カントルの集合論形成のスケッチ

村田　全

この稿の原型は 1989 年「数学若手の会」での講演を同会会誌に載せた文章だが，今回，基本線だけを保存して，一般の読者にも読めるように全面的に書き直し，二三の専門用語には解説を付けた。説明のない術語は読み飛ばされても全体の理解に差し支えはないと思う。

はじめに

私の数学史研究の目的は，数学の理論とその背後の哲学的思想との歴史的形成を見ることによって「数学とは何か」に答えようとすることで，一般の数学者の仕事と相補うものでありたいと思っています。数学史というと大雑把な物語のこと，という誤解が世間にはあるようですが，本当の研究は物語であってはなりません。ただ，そこには巨視的な面と微視的な面とがあり，巨視的の方は大なり小なり大雑把になるかもしれませんが，その代わり私の場合はそこに哲学的要素への顧慮を加えているつもりです。

1. 集合論に到る歴史——巨視的な見方——

大きな歴史の中で見ると，数学が技術でなく理論的学問として成立したのはギリシア時代です。ユークリッド『原論』の「幾何学」は，デカルト，ニュートンの時代まで「理論数学」というのと全く同じ意味だったのです。『原論』では整数論も，無理数論に相当することも，全て図形的に表現され，公理的に処理されていました。ただしそこで「数」というのは自然数だけで（正確に言うと ‘単位 1’ は ‘mónos’，‘数’ は ‘arithmós’ と呼ばれて 2 以上），有理数，無理数，実数などは数ではなく，有理数は「数の比」，後の二つは長さや面積などの「量の比」でした。しかしそれらの比の扱い方は理論的に極めて厳正で，デデキントも彼の無理数論の源は『原論』にあると書いているくらいです。

一方，記号代数は元来，この理論数学の発見的な補助手段から出発します。例えば方程式の解の「発見」を記号的に行い，発見された値が正しいことは『原論』の幾何学的方法で証明されたのです。この補助的手段を，発見のみでなく証明もできる理論的学問に変貌させたのがデカルトで，彼の「幾何学」を解析幾何学と

いうときの「解析」は，当時は（「学」というより）記号代数の「術」の意味だったのです。

幾何学的な数学は，図形で表現できるものしか対象化できず，演算や関係までの対象化は困難ですが，記号的方法は演算である比を「有理数」で表現し，比例などの関係を「関数」として対象化します。更にここには「数」の概念の拡張が伴います。十進小数の発明（16 世紀，ステヴィン）が「量」を「数」で表現する道を拓いたのです。約言すれば，これは数学の理論的枠組みそのものが図的表現から，記号と数値の計算による表現に変わってきたことで，これこそ近世以後の数学と古典数学との最大の違いと言えましょう。

この枠組みの変化を示す意味で面積・積分について触れてみます。定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

は，幅 $\varDelta x$ とその中での高さ $f(x)$ の積（短冊形の面積）の和を近似和とし，$\varDelta x$ を小さくしたときの近似和の極限値として定義されます。ところがこの極限過程を図形的に見ますと，各短冊は各点 x 上の線分になり，定積分とは面積 0 の線分の無数の和（！）という逆説的なものになりましょう。つまり定積分は古代の図形的枠組みでなく，近世の数値的枠組みで考えられた概念なのです。

実は古代でもアルキメデスなどは例外で，その求積法は近世そこのけの理論的なものですし，また数値計算への関心もありました。しかしその彼ですら，共に二次式の積分になるような問題を図形的に異質なものとして区別するなど，時代的制約は脱しきっていません。

18–19 世紀を経て今日になると人は数学を数値と記号の演算と見ることに慣れきっていますが，その根底には「数」概念の変化と「記号法」の整備，つまり数学の枠組みの大転換が起こっていたのです。実際，18 世紀になると（実数単位 1 と虚数単位 i からなる）複素数も普通に使われますし，ハミルトンの四元数（$1, i, j, k$ の 4 単位からなる数）なども導入され，数の拡大の原理（ハンケルの算法不易の原理）を初め，数概念そのものの吟味も始まります。ハンケルの理論は体(たい)の拡大など，今日の代数系の理論への第一歩です。

面白いのはこの間，ガウスの整数論とともに自然数の特別な重要性が改めて浮き彫りになったことで，「整数を神のみわざ」としたクロネッカーの自然数中心

主義も現れますが，これは解析学の理論化が算術化 (arithmetisation) されたことと無縁ではありません。

解析学の算術化の背後には，初期の微分法，積分法（ニュートン，ライプニッツ）の「乱暴さ」，例えば $\Delta x \neq 0$ として $\Delta y/\Delta x$ を計算し，その後で $\Delta x = 0$ と置くことや，オイラー辺りの複素数の奔放な形式的利用などの合理化の要求がありました。これらの件は，記号的方法が補助手段であり必ずしも証明法ではなかったことのよい実例ですが，ともかく微分積分学で言えば，$\varepsilon - \delta$ 論法が確立し，「x が動く」「y が動く」という直観的な表現は，こうして数値的な極限概念の上で合理化されるわけです。もっとも，合理化ということには既成の有効な手段のための辻褄合わせ的な面があり，ニュートン，ライプニッツ，あるいはオイラーなどの大胆奔放な創造的精神も，数学では極めて大切な要素であることは，今もって忘れてならないことです。

さて以上の大筋の上で，関数の原子論的把握とでもいうべき思想が定まります。関数の概念は運動学的なニュートン，原子論的なライプニッツの差はあっても，共に図形的なものだったのが，18 世紀を経てコーシー，ディリクレ，リーマンと進むうち，次第に点対点，数値対数値の対応という形に決まってきます。私はこれを関数の原子論的把握と呼びます。

早い話が，或る区間で連続な関数と言っても，グラフに切れ目がないというようなイメージは表面から退き，初めに「一点における連続」を定義し，定義域の「各点で連続」として連続関数が定義されるわけです。（x が有理数ならば 1，無理数ならば 0 という）ディリクレ関数などは当初の関数概念からは異質ですが，後のいわゆるこれら「病理的関数」もこのような枠組みの変化に伴って生じたものに他なりません。この意味では関数論における解析関数こそ，初期の人々の念頭にあった関数のイメージを伝えるものと言うべきでしょう（何回でも微分可能でテイラー級数に展開可能な関数）。

次にやや特殊な話題ですが，射影幾何学での無限遠点，無限遠直線，関数論における無限遠点などの超越的対象の出現に注意します。これらは最初はただの規約として導入されるのですが，射影幾何学の場合はまもなく射影座標の考案などによって真正の数学的存在性を獲得します。また少し後れて関数論の無限遠点も

（集合論的位相数学により）同様になります。これらは古典数学の中に存在する無限者としてその名を冠して現れた最初の例でしょう。カントルに対する射影幾何学の影響には大きいものがあります。

これとは別に，ガウスが無限集合たる剰余類[1)]を導入して整数論に新生面を拓き，集合論的現代数学を実質的に先駆したことの意義は極めて重大です。それはこの思想がデデキントに継承され，現代の集合論的数学に直接に道を拓いたからです（補説 1)。ガウスは「無限大というのは‘言葉のあや (façon de parler)’で，‘無限大’なるものが存在するわけではない」と言っていますが，それは非ユークリッド幾何の無限遠点に関してのことで，無限集合の導入でも大きい役割を果たしているのです。やはりガウスは超一流の数学者と言わざるをえません。

カントルについては，スピノーザやライプニッツの哲学，更にボルツァーノの遺著『無限の逆説』(1851) の影響が無視できません。この本には神学や哲学を背景にし数学をその現れと見る見方の下で，「無限集合を一つのものと見る」考えが展開されて一対一対応が使われ，点集合の概念の萌芽も見られます。カントル自身は「ボルツァーノには超限数の考えこそ欠けていたが，……」と書いています。なお，カントルの手紙から見ると，デデキントはカントルから教わるまでこの書を読んでいなかった形跡があります。

2. デデキント，カントルの集合論の歴史的性格

集合概念の本質は，多くのもの（多者)，特に無限の多者を集合という一つのもの（一者）として扱うことで，これだけなら，一般名詞を用いる言語とともに始まるといってよいほど古いことです。ただし数学では，『原論』の偶数奇数の理論もその一例ですが，もっと意味ある段階となるとガウスの剰余類あたりで，デデキントの新しさは，そこに一般的な「任意の集合」を採り入れたところでしょう。

このことの典型的な例はデデキントの無理数論 (1872) です。彼は有理数の全体を（例えば $\sqrt{2}$ より大の）上組 A，（それより小の）下組 B という二つの無限集合に分け，無限集合 A, B を元とする順序対（これも集合概念で表現できる）として「実数」を定義しました。A, B の具体的な分け方に立ち入らず，素知らぬ顔で任意一般の上組，下組の分割で押し通したところが味噌です。同じ年にカントル

[1)] 自然数を n で割った剰余によって分類した，自然数の n 個の組

もメレ (Méray，1835–1911) も（有理数のコーシー列を「実数」とする）同等の理論を発表しており，そこにはワイヤシュトラスの影響があるのですが，時代がそこまで来ていたという面も無視できないでしょう。

一方，彼らの集合論，特にカントルのものには論理と深いつながりをもつ集合算はあまり見られません。これはブール (Boole，1815–64) に始まると言ってよいでしょう。他方，集合に演算や関係を付与した「構造の与えられた集合」という考え（20 世紀のブルバキ）の発端は，自然数，実数から，体，束，イデアルなどまでを導入したデデキントでしょう。現代数学におけるブルバキ的「構造」の思想——発見と整理の手段としての広義のアナロジー——は，20 世紀前半の数学界を席巻した観があります。

これに対して正真正銘カントルの仕事と言えるのは，点集合論と超限順序数，超限基数（濃度）の議論とですが，後者は数学基礎論の主題ではあっても，現代数学の主流からはやや離れており，一番影響の大きいのは点集合論の方でしょう。次節ではこれらのことの形成の様子を見て行きます。

余談ですが，『原論』の数学的世界は，今から見れば問題があるにせよ，ともかくミクロコスモスを作っていました。しかし現代数学が同様の調和ある小宇宙を作っていると言えるでしょうか。私はそうは思いません。『原論』の形成はギリシア数学史の中で見ても 1 世紀前後はかかっており，その素材となったメソポタミアの数学的知識まで考慮すると何世紀もかかった成果ですが，私は現代はまだ『原論』形成期に比せられる段階ではないかと思っています。現に 20 世紀後半になるとブルバキ的数学は停滞し，それまでの応用・純粋の枠に縛られない様々の「応用数学」が台頭してきました。コンピューター科学はその筆頭ですが，カタストロフィー，カオス，フラクタルなどもその例です。

ともかく現代数学についてこのように突き放した見方をすることは，現場の数学者にとっても時には必要なことではないでしょうか。私が初めに，数学史家の仕事は数学者の仕事と相補うものでありたいと言った背景には，数学の動きを大局的に見るというこうした含みがあったのです。

3．カントルにおける集合論形成の分析——微視的な見方——

3-1).「三角級数論の一定理の拡張」(1872)

カントル (Georg Cantor, 1845–1918) は 1845 年ロシアに生まれたユダヤ系ドイツ人で，チューリッヒ大学とベルリン大学で学びました。学士論文，博士論文はいずれも数論関係ですが，そこには深い哲学的関心も現れています（村田全「カントルにおける数学と哲学」)。1870–72 年頃，先輩ハイネ (Heine) の勧めで三角級数の収束性に関する或る結果を得た後，収束する三角級数の一意性の定理，

「二つの三角級数:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2}b'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \sin nx + b'_n \cos nx)$$

が或る区間で共に収束し，かつ一致する場合，両者の対応する係数 a_n と a'_n，b_n と b'_n はそれぞれ互いに一致する」

ことを証明します (1870)。次いでこの条件を少しゆるめ，収束性の破れる例外点が有限個あっても同じ定理が成立することを示し，更に一歩進めて，例外点が無数にあっても，その散らばり具合がバラバラ——その正確な意味は問題で，それが彼の点集合論に繋がるのですが——であればよい場合のあることにまで到達します。これが 1872 年の有名な論文「三角級数論の一定理の拡張」，（以下「拡張」と略）での結果です。

彼はそのために先ず，デデキントのとは別に（有理数のコーシー列を「実数」とする）無理数論を創ることから始めるのですが，それはこの定理の証明に都合よいものになっています（村田全「数学における無限と有限の弁証法」補説 1)。そしてこれら例外点の集合は，許される集合の範囲を広げる方向で進められ，集積点，導集合，孤立点，孤立集合などの概念がどんどん導入され（本論補説 2)，ここに点集合論が誕生することになります。

ここでこの論文での「集合」を表す術語について注意します。それはこの種の吟味が当時の彼の考えの状況を推測する一助となるからです（第 1 表)。

先ず ‘Gesamtheit’（原義は「全体」）は術語というより日常語で，術語を呼び出すのに使われます。つまりメタ言語です。

次に実数ののっぺらぼうな集まりは ‘Gebiet’（原義は「範囲」「領域」）と呼ばれ，バラバラな例外点の集まりは ‘Menge’（原義は「多数」「群衆」）と呼ばれて

第 1 表　「拡張」における述語の使用

	Gesamtheit	Gebiet(I)	Gebiet(II)	Punktmenge	Wertmenge	Menge	Anzahl
序	0	0	0	0	0	0	2
§1	1	20	0	0	0	0	2
§2	0	3	2	20	2	11	7
§3	0	0	6	6	0	11	6

区別されています。第 1 表はそれらが各節で使われた回数ですが，これから見ると，‘Gebiet(I)’ は実数の区間のような「領域」を指すもので，解析学からの流用でしょうか。これに反して，§2 に現れる ‘Gebiet(II)’ は「一定の種類の点集合全体の領域」，「考えられる限りの点集合全体の領域」という形で使われたもので，それはさしあたって彼の研究対象ではありません。（そういえば ‘Gebiet(I)’ も，当面の研究対象たる例外点の集合 (Menge) の置かれる舞台のようなもので，結局，これらは今日の「普遍集合」(universe)（対象範囲全体）の一種であるようです。）

他方，‘Menge’ は「拡張」の §2 以後に現れ，当面の研究対象を表す術語で，‘Gebiet’ がいわば固有名詞的に，空集合や普遍集合のような「定集合」(constant set) を示すのに対して，「可変集合」(variable set) を表しているようです。ただしこの定集合，可変集合の区別は今日の基礎論で使われるもので，カントルにその考えがあったというのではありません。

いずれにせよ，‘Gebiet’ と ‘Menge’ が共に無限集合であるという意識は，少なくともカントルの論文の字面からはまだ読みとれません。

3-2).「代数的実数全体の一性質」(1874)

この論文（「性質」と略）では，代数的実数［整数係数の代数方程式の根になる実数］全体が可算であること，実数全体がどんな可算集合によっても尽くされないことの二つを証明して，超越数［代数的数以外の数」が確かに（実は無限に多く）存在することを明らかにします。可算性の証明には自然数全体との一対一対応が使われ（村田全「数学における無限と有限の弁証法」補説 2 参照），実数の非可算性の証明にはコーシー列による「実数」の定義が使われ，可算，非可算の比較から超越数の存在を間接に示すのは典型的な集合論の論法ですから，集合論の役者は揃ったも同然ですが，実は直ぐ示すように，カントルは一般的な集合概念自身をまだ確立していなかった形跡があります。なお実数の非可算性について

の対角線論法は 1890–91 年まで現れません。

この時代は，自然対数の底 e の超越性の証明（エルミット）がその前年，π についての証明（リンデマン）は 1882 年まで現れないという時代，カントルが個々の数の議論でなく，集合論的論法を創案して超越数が無数に存在することを一挙に証明したのは破天荒なことです。しかし具体性の欠如のため当時の大先生たち，特に「自然数は神の創りたもうたところ」のクロネッカーの批判を招き，その批判は以後カントルを悩ませることになります。

第 2 表　「性質」における述語の使用

	Gesamtheit	Inbegriff
序	2	6
§1	0	3
§2	0	4

術語についての考察はここでも示唆的です（第 2 表）。‘Gesamtheit’ は前と同様メタ言語ですが，前に ‘Gebiet’ と呼ばれていた実数全体や代数的数の全体などはすべて ‘lnbegriff’（内包的全体）となり，今回はそれが研究対象になっているのです。つまり「拡張」の対象は ‘Menge’，「性質」の対象は ‘Inbegriff’ なのですが，後者はおそらくボルツァーノの『無限の逆説』(1851) の影響でしょう。この人は有限と無限を問わず，まとまりがあって一者と見られる多者を ‘Inbegriff’ と呼び，同じ要素からできていても「割れたコップのように要素の配列が問題になっていない」ような Inbegriff を特に ‘Menge’ と呼びました。この解釈は今考えている例とよく合うように思います。

さて「性質」ではまだ濃度の概念は現れません。あるのは「実数の全体は代数的数の全体では決して尽くせない」という否定的な結果だけです。そもそも「無限」とは，限りの「ない」こと，つまり否定的概念です。これをあえて肯定的，実在的に転換するか否かは，無限に対する人間精神の姿勢における決定的な違いですが，この重大な一歩は次の論文において踏み出されます。

3-3).「集合論への一寄与」(1878)

カントルが無限集合の一般的理論を創る意図を表明したのは，1878 年の論文「集合論 (Mannigfaltigkeitslehre) への一寄与」（「寄与」と略）においてです。彼はここで，1872 年の Menge，1874 年の Inbegriff（1872 年では Gebiet と呼ばれたもの）

を初め，デデキントの「有限次（代数的）数体」(endlicher Körper) などをも含む一般概念の名称として ‘Mannigfaltigkeit’（集合）を採用し，その基本的属性として「濃度」(Machtigkeit) を導入します。これがリーマンの『幾何学の基礎をなす仮説について』に影響されたものであることは（カントルはその前後にこの書名を引用しているなど）諸般の事情から確実ですが，少し想像を逞しくすれば，カントルはリーマンが ‘Mannigfaltigkeit’（多様体）に計量 (Messung) を入れたことに倣って，「濃度」を ‘Mannigfaltigkeit’（集合）に与えた一種の計量と考えていたと見ることもできましょう。更にリーマンは，カントが『純粋理性批判』で，時間空間における直観の内容の「多様性」(Mannigfaltigkeit) から自然認識の説明を始めていることに影響されて，その空間論たる多様体論を展開したと推測することもできるかもしれません。なお，現在用いられる「集合論」(Mengenlehre) という名は 1879 年以後，Mannigfaltigkeitslehre の「略称」として用いられたもので，カントルはその後も折に触れてその古い名称を使っています。

さてカントルはこのようにして集合に濃度を付与し，可算濃度と連続体濃度とを分かつのですが，デデキント宛の書簡から見ると，カントルは当初，直線，平面，立体的空間……，の順で濃度が上がって行くと考えていたようで，それが全て連続体濃度に帰着するというのがこの論文の主要な結果です。彼はここで，古典的な「次元」の概念はその意味を失ったと考え，大変興奮したことがデデキント宛の書簡に残っています。ところがここで驚くのは，この手紙の数日後のデデキントの返事です。彼はカントルに「貴君の証明は誤っていません。ただ，貴君が直線と平面との間に用いた一対一対応は連続性が欠けています。それにしてもそれは驚くべき事実ですが，一対一両連続な対応（今日の位相変換）の下であれば，次元の消滅は起こらないのではないでしょうか」という意味のことを書き送ります。デデキント自身同様のことを以前から考えてはいたらしいのですが，それにしてもこの洞察も驚くべきことです。カントルはこの論文に引き続いて，位相的対応の下での次元の不変性の証明を試みますが (1879)，それは完全でなく，後にブロウエルがはじめてそれに成功します (1910)。

やがてカントルの終生の課題になる連続体問題と連続体仮説は，このようにして「寄与」の中で提起されます。ただしさしあたっての形は，連続体の可算部分

集合の全体という「極度に彪大広範な Gebiet」の中に，可算濃度とも連続体濃度とも違う濃度はいくつくらいあるか（連続体問題），そんな中間の濃度はなく連続体濃度は可算濃度の直後の濃度なのであろう（連続体仮説）という限られたものでした。これらの濃度を遥かに超える濃度を念頭に置いて，連続体濃度が何番目の濃度かとなるのは次の論文の途中からです。実際，このときカントルは何次元の「空間」の濃度も 1 次元連続体の濃度に帰着することを知ったばかりですから，連続体濃度を遥かに超える巨大な濃度の集合を考慮する余地はなかったのでしょう。実は上の術語 ‘Gebiet’ の出現はこの論文ではこの一回切りで，それが「拡張」（第 1 表）における ‘Gebiet II’ と同様の意味であるのは，ちょっと面白いことです。

そもそも「連続とは何か」は独りカントルに止まらず，数学と哲学の中心問題であり多くの形がありうるわけですが，彼の関心はこれ以後この「連続体問題」に集約され，その後の彼の仕事の推進力になって行きます。

3-4).「無限線状点集合について (1)–(6)」(1879-84)

この ‘無限線状’ という標題は正に連続体問題を予想させるもので，カントルも初めはそのつもりだったのでしょう。しかし六年にわたる執筆期間の間に考えは次第に変化し，彼の仕事の精髄 (Quintessenz) と呼ばれるようになり，その数学と哲学の接点を見るときの鍵になるものとなりました[1)]。

第 1 部 (1879) では連続体問題をいかに攻めるかについて，1872 年に導入した導集合による分類を発展させる方針が説明されます。

第 2 部 (1880) では n 次導集合の考えを「無限を超えて」延長しようとします。その当面の目的は，それによって（「拡張」以来の）例外点の集合の或るものを特徴付けることでしたが，次数を示す肩付きの無限記号がやがて超限順序数という「数」になるわけです。

なお，空集合を表す記号 0（現在では ϕ）はここで初めて導入されます。それ以前は「元の消滅，元の不在」などと言っています。空集合を論理的に使用すると，集合論の展開に便利な点が間々あるのですが，カントルはそれを用いず，むしろその集合論から数 0 を極力排除しようとしています。そう言えばデデキントも『数とは何か』の中で，彼の「集合」(System) について，「空な集合を考えるのには利点もあるが，ここではそうしない」という意味のことを書いています。0

1) ただし（村田全「カントルにおける数学と哲学」）で詳説しますので，大筋を示すだけにします。

のないギリシア的な数概念の名残でしょうか。

第 3 部 (1882) では集合について，次章で示す第一段の飛躍が起こります。

第 4 部 (1883 春) では濃度だけで事が済まぬと悟ってか，長さや面積などの測度の考察が加わり，後の被覆定理（ジョルダン，ボレル）や積分論（ジョルダン，ルベーグ）を先駆しますが，カントルの狙いは常に連続体問題です。

第 5 部（1883 秋）は 16 節，40 ページに余る長い論文で，雑誌の掲載の遅れを待ちきれず，『一般集合論の基礎』という広い標題の下で別に自費出版しています。彼は明言していませんが，方針はここで一変して，自然数の列を超限的に延長して数を（定冠詞付で）「実在的整数」(die realen ganzen Zahlen)（実数は die reellen Zahlen）と名付け，実質的に今日の第 2，第 3 級以下の超限順序数を創ろうとします（詳細は，村田全「カントルにおける数学と哲学」参照)。それによって連続体の点を数え上げようという姿勢ですが，それは第 3 級順序数の具体的探索の途中の §14 で終わり，最後の論文「超限集合論の基礎付け (2)」(1897) に引き継がれます。なおカントルの有名な言葉「数学の本質はその自由性にある」はこの論文の §8 に現れます。

最後の第 6 部 (1884) では順序数の議論は一旦棚上げされ，第 4 部までの線に戻って点集合の構造の細かい分析に入りますが，最後に「無限線状の閉集合は可算濃度または連続体濃度を持つ」こと，すなわち，もし「集合」がすべて閉集合だけであれば連続体仮説は肯定されることを確かめた後，「この定理が線状の閉集合に限らず，n 次元点集合のどれにも妥当することはこの続編で示す」旨のことを書きます。しかしそれは所詮できないことでした。

3-5). その後の論文

この後の重要な論文というと，先ず「集合論 (Mannigfaltigkeitslehre) の基本的問題」(1890–91) で，対角線論法がここで出現します。これは，「性質」での濃度上昇の「証明」の「別証明」とされていますが，$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} (= \aleph)$ の他に $\aleph < 2^{\aleph}$ の証明も示されていて，巾（べき）集合による濃度上昇の議論の第一歩であり，今から見ると，この両証明をどう繋くかが連続体問題の核心です。

この他にも二三の注目すべき論文がありますが，それは次章で説明します。

最後は「超限集合論 (Mengenlehre) の基礎付け」で，第 1 部 (§§1–11) は 1895 年，

第 2 部 (§§12–20) は 1897 年の発表。これ以後の論文の発表はありません。これはカントルのもっとも体系的な論文で，従来の論文の哲学的な部分にかなり批判があったためか哲学的色彩は払拭され，更に点集合や測度の議論は省かれていますが，創造的なおもしろさは減っていましょう。また記述形式にはデデキントの影響があるようです。

第 1 部は濃度つまり超限基数と順序型との一般論，第 2 部は整列集合の順序型である超限順序数の理論で，「無限線状点集合」の議論の多少の前進ですが，勿論，完結はしません。これについては『カントル超限集合論』（訳，解説　功力金二郎，村田全，共立出版）を参照して下さい。

4. 結び

拙著「カントルにおける数学と哲学」で示すように，カントルは集合論に自然哲学的役割を持たせ，それによって独特のというか一種奇妙な自然哲学を構想します。というよりも，彼においてはそれも集合論建設の陰の力だったかとさえ思われるものです。実は数学に形而上学的役割を持たせるのは，ピュタゴラスに始まり，中世・近世のヨーロッパに継承された西欧思想の一つの思想的伝統ですが，カントルの集合論の底にはそれがやや風変わりな形で見られるのです。現在世間で想像されているイメージとはほど遠い話ですが，これもまた彼の仕事を微視的に見たときの実像です。そしてニュートンを古代以来「最後の魔術師」とした経済学者ケインズをまねれば，カントルは結局，中世以来の「形而上学的数学者」の系譜の中で，おそらく最後の人物であろうと思います。

以上，精粗相伴わぬ素描になりましたが，3 節で示した微視的な考察は，同じく微視的な（村田全「カントルにおける数学と哲学」）（彼の自然哲学の検討）と併せ見るとき，少しオーバーに言えば，将来に残されているかもしれない哲学的可能性によって，あるいは歴史の巨視的視野を左右することさえあるかもしれません。

補説 1. 剰余類

自然数が素数の積として一意的に表されることを初等整数論の基本定理と呼びますが，ガウスは複素整数 $a \pm bi$（a，b は自然数）の整数論でもその「基本定理」の証明に成功しました。ただしそのためには単位を ± 1，$\pm i$ とし，「素数」の意味

を拡張せねばなりません。まず全ての整数の因数である単位 ($\pm$1,$\pm\, i$) を「単数」と呼び，比が単数であるような整数を「同伴数」と呼ぶとき，同伴数の介在を許すならば，複素整数には基本定理がなりたつのです。例えば自然数では 2 は素数ですが，$2 = (1+i)(1-i) = i(1-i)^2 = -i(i+i)^2$ で，2 はもはや素数ではありません。しかし $(1+i)/(1-i) = i$ なので，同伴数を認めた上でのこの分解は一意的です。

ところが整数係数で最高次係数が 1 である代数方程式の根を代数的整数と呼んで，これに関する整数論を企てると, 早速厄介な事情が生じます。例えば $x^2-2x+6=0$ の根 $1\pm\sqrt{-5}$ は代数的整数ですが，$a+b\sqrt{-5}$（a，b は整数）の形式の範囲で 6 を因数分解すると，$6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ となって，これらは同伴数の違いというわけにゆきません，すなわち代数的整数の範囲でという以前に，すでに「二次体 $K(\sqrt{-5})$」すなわち $a+b\sqrt{-5}$ の範囲で素因数分解の一意性がやぶれてしまうのです。

しかしこの素因数分解は整数論において本質的なので，クンマーは実際にはありえない「理想数 (ideale Zahl)」という仮の対象を持ち込んで分解の一意性を守ろうとしました。しかしそれを数学の理論としてなじませるのは，二次体の整数論の範囲で考えても無理な話でした。これを克服したのがデデキントで，彼は整数の集合である「イデアル (Ideal)」を持ち込むことによってそのことに成功したのです。

整数（二次体の整数でも代数的整数でも）の集合 I は，(1)I に属する二元 α，β の和または差が I に属する，(2)I に属する α の任意倍数 $n\alpha$ は I に属する，という二つの性質をもつ場合，イデアルと呼ばれます。自然整数の場合は剰余類と一致しますが，上記の $K(\sqrt{-5})$ をはじめ，二次体の整数論でも「単数」,「倍数」などの様相が複雑になるため，倍数などを考えるに当たっては集合で考える方が考えやすいのです。（現に $K(\sqrt{-5})$ のイデアルでは，その全ての元が或る単一の元の倍数であるとは必ずしも言えません。）

もちろん（自然整数の）初等整数論でも剰余類による取り扱いはできることで，ガウス自身その考えの下で事を運んでおり，結局，現代数学はガウスに始まるということも十分言えるわけです。

補説 2. 集積点・導集合・孤立点・孤立集合

点 p が点集合 X の集積点であるとは，p が X の元であるなしにかかわらず，そのどんな近くにも（ε 近傍）X の点が無数に集まる場合のことです。実軸上の有理点全体を X_1 とすれば，有理点も無理点も X_1 の集積点ですが，

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots\right\}$$

を X_2，

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots, 0\right\}$$

を X_3 とすれば，そのどちらに対しても集積点 p は一点 0 だけです。

X の集積点の全体を X の導集合と呼び，X' または $X^{(1)}$ と書くと，X_1' は実数全体，X_2'，X_3' は共に 0 だけからなる集合 $\{0\}$ です。導集合の導集合を X の第 2 次導集合 $X''(=X^{(2)})$ と呼び，以下，n 次導集合 $X^{(n)}$ と続けられます。$X_1''=X_1^{(3)}=\cdots\cdots$ は全て実数全体，$X_2'', X_2^{(3)}, X_3'', X_3^{(3)}$ 以下は全て空集合です。X'' の近くには X' の点があり，従って X の点もそこに集積しますから，X'' の点は必ず X' に属します（X'' は X' の部分集合：$X' \supset X''$）。同様にして一般に X' 以下の導集合は順次その前の導集合の部分集合になります。（1883 年に，$X \supset X'$ である X は閉集合と名付けられますが，この用語を使えば「導集合は全て閉集合」ということになります。）

X の点で集積点以外のものを孤立点，孤立点だけからなる集合を孤立集合と呼びますが，上の例では X_2 のみが孤立集合で，X_3 は集積点 0 を含むため孤立集合ではありません。

（原型 1989）

PDF 化にあたって

本 PDF は，

村田　全『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）

を元に作成したものである。

村田全先生のその他の著述は

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs

を御覧いただくか，書き込みください。