数学における存在

——その歴史的考察——

村田　全

ここで「数学における存在」と呼ぶのは，大昔から今日まで人間が数学の対象としてきたいろいろな「もの」，すなわち図形，数，量，あるいは集合などのことである。これらの「もの」は，われわれがふだん眼で見たり手で触れたりしている「もの」とは，多分に違ったところをもっている。しかもその一方で，それらの「もの」について論ずる数学は，多くの学問のうちでも一段と高い信頼をかち得ており，しばしば絶対的な真理とさえ見なされるほどである。実は“数学における存在”を論ずるのは“数学とは何か”を論ずるのと同じようなことだといってよい。このような事情について多少の反省的考察を展開するのが，この文章の目的である。

1　存在定理という名の定理

はじめに存在定理と呼ばれる型の定理について考える。このたぐいの定理が学校の教科課程の中に現れるのは，早くて高校の終わり頃からで，微分積分学における平均値の定理などはその典型的な一例である:

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定義され，その各点で連続，また開区間 (a, b) の各点で微分可能とする。このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

となるような実数 c が存在する。

これで分かるように，この定理は実数 c の存在という一般的事実だけを主張して，c の具体的な値については何も述べていない。この種の定理は，もっと具体的な定理に慣れた者にはいささか異質に見えるかもしれない。けれどもこの一般的な主張は，「これこれの対象は確かに存在する，たとえ探し方が悪くて或る方法では見つけかねても決してないわけではない」という主張であり，それが一般的であればあるだけ，理論の大局を左右するような重大な意味をもつ場合が多い。現に平均値の定理は区間 $[a, b]$ の各点 x で微分して 0 となる関数は定数である，という定理の証明に用いられ，微分積分学の基本定理の重要な要素として，この学問の中で要め石のような位置を占めている。実際，定数の導関数は常に 0 だが，逆

は自明ではない。任意の x に対する区間 $[a, b](a < x \leqq b)$ に平均値定理を使えば,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = 0 \quad (a < c < x) \quad \text{から} \quad f(x) = f(a)$$

つまり $f(x)$ は定数となるが,この定理なしではちょっと手が付かない。

ところで,この種の存在定理が数学において特に重要だとされるについては,なお考慮すべき事柄がある。それは,数学の対象となる「もの」(上の例でいえば実数)が,日常経験的な「もの」と違って,理想化され理論化された,いわば一種のつくりものだという事実に関連する。そのような「つくりもの」に関する理論,数学が何の役に立つかという問いはしばらくおくとして,ともかく,相手が理論的つくりものだからこそ,この存在の保証も理論的に確かめておかねばならないし,それとともに,その「もの」がいったいどこに存在するかという問題も生ずるわけである。実際,ひとくちに実数と言うけれども,その小数展開は一般に無限小数になるのだから,その一つ(例えば π)の小数展開でさえ書き上げてしまうことはできない。分かったような気分をしばらく去って事を虚心に考えてみると,実数とはまことに不思議な「もの」,むしろ今後も永く,数学のありうべき根底的変動の深い震源地ともなるはずの「もの」と言わざるをえない。そして平均値の定理が主張しているのは,まさにそのような「もの」の存在なのである。

実数という身近な例について上のようなことを言っていると,それは数学ではなくて哲学だと言われるかもしれない。もちろん哲学なら哲学でかまわないのだが,それにしてもこの種の事柄が数学にとって決してよそごとではないという点は,くれぐれも強調しておかねばならない。その意味で,次に,もう一つ存在定理の例を挙げておく。

複素数を係数とする代数方程式は,複素数の範囲で必ず根をもつ。

これはいわゆる代数学の基本定理で,n 次の代数方程式が,k 重根を k 個の根と数えるとき,ちょうど n 個の根をもつことは,これから直ちに導かれる。根の具体的な値を問題にするのではなく,根の存在を一般的に保証するという意味で,これも典型的な存在定理であるが,平均値の定理の場合と違って,ここで保証されている「もの」が複素数だから,その「存在」には更に大きな疑問符が付くであろう。実際,数学の教師をしていると,複素数の出てくるまでは数学も分かっていたのだが,あれが出てきてからが,どうもうまくいかない,という学生には

しばしば出あうものである。

2　数学における「もの」

複素数なる「もの」は果たして存在するのか，また存在するとすれば，それはいかなる意味においてであるか——このような問題は，たとえ半ば哲学的な設問だとしても，数学として捨てておいてよいことではあるまい。上で触れた実数なるものの「存在」への疑問にしても，複素数に対する疑問を経るときに，初めて本当に自覚されるのかもしれない。そういえば私は，複素数などという「もの」はあるのですかと問いかけてきた学生に，それじゃ君は実数という「もの」はあると思っているのかと逆襲して，その先の話をうまく進めた経験がある。

事がここまでくると，これらとは少し意味が違うが，自然数という「もの」自身，いったいどこに存在するのか，という質問も生まれてこよう。われわれが実際に見聞きするのは「1 個の石」，「2 匹の猫」などであって，「1」や「2」という「もの」とは何かと改めて考えてみると，人は説明に窮するであろう。というよりも，実はこれもまた，将来の数学の展開のための深い震源地の一つとすべきである。

同じようなことは幾何学の対象についても言える。実際，ユークリッド『原論』のはじめに与えられている「定義」によると，

点は（位置のみあって）部分をもたぬものである。

線は幅のない延長である。

ということになっているが，虚心に考えてそのような「もの」はありうるのであろうか。少なくとも，そのような「点」や「線」は実際に書くこともできないし，たとえ書かれていても，われわれの眼には見ることのできない「もの」である。更に，そのような「点」がどう集まり，あるいはどう動いて「線」になるかのような，ゼノンの逆理以来の難問は，ライプニッツも「形而上学の迷宮」と呼んだほどで，簡単には片付けられない[1)]。

そもそも数学において論議の対象となり，時にはその「存在」自体が云々され

---

1) 大森荘蔵『時間と自我』青土社
大森荘蔵『時間と存在』青土社
大森荘蔵『時は流れず』青土社
山川偉也『ゼノン 4 つの逆理』講談社，1996
山川偉也『古代ギリシアの思想』講談社学術文庫，1993
を参照。

るところの「数学的存在」とは何者であるか。われわれは次にいくらか数学の歴史に立ち入りながら，この問題に立ち向かっていくことにしよう。

3　ユークリッド「幾何学」における存在

今も述べたように，ユークリッド幾何学が対象とする「もの」は，一応は点や線などの「図形」といえるにせよ，実際は非常に手前勝手な形に理想化されている。手前勝手というのは，例えば現実の図形から大きさなり幅なりを奪っておきながら，位置や延長は目的に応じて適宜温存し，しかも点と線との微妙な関係には口をつぐむというようなやり方をさす。

このようなことがどういうわけで必要なのか。またたとえ必要であるにもせよ，そのようなことはいかにして可能であるのか。そしてその背後にある数学的存在なるものの基本的な性格は何であるのか。いたずらに「迷宮」をさまよう気はないが，これらがこのあとの問題である。

この種の理想化が何故必要であるかについては，そのような理想化をしないでおくと，どんなことになるかを考えてみるとよく分かる。実際，もし「線」にある程度の幅を残しておくと，角の大きさなどの概念がぼやける結果，三角形の内角の和が二直角であるという定理なども成立しなくなるであろう。要するに正確精密な論証体系ができ上がるに当たっては，まずその対象の正確な表現という仕事が必要なのである。例えば「点」に大きさを付与し，二点 A, B が半ば重なる（!?）時に $A = B$ と定義したりすると，$A = B, B = C$ から A と C との重なりは保証されないから，$A = C$ は必ずしも得られない。これでは理論は動かないのである。これについては，ボアンカレの著作『科学と仮説』に，示唆に富んだ記事が見出される。

『原論』第V巻にある有名な量の比例理論は，今日の実数論に対比されるような内容を図形学の形で展開したものだが，これなども全く上と同じ考えに沿っている。実際，もしそこで扱われる対象が，大きさをもつ「点」や太さをもつ「線」であったとすれば，例えば正方形の一辺と対角線との長さの比が，どんな有理数によっても表されないというような認識には，到底到達できなかったであろう。これは「図形」の理想化が必要だった理由とまではいえないにしても，そのような理想化のもたらした結果の中に，ギリシア数学の極めて本質的な前進があった

ことを示す例として，忘れてはならないものである。

ここで個人的な意見を付け加えると，私は，論証的学問のギリシアにおける成立が，まず理論的数学の範囲で，特に理想化された図形学の範囲で行われたということを，単なる歴史的偶然として見すごすごとはできない。論理というもの自身，元来，経験から生じていながら，経験を超えたものであるけれども，その論理を貫くためには，対象の方も超経験的な「もの」にならざるをえなかったと私は考え，この点に，ギリシアの論証的学問がまず理論的数学の中で生まれた事情の一つの根拠を認めている[1)]

さて図形の理想化が必要であるという話は一応これでおくとして，次はそのような仕事がいかにして可能かという問題である。

結論的にいうと，この仕事は『原論』では定義，公準，公理の形で行われており，それはそのままこの幾何学の本質につらなっている。ところがこれについての人びとの考え方は，最近十年ばかりの間に大幅に変わりつつあるように思われるので，次にその古い考え方と新しい考え方とを，簡単に比較して述べてみよう[1972 年現在]。

4　作図公理の保証する存在

『原論』の公理系に関する従来の考え方では，数学的存在についていま問題にしているような仮構性は，あまり深刻な問題になっていない。その考え方の大筋は大体次のように述べられるであろう。

——ユークリッド幾何学とは，現実の図形を理想化した「もの」を対象とし，それに関する作図の内で基本的なもの，すなわち定規とコンパスによる作図を「公準」として明示し，その上に築き上げられた理想的「作図」に関する理論であって，ただしその「定義」の中には，「点」や「線」のような，理想化された対象を何とか描き出そうとして，いささか苦しい表現に陥ったものもある。また「公準」は理想化された対象についての性質としてではあるが，万人共通の真理と認められるものであり，従ってそれはその上に立つ幾何学の全体系の真理性を根拠づける。「公理」についても同様である。もっとも，「公準」と「公理」の区別には決定的な説明は従来はなかった。要するにそれらの「点」や「線」の存在は，作図

[1)] 広重徹編『科学史のすすめ』（筑摩書房，1970））所載の拙論（1—二）参照）。

公理の体系によって保証されていたのである。

大体以上のところが『原論』の公理系についての従来の考え方の大綱である。この背後には，数学的真理というものの絶対性が暗黙のうちに前提されている。またこの前提を含む一連の考え方には，中世あるいはそれ以前以来の，絶対的真理なるものに対する西欧的な姿勢一般が底流しており，理論的数学はそういう性格を担って形成され，むしろそういう真理の一つの典型となってきたと見られる。このことは西欧的数学の一つの伝統であるとともに，その数学を一つの重要な要素とする西欧的文化の特質であるとさえ思われる。この話題はそれ自身深い奥行きをもったものだが，今はこういう方面に立ち入る余裕はない。

5　討論に支えられた論理的存在

さて『原論』の公理系の成立に関する新しい考え方は，1961 年のサボー教授の論文から生じた。サボー教授は現在もハンガリーで活躍中の学者で，古代の文献学，特にギリシア哲学史の研究から古代数学史の研究に移り，その方面の学問に文字通り画期的な業績を刻みつつある。この人の業績については『ギリシア数学の始原』（中村幸四郎，中村清，村田全共訳，玉川大学出版部），『数学のあけぼの』（中村幸四郎，伊東俊太郎，村田全共訳，東京図書）などの邦訳があるが，ここでは一つだけ，数学的存在の帰謬法（いわゆる背理法[1]）的性格について触れておく。

すでに上で示唆したように，ユークリッド幾何学の公準はしばしば作図公理として，基本的図形の作図可能性を保証する主張と解されてきた。その意味からすると，これは一種の存在公理である。というのは，例の“手前勝手に”理想化された図形の「存在」を支えるものは，それらに対する定義と共に，それらの公準をおいて他にないからである。ところがユークリッドの『原論』の中には，このような作図可能性によるのとは違った性格の存在定理がある。例えば整数論の巻 (VII，VIII，IX) の存在定理がそれである。

ここで念のために付け加えておくと，『原論』の内容は決して図形的幾何学に限るのではなく，整数論，無理数分類論その他，当時の理論的数学のほとんどす

[1] この方法は，仮定を背理に帰着させせることによって仮定を否定することだから，背理法の名は舌足らずである。以下では帰謬法を用いる。

べてがその中に包括されている[1]。

さて考えようとしている存在定理は，『原論』第V巻命題20の素数の無限存在に関する定理

素数の個数は，前もって定められたどんな個数の素数よりも多い，

である。証明は作図でなく，帰謬法によって次のように行われる。

素数 A, B, Γ が与えられたとして，これより他になお素数があることを主張する。A, B, Γ の最小公倍数に単位1を加えたもの Δ を作ると，Δ は素数であるか——それなら話は終わり——，さもなければ合成数として，いくつかの素数の積で表される。ところが後の場合，Δ が A, B, Γ のどれで割っても1が余るから，Δ の素因数は A, B, Γ のどれでもありえず，従ってこの場合も別の素数があることになって話は終わる。

いずれにせよ，こうしてみると『原論』には，作図公理を根拠とする存在証明と，論理的な帰謬法による存在証明との，少なくとも二通りの存在証明があるということになる。この二つは，上で述べた旧い型の考え方の下では，互いに異質のものと見られても仕方がないが，これらはサボー教授の新しい考え方の下では，深いところで関連しあっていると見られるのである。

サボー教授はユークリッド的数学の基本精神，少なくともその形成期の基本精神を，エレア学派の哲学の中におく。そしてエレア派の討論の基本である帰謬法的論法が，ユークリッド幾何学における作図的存在証明と帰謬法的存在証明との双方に底流していることを，次のようにして明らかにしていくのである。以下しばらくサボー説を聞こう。

——相手を論理的に説得する場合，一番強力な武器は，相手の主張を仮定した上で，そこから矛盾を導いてみせることであろう。エレア派はこの論法を自覚的・学問的に用いた最初の学派といってよいが，ユークリッド幾何学の公準や公理の形成過程には，この論法の名残りが見出される。その事情は次の通りである。

——エレア学派というのは，流動変転する世界の底にあると思われる唯一不動の対象を，真の実在として論理的に把握しようとした最初の学派と見られる。それに対してその批判の対象だったと思われるピュタゴラス学派は，唯一者に対す

[1] それらをすべて図形的に取り扱った理由についてはたとえば茂木勇氏と私との共著『数学の思想』(NHK ブックス，1966) 第II章などを参照されたい。

る多数者つまり数を論じ，また不動に対する運動を予想させる作図を対象とする学問を論じていたわけで，両学派の間には学問的な論争があったに違いないと思われる。エレア学派の流儀からすると，ここは仮に相手の立場を認めたようにして，「数—多数者」という対象が「存在」し，「図形—運動」という対象も「存在」すると仮定し，できればそこから矛盾を導きたかったところであろう。しかし，この種の「仮定」から決定的な矛盾が出ないでいるうちに，いつしか年月もたち，ピュタゴラス学派やエレア学派をめぐる学問的雰囲気も変化した結果，かつての「仮定」はやがて一つの理論の出発点のようになり，ついにはその理論の原理と認められるまでになった。こういうことも十分考えられる。ユークリッドの体系における「数」の定義や「作図」可能性に関する公準などは，元来こういう帰謬法的論争を想定させる状況の下に生まれたものであろう。そうだとすれば，帰謬法の成功した例である素数の無限存在の証明と，その基本的姿勢において同じ型のものだったのではないか……。

以上がサボー教授の説の大すじである。要するにこの考え方の下では，ユークリッド的数学における「存在」の根底には，作図によると論理によるとを問わず，ひとしく対話討論の法あるいは特に帰謬法的間接論法が介在しているわけで，古代の数学的存在はこのような弁証法を介して，いわば一元的に捉えられることになる。そこに現れた「図形」が，単に理想化された「もの」になっているというだけでなく，先に手前勝手と呼んだような性格をもっているのも，討論という手続きがそこに介在していたという事情に，多少とも影響を受けていると見てよいであろう。

この説については直接的史実の裏づけに欠ける等の批判も強く，通説とは呼べないが，魅力ある説という点は動くまい。

6　数という名の存在

この辺で話を近世数学にうつす。

近世数学におけるデカルトの最大の貢献は，それまで図形という「もの」に託して展開されていたユークリッド的世界から，近代的な数 - 量という型の「もの」の世界へと，数学を変貌させたところにあると考えられる。もちろん数や量という「もの」は古代数学の世界にもあったけれども，**任意**の数や量が図示でな

く象徴的で無内容な記号によって表現され，しかも機能的な算法として利用できるようになったという点には，古代と近世以後とを分かつ大きい契機が認められる。というのは，この近代的な記号法はユークリッド的数学における論証の方法と違って，論証すべき事柄，例えばこれこれの方程式の解を**発見**するための式の変形法として機能するとともに，逆にその値を方程式に代入して，その値が求めるものであることを**論証**する方法としても使えるという，一石二鳥的な卓越した能力をもっていたからである。これはデカルトに発する構想である。

このような記号法は，やがてライプニッツのより遠大な構想——そこには記号論理や電子計算機への夢の萌芽さえ認められる——に支えられ，現代に至るまでの間に次第にその力強さを示してきた。もっとも，近世から 19 世紀にかけては，その記号の示す対象は「数」と呼ばれる「もの」の範囲にほぼ局限されていたのだが，この場合もそれらの「もの」が，（1 そのもの，2 そのもの，あるいは π そのものというふうに，）見ることも触れることもできない理想（イデアル）的あるいは観念（イデアル）的な「もの」であることは動かせない。

むしろ自然数，整数，有理数，実数，あるいは複素数まで，つまりいわゆる「量」までも「数」として表現するこれらの「もの」は，理想化された図形と同じように日常経験の中から抽象されるとともに，やがて形をなした後は逆に経験の上に投影されて，経験的世界の中に隠されている或る秩序，機能などを浮き出させてくれるという，まことに不思議な「もの」なのである。

この事情をもう少し詳しく示すのに，まず実数という「もの」を考える。これらは普通にいう量の表現にも用いられるが，その際われわれはこの無次元，無単位の実数の上に，それぞれの量の次元あるいは単位を与えて具体的な量を表現する。これは今日では極めてありきたりのことである。しかしこのことの背後には，具体的な量一般の底に共通に隠された「或るもの」としての「実数」——それはある時期以前には「存在」しなかった「もの」だ——が生み出されるまでの，長い暗中模索の歴史が潜んでいる。実際，しばしば今日の無理数論に対比されるユークリッド『原論』第 V 巻の比例量論においても，具体的な量の比に関する論こそあれ，無次元無単位の実数の比に関する論はない。デカルトが初めて，一切の量を一律に長さでおきかえることを提唱するのだが，それが解析幾何学を生む力と

なり，グラフというものにつながり，更に微分積分学の形成に力をかし，その後の数学の進展に大きく影響したあげく，ついに 19 世紀の実数論にまでつながっていくのは，実にユークリッドの時代から二千年に余る年月を経て後のことなのである。

こう考えてくると，自然数という「もの」が，人数，個数，などの具体的な個数あるいは順序からの抽象として生まれたについても，おそらく同じような事情があったことだろうと推測される。それはただ余りにも古く，従ってまた余りにわれわれが慣れすぎているために，つい見過ごされているだけのことなのかもしれない。

実数や自然数という「もの」が，古い時代にいかに不可思議なものであったかは，複素数という「もの」を考えるときに，われわれにもいくらか分かるのではないか。半ば現実に密着しつつ，半ばは人間の「つくりもの」である数という対象，虚構ともみられる面をもちながら，なおかつ現実の中の或る秘められたからくりを見せてくれるこの不思議な「もの」，その性格の微妙な局面を，複素数の導入は，自然数や実数の場合より遥かに新しい歴史的経験として，われわれに見せているように私には思われる。複素数の導入によって明らかにされたもろもろのこと，特に上記の代数学の基本定理や，ここでは触れないが関数の解析性に関する一系の理論（関数論）などを前にすると，われわれはもはや複素数という対象を，空無虚構の「つくりもの」と見ることはできないが，それにもかかわらず，今でもなおそこに「虚数」（imaginary number——想像上の数）の名が与えられるのも一つの現実である。

要するにこれらの数学的存在は，それと現実とのつながりに目を奪われると，その実在性など自明として疑う気にもなれない態のものだが，時あってふとその虚構性に目覚めると，それはまことに奇妙で不可思議な対象なのである。そしてこの場合も，結局，人はその存在を最後的には公理——討論の出発点——によって要請し，個々の場合については存在定理という形の命題によって証明するというふうにせざるをえない。そして考えてみると，これはまさに，数学およびその応用という学問的方法の最も基本的な特質だといってよい。数学を，イデアの世界と現実との各々にかかわりをもつ二面的性格の学問として述べた最初の人はプラ

トンであると言われているが，それは今考えている思考の線に関する限り，恐ろしいまでに当たっている。実際，数学における存在にはこの二つの面がつねにつきまとっており，それがやがて理論的数学とその現実への応用とをつなぐ手がかりになっている。今日の数理科学というものの性格について考えてみると，それがただのこじつけでないことは明らかであろう。

7　集合という存在

古代数学における存在が理想化された図形であり，近世数学における存在が，量を含めての広義の数であったのに対して，現代数学の存在の基本的形態は集合である。最後にこのことについて簡単に触れておこう。

古代における数学的存在が図形一本の形に統一されているのに対して，近世数学における存在である「数」はやや多種多様に見えるが，19 世紀のコーシーあたりから始まる数論化 (arithmetisation) の動きは，それを自然数の理論一本の上にまとめようとする企てとも見られる。

このような試みは，ギリシア時代にもあったのではないかと見られる節がある。すなわち『原論』第 VII〜IX 巻にある数論は，編集の都合か何かで途中の巻になったのだろうが，恐らく一番古い時代に理論化された部分で，幾何学に属するその他の巻も，できれば数論の巻と同じように単純透明な形——数論の巻には公準も公理もなく，数個の定義だけが前提されている——に仕上げようとしたものだったのではないか。そしてもしそうだとすれば，19 世紀の新しい数論化の企ては，二千年来の見果てぬ夢のつづきだったと言ってよいのかもしれない。しかしその夢はやがて，自然数より広い集合の概念の上に移されて進められたあげく，結局，今もなお見果てぬ夢に止まっている——少なくとも私はそう思う。現に集合をもち出してもゼノンの逆理は解釈されない。もちろん世の中には，それは既に完了したと考える楽天的な人びともあるようだけれども……。

以下のこのことについて二三の付言を添え，私の考えのあらましを示しておこうと思う。

数学において無限集合の概念を初めて導入したのは，カントルとされ，これも誤りではないが，無限集合という概念の上に一切の数学的存在を構築しようという考えをもち，かつそれに実際に手をつけたのは，むしろデデキントである。

デデキントが『数とは何であり，何であるべきか』(*Was sind und was sollen die Zahlen?*) で遂行しているのは，まさにそのことに他ならない。

集合概念の導入によって，数学はどのような変革を蒙ったか，あるいはむしろいかなる利益を受けたか。これに対して直ちに答えられるのは，数学の対象——数学における存在——の範囲が飛躍的に増加し，それが結局，今日の新しい理論数学を導き，ひいては数理科学と呼ばれる新しい応用数学を生み出したということである。要するに現代数学のすべてに本質的に関係しているというわけである。

実際，例えば図形のみを「もの」とすると言い切って事を運ぶ限り，ある図形を他の図形に写す写像ということは，「もの」ではなくて作用である。また数，量，関数ぐらいのところを「もの」とする限り，ある関数にその原始関数を結びつける仕事は，「もの」ではなくて作用である。もちろん「もの」だけが数学の対象ではなくて，作用も性質も当然，数学の研究対象にはなるけれども，集合概念の導入はこれらのことについて大きな変化をもたらした。というのは，無限者を一個の対象と考えるのみでなく，集合の部分たる「部分集合」，集合の部分集合の集合，そのまた部分集合，……などをすべて一律に「集合」という「もの」として考えるという考え方によって，図形，数，量，関数などはもちろん，それらに関する作用や性質などもすべて「集合」という名の「もの」として表現できるようになり，結局，数学の対象となる「もの」の世界は想像を超えた範囲にまで拡がったからである。

簡単な例でいうと，自然数の間の “互いに素である” という「性質」は $(2,3)$, $(2,5)$，…などという互いに素な数の対の集合という「もの」でおきかえられ，しかもこの巨大な「もの」は，「自然数に関する性質」という一段と巨大な「もの」の一要素となる，というようなことである。こういう考えが「数学」の世界をどのくらい拡大するかは，改めて考えてみるまでもなく，現代数学の全体によって明らかに示されている。

禍福はあざなえる縄のごとしというが，このような幸福のうらにどんな禍が潜んでいるかということが，この後の話題である。

8　集合はどこに「存在」するのか

さてそこで第一に問題となるのは，このような根底的な集合なる「もの」が，いっ

たいどこに「存在」するのかという疑問である。これは数学の中においても，また数学に隣接した哲学の範囲においても，まことに厄介な問題を数多く含んでいて，もとより，おいそれと扱える領域ではない。仕方がないから，ここでは一二の例を挙げて話を進めることにする。

例えば超限順序数という「もの」がある。「カントルにおける数学と哲学」（『数学と哲学の間』所収）で述べたように，これは形式的には比較的簡単に述べられる。しかし内容的にみるとどうであろうか。それらの記号の指し示すはずの「もの」と，それに対応して頭の中に浮かんでくる「もの」との間には，かなり大きな開きがあって，早い話が，順序数の超限列などといわれても，まことに貧弱な可算順序数の切れはししか頭に浮かんでこない。

しかも困ったことに，これは必ずしも私の能力不足のせいではなく，どうやら誰にもあることと思われる節がある。というのは，集合論誕生当時に活躍していたデュ・ボア・レイモンやボレルなどの学者が，「口先や筆先でいくら大きいことをいってみても，現実には（あるいはむしろ例の“手前勝手”に理想化された現実においては，というべきか）可算の域を脱せないではないか」という意味のことを，「超限の二律背反」という形で主張し，しきりに集合論を牽制していた例があるからである。超限順序数という「もの」は裸の王様の着物的存在なのか，それともそうとしか見えないようなわれわれ俗人の眼は実は節穴とすべきものなのか，数学における「もの」の論はこの辺からいよいよ深刻の度合いをましてくる。

もちろん正統的な数学の歩みに従う限り，上記のような可算順序数での足踏み状態を超越する工夫はあるのかもしれない。ただしよく考えてみると，それらは結局，「可算順序数全体」という，とてつもない「もの」を考えようとするか，連続体濃度のように可算濃度より高い濃度という「もの」を先に捉えておいて，そこに可算順序数の終結する果て（ないし，その果ての更にかなたの果てまた果て）をあらかじめ作ってやり，後はたとえば選択公理の出番とするか，というぐらいのことになるであろう（選択公理については「カントルにおける数学と哲学」「ボレルのエフェクチフ概念の形成」（『数学と哲学の間』所収），参照）。しかし「可算順序数全体」なる「もの」を考えるのは，結局，問題の出発点そのものだし，後者の要求する「果て」についても，選択公理のこと以前に，そこに出てきた連続

体濃度という「もの」ですら，叩けばやはりほこりは出てくる。実際，実数の集合が連続の濃度をもつというのは，“それを仮に可算濃度と考えると矛盾に陥る”という帰謬法——またも帰謬法が出てきた！——の形で示されているだけで，ボレルのように，“別段，新しい無限が積極的に示されたわけではない” という苦情を述べることもできるからである。

濃度のことにもどると，集合論では，可算濃度や連続体濃度どころでなく，無数の “より高い” 濃度がひしめいている。それらの集合，ないしはそれらの集合を打って一丸とする全体のような超巨大な「もの」——集合論ではしばしば proper class と呼ばれる——などは，いったいどこに「存在」するのであるか。相手が裸の王様なのか，こちらの眼が血迷っているのか，これは実は現代数学の哲学における最も深刻な問題の一つであろう。

いよいよおもしろくなるところで話をはしょらざるをえないのは，筆者の不敏の致すところとして許して頂く他ない。しかしともかく，今日の集合概念も，やはりこのような討論を頭においた，ギリシア以来おなじみの公理論の形にまとめる他なく，かつ近世以来おなじみの記号法によって展開される。してみるとそれが存在するのは，例によって理想（イデア）化された観念（イデア）的世界の中ということになるが，それがプラトン以来相変わらず，現実の中に根を引いている点が問題なのである。

しかもこの場合，古代あるいは近世の同じ場合より，事は一段と紛糾するように見える。その理由は，公理のいう「こと」と，その指し示す「もの」との間に，以前にはそうまで目につかなかった齟齬が，「集合論の逆理」という形で，にわかに目立ってきたところにあるのだが，それは，ギリシア以来，人が意識して避けてきた無限なる「もの」を解放した報いということであるらしい。ここに現代数学に宿る一つの深刻な痛しかゆしがある。

9　むすび

どうも，始めは処女のごとく終わりは脱兎のごとき話になってしまった。このような話に「むすび」もないものだが，既に述べた二三のポイントを繰り返すことで，話のしめくくりぐらいはつけようと思う。

現代数学の存在論に対する統一的基礎は，無限集合について，その部分集合を

とり，部分集合族を作り，その他，無限者を自由に処理できる「もの」と考えるところにある。そのことを数学的討論の初めに「公理」として認め，そこに描き出される「もの」を不安なく受け容れるならば，話は一応それで終わるであろう。そして普段はそれでよいのであって，私なども意識してこういう問題に立向かうのでない限り，“そこに数学の世界がある” とでもいって澄ましておれる。エレア派とピュタゴラス派との討論にしても，恐らくこのようなことではなかったのだろうか……。

しかし，もしそのような「もの」は一体どこに存在し，それらはいかにして数学を，その真理性もろともに支えるのであろうか，などと問うとき，数学は，自らの根底についての古くして新しい問題が，なお少しも変わっていないことに気付くであろう。「図形」，「数」，「集合」と，「もの」の様相は変わってきたようだが，その「もの」は何であり，それがいかにして数学の真理性を支えるかという問いには，ほとんど変化はない。むしろ無限という「もの」の介入とともに，かえって飛躍的にむずかしくなったという思いだけが残るといった状況である。「“数学における存在” を論ずることは，“数学とは何か” を論ずるのと同じようなことだ」ということを，私はこの文のはじめにかかげておいたが，ここへ来て，もう一度その文句を振り返って頂ければ幸いである。

（原型『現代数学』第 5 巻第 2 号，現代数学社，1972）

PDF 化にあたって

本 PDF は，

村田　全『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）

を元に作成したものである。

村田全先生のその他の著述は

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs

を御覧いただくか，書き込みください。