\cdots\}$ でどこまでも近似できますが，その列がどんどん先細になり，$\varepsilon > 0$ をいかに小さくとっても，或る番号から先はつねに $|a_p - a_q| < \varepsilon$ となるならば，その列は必ず収束することが

分かり（コーシーの判定法），a を表面から隠すことができます。そこで収束する有理数列そのもの（コーシー列）を「実数」と名付けるのがカントルの無理数論です。デデキントの無理数論は本文で触れた (p.7) ほか，「カントルの集合論形成のスケッチ」（『数学と哲学との間』，玉川大学出版会，1998 年 12 月）でも説明してありますが，これも「切断 (A, B)」とは，無数の有理数の集合である A, B を一個の**もの**として，A, B からなる対を「実数」と名付けたものです。

補説 2　超越数の存在の集合論的証明

代数的数の可算性は，整数係数の代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

に「高さ」$h = n + |a_1| + |a_2| + \cdots\cdots + |a_n|$ を与えると，各 h に対応する方程式 (1) は有限個でそれぞれの各根も有限個だから，それらを h の順に数えていけばすみます。超越数の非可算性の証明は帰謬法です。超越数が可算だと仮定し，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ と並べます。この列で x_1 と x_2 の間に来る元がなければ話は終わりなので，その最初の元を x_{i_3} として x_2 との間で同じことをし，x_{i_3} と x_{i_4} の間，$\cdots\cdots$ と続けますと，カントルの無理数論によって，その極限値は列に属さない無理数に収束することになって矛盾になります。

補説 3　順序型・全順序・整列集合

集合の元の順序には，大小関係のように一列のもの，官庁の組織のように樹枝状のもの，じゃんけんの強弱のように堂々巡りになるもの，その他がありますが，集合（無限集合でもよい）の元の性質に無関係に，それらの順序の「骨組み」を順序型と呼びます。

大小関係のような一列の順序型，つまり集合の元の間に $a < b$ か $b < a$ かの比較が常に可能で，$a < b, b < c$ ならば常に $a < c$ となる型の集合が全順序集合，全順序集合の部分集合が必ず最初の元を持つ場合が整列集合です。自然数列は整列集合ですが，有理数や実数はそのままでは全順序集合だが整列集合ではありません。また $\{1, 3, \cdots\cdots, 2n+1, \cdots\cdots; \cdots\cdots, 2n, \cdots\cdots, 4, 2\}$ なども後半の偶数部分に最初の元がないので，全順序だが整列ではありません。

これらの例が示すように一般に二つの整列集合の間では大小比較が常にでき，またそこでは逆向きの無限列（無限下降列）が決して現れませんが，これは整列集

合の最大の特徴で，集合論で最も重要な性質の一つです。カントルの超限順序数は整列集合の典型に他なりません。

補説 4　カントの数理哲学とラッセルの論理主義

ラッセルが数学を論理学に解消させようとしたことは軽く見過ごすわけには行きません。それはこれがカントの批判哲学への壮大な「批判」になっているからです。カントは数学（および自然科学）の真理性の根拠を人間に先天的な認識に求めてその種の認識の満たすべき条件を「批判」し，その考察（カテゴリイ論）を論理学に準拠して行いましたが，ラッセルは，（アリストテレス以来二千年ぶりに）改新された論理学（述語論理）の上に立ち，それによって数学を論理学に解消させようとしたわけです。これは現代数学に対するカント的批判の再建ともいうべきもので，ヒルベルトにもブロウエルにも同様の考えはあったらしいのですが，ラッセルの試みは哲学的に見て最も意図的で系統立ったものと思われます。現代の数学ないし数理科学の「批判」という問題において，彼の試みと，それに対して（数学的帰納法の原理を例として）数学に固有の先天的直観の存在を強調したポアンカレの反論とは，私のテーゼの範囲だけでも今後なお検討すべき重要な問題を含んでいます。

補説 5　メタの立場

一つの理論を対象としてそれをその外から考察した最初の例は，アリストテレスの『自然学（フィジカ）』に対する『形而上学（メタ・フィイジカ）』でしょう。これが今日の「メタ」の由来と思われます。

数学における最初の例は，射影幾何学 (p.4) にあります。公理化された平面射影幾何学では，「二点は一直線を定める」とともに（無限遠点を念頭に置いて）「二直線は一点を定める」をそれぞれ公理とするとか，「一直線上にない三点は三角形を定める」とともに「一点上にない三直線は三角形を定める」をそれぞれ定義とするというふうに，各公理，各定義において「点」と「直線」を交換した形（双対（そうつい）形）でも，やはり公理，定義になっている形に整備されます。その結果，どの定理 T の双対形 T' も自動的に定理になることが分かります。それは T の証明の全部にわたって双対を取れば，それがそのまま T' の証明になっていることが看取られるからですが，これを「平面射影幾何学の双対（そうつい）定理（または原理）」と呼び

ます。しかしこの「双対定理」の「証明」は，普通の定理の証明が公理からの導出によって行われるのとは違って，公理系の構造の観察から得られるもので，つまりこの「定理」はメタ定理なのです。「メタ」の概念はこの後のゲーデルのモデル Δ やコーヘン・モデルなどで，しばしば言及される重要な概念です。

なおこの種の理論はメタ数学または証明論と呼ばれます。

補説６　ブロウエルの直観主義数学

ヘイチングはこの数学を，形式性だけでなく内容的意味を持ち，その対象は人間精神が経験と独立に明確に掴めるものとしました。前半は論理主義や形式主義に，後半は経験主義に対抗する哲学でしょうし，二重否定の消去や構成主義もここに根ざしましょう。しかし私にはなおその根底に時間への配慮があったように見えます。それは人間が無限の対象を本当は有限的時間の中で処理できるはずがないからです。カントが問うた数学の普遍妥当性の根拠（p.17 参照）をブロウエルは時間の直観に置くとしましたが，もしその考えを貫くならば，ヘイチングの解釈の更に奥に，時間を生かした形で，過去の数学と違った何か新しい数学の面が見えても良いと思うのです。私は前にヘイチングの解釈を，どこまでブロウエルの思想に忠実か疑問だと述べましたが，実は，そもそもブロウエルがどこまでヘイチングの解釈を是認したかも，結局は分からぬままに終わりました。なお「連続論覚え書き」補説もごらん下さい。

（原型 1980，改稿 1996）

PDF 化にあたって

本 PDF は，

村田　全『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）

を元に作成したものである。

村田全先生のその他の著述は

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs

を御覧いただくか，書き込みください。