カントルにおける数学と哲学

村田　全

本稿は本書〔『数学と哲学との間』(玉川学園出版部，1998 年 12 月)〕のうち唯一の書き下ろしである。実は当初，十余年前に或る書物のために書いていながら，共著者の都合で延び延びになっていた草稿をここに当てるつもりだったが，今となると不満な点が多く全面的に書き直したものである。ただしカントルのその後の論文「超限論報告 (Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten;1887-88)」の検討を略し，またライプニッツの吟味も著しく不足なので，それは将来の課題とした。

カントルは哲学的あるいは形而上学的傾向を多分に持った哲学者である。彼は集合論——点集合論と超限集合論——の創始を介して，デデキントとともに現代数学に根底的な影響を残したが，二人の関心の間には微妙な差がある。デデキントが離散的な自然数論に集約される方向に進んだのに対し，カントルの根本問題は「連続とは何か」であり，点集合論はもとより超限集合論もそのために創られており，哲学もまたこの問題につながっている。

正直にいって，カントルの哲学上の業績は数学的業績に比べてむしろ些末である。彼は古今の多くの哲学的文献を渉猟し，集合論によって一元論と多元論，概念論と経験論の止揚を図ったもののようだが，結局，体系をなさぬ一種の折衷論に止まり，しかも最後は幻想的な自然哲学の構想で終わっている。その結果，当然といえば当然ながら，生前の彼の同情者たちも「彼の数学はよいが哲学は頂けない」という意見が支配的であった。しかし私はカントルの仕事を一度，全人的な角度から考えてみたいと思ったので，カントルにおける超限数論の成立——これは一応，哲学と独立に説明できる——と，この概念をめぐる彼の哲学的想念について，新しい角度から展望してみた。その大筋は次の通りである。

数学者カントルにとって超限集合論は最後の到達点と見てよいが，哲学者カントルにとってそれはそれに拠ってスピノーザの『エチカ』に独自の解釈を与え，その延長上でライプニッツの『モナドロジィ（単子論)』を踏まえた一つの自然哲学の構想を促したものだったようで，彼の自然哲学がいかに幻想的で荒唐無稽であっても，ライプニッツに到る完結した環を形づくるべきものだったようである。(ルネサンスのブルーノ (G. Bruno，1548–1600) の自然哲学も「幻想的」だが，この人はスピノーザの汎神論，ライプニッツの単子論の先駆者として知られている。)

いずれにせよ，カントルの哲学的関心は若い頃から晩年まで一貫している上，それはしばしば集合論の創造と内的に絡んで現れる。その様子は，既成の数学や物理学に安住していない反逆的な創造的精神の著しい例として，今日のわれわれにとって何か学ぶところがあるように思われる。

1. 二つの学位論文

カントル (1845–1918) の哲学的関心は，二次の不定方程式に関する学士論文 (1867)，三元二次形式の変換に関する博士論文 (1970) の各々に添えられた三つのテーゼに既に顕著に現れている。それらは学位審査の際に試問される用意のある主題として挙げられたものだが，それらが論文の主題と直接に関係しないテーマであり，かえって後の彼の哲学的議論と深く繋がっているのは示唆的である。

学士論文 (Dissertation) は数論の論文（二次の不定方程式）だが，テーゼは次の三つである。

(D–1)　数論においては純数論的な方法が解析的方法より遥かに優れている。

(D–2)　空間，時間の実在性が絶対的か否かは，この間の論争的性質そのもののために判定できない。

(D–3)　数学的事項においては，問題を提起する術の方がそれを解く術よりずっと実り豊かである。

カントルの伝記を書いたフレンケルは集合論の建設を (D–3) の実現だとしたが (『カントル論文集』付録)，(D–2) も後の時間空間論の予告と言える。

博士論文 (Habilitationsschrift) の三つは更に重要である。

(H–1)　芸術によってと同様に，文字によっても精神を喜ばせうる。

(H–2)　スピノーザは，万物における真の規範，規則が人間に発見されうるための力を数学に帰したが（『エチカ』第 1 部，命題 36 付録），それは正しい。

(H–3)　諸整数を，また同様の仕方で諸天体を，いくつかの規定と関係によって構成された何らかの全体にまとめること。

(H–1) の真意はよく分からないが，(H–2) は，後に彼が無限に関連してスピノーザやライプニッツを論じたのが，ただの思いつきなどでないことを示す。(H–3) はピュタゴラス的な数の哲学を思わせる。なお，スピノーザや『エチカ』については補説 4 を見て頂きたいが，(H–2) に言う「付録」は「第 1 部　神について」の

付録で，命題36とは関係ない。それは，彼の汎神論——神は必然的存在たる無限者であり，精神も物体も一切は神の本性の現れである——の理解を妨げる「偏見」を吟味し，それによって汎神論を支えようとする意図に出たものである。後に示すカントルの幻想的自然哲学の根の深さを示唆する。なお，カントルの書いているような文言は，内容こそスピノーザの思想と矛盾しないものの，『エチカ』には見当たらない。

2．初期の集合論の三論文

「三角級数論の一定理の拡張」（1872; 以下「拡張」と略）は，三角級数展開の一意性に関する解析学の論文で，ツェルメロ編『カントル論文集』(Gesammelte Abhandlungen G. Cantors，以下『論文集』）でも「解析学」の部に分類されている。n 次導集合 (abgeleitete Punktmenge) と（有理数の基本列に基づく）無理数論とがその道具立てとして現れる。n 次導集合は後の点集合論の発端であるとともに超限順序数の原型である。

「代数的実数全体の一性質」（1874;「性質」と略）は，超越数の存在に関する本来は数論の論文だが，『論文集』では「集合論」の部の初めに分類されている。それは，代数的実数の「全体」と実数の集合との濃度を比べて超越数の存在を導くという集合論的論法が，ここで初めて登場するためである。ただし対角線論法は1890年頃が初出で，ここで用いられるのは上記の無理数の性質（区間縮小法的な議論) である。

「集合論 (Mannigfaltigkeitslehre) への一寄与」（1878;「寄与」と略）では，それまで見られなかった集合の一般的理論建設の意図が初めて明白になる。これにはデデキントの影響があったかもしれない。（デデキントはそれ以前に或る集合論 (Systemenlehre) を考えていた。）そして一対一対応に基づく濃度概念の導入と空間の次元の数学化の試みが現れ，さらに連続体の部分集合の中に可算でも連続体でもない第3，第4の濃度があるかという「連続体問題」，それはないであろうと言う「連続体仮説」の最初の形が提示される。

3．論文「無限線状点集合について　第1部—第6部」

論文 (Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten「無限線状」と略) (1879–

84) の目標は「連続とは何か」を数学的に，次いで哲学的にも解明することである。これは従来あまり解説されていないので少し詳しく書く。

線状点集合（lineare Punktmannigfaltigkeit または lineare Punktmenge) とは，幾何学的ないし数論的な点の集合で直線またはその部分線分と一対一に対応するものを言う。標題が複数形 (Punktmannigfaltigkeiten) なのは連続体問題を念頭に置いてのことであろう。第 5 部ではより抽象的な集合の理論が建設されるが，その目標も連続体問題であり，かつ哲学的な連続論への関心があらわになる。第 6 部の最後で連続体問題への一歩前進と将来の見通しが語られるが，この論文は未完のままそこで終わる。

3-1. 超限集合論の出現まで（第 1 部—第 4 部）

3-1-1. 第 1 部 (1879)

この第 1 部では，「連続」を分類するのに導集合による点集合の分類を利用する方針が宣言される。（この考えはイタリアのディニ (Dini) の論文 (1878) の刺激による，とある。）即ち集合 X の或る n 次導集合 $X^{(n)}$ が空になる場合と，どの n に対しても空にならない場合を分ち，後者の例として或る区間 I で「到る所稠密 (überall-dicht) な集合」［その導集合が I を包む集合］が導入される。また「到る所非稠密 (nicht überall-dicht) な集合」［どの小区間内の部分にも，それに含まれぬ小開区間の孔がある集合;「疎集合」ともいう］が導入され，これはやがて疎な完全集合の発見につながる。

3-1-2. 第 2 部 (1880)

翌年の第 2 部では，どの n に対しても導集合 $X^{(n)}$ が空でない場合の延長として，次数 n が有限値を超えて拡大される。集合族 $X = \{P, Q, R, \cdots\}$ に対する和集合 $\mathfrak{M}(P, Q, R, \cdots)$，共通部分 $\mathfrak{D}(P, Q, R, \cdots)$ などの演算がそのために用いられるが，これはデデキントの記号である。ただしこれはやがて使われなくなるので，以下，$\mathfrak{M}$ の代わりに現行の $\cup$，$\mathfrak{D}$ の代わりに $\cap$ を用いる。これは当時におけるデデキントの影響の現れである。

P の導集合 $P', P'', P^{(3)}, \cdots$ はどれも，自らの導集合を包む集合（閉集合の名はずっと後に現れる）だが，P' は必ずしも P の部分集合でなく，また P は必ずしも P' の部分集合でない。これは，一般の集合 P は必ずしも閉集合ではないとい

うだけのことだが，P と P' の間のこのわずかな（？）食い違いこそ，やがて連続体問題のつまずきの石になるものである。なお，カントルは「空集合」を集合の中に入れない。

今，元を

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

の順に並べた全順序集合を X_1，その順序型を ω と書き，別に α 次導集合 $P^{(\alpha)} \neq 0$, $P^{(\alpha+1)} = 0$ のとき，P を α 階の集合と呼ぶことにする (0 は空集合)。X_1 は 1 階の集合，X_1 の各隙間に ω 型の点列を挿入した X_2 は（1 次導集合が ω，2 次導集合が $\{0\}$ だから）2 階の集合，この隙間に ω 型を挿入した X_3 が 3 階の集合である。n を ω に延長するには，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ を ω 型に並べた形 Y でよい。これらの構成には演算 $\mathfrak{M} = \cup X_n$ が使われ，$Y^{(\omega)}$ は演算 $\mathfrak{D}(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \cdots, Y^{(n)}, \cdots) = \cap Y^{(n)}$ で得られる。カントルは $P^{(\alpha)}$ の次数 α として，

$$\omega^{\omega}n, \omega^{\omega+1}, \omega^{\omega+n}, \omega^{\omega n}, \omega^{\omega^n}, \omega^{\omega^\omega},$$

などを挙げている。読者は試みに，このおのおのを次数とする P を作ってみられるとよい。カントルはこれらの点集合の形を知っていたのである。驚くべき創意である。

おもしろいのは，彼がそれらの導集合の列を「どこまでも続けられる弁証法的概念生成 (eine dialektische Begriffserzeugung) であり，それは何らの任意性なしに自らの中で必然的かつ矛盾なく進行する」と言っていることである。「弁証法的生成」の具体的意味は推測する他ないが，第 5 部での展開を含めて考えると，有限次導集合 $P^{(n)}$ の導入（定立)，指数 n に終わりのないことの認識（反立)，その総合としての $P^{(\omega)}$ の導入（止揚)，しかもその $P^{(\omega)}$ が事の終わりではなく，相反する性質の演算 $\cup$ と $\cap$ とによって，$P^{(\omega+1)}, \cdots, P^{(\omega^2)}, \cdots$ というふうに新たな点集合の列が必然的に発展してやまぬという類のへーゲル的な「内的必然性」ではなかったか。この種の形而上学的用語はデデキントには見られない。

3-1-3. 第 3 部 (1882)

二年後の第 3 部はカントルの抽象的集合論とその哲学の確立の第一歩である。先ず「線状点集合」という標題にもかかわらず，平面を始め n 次元空間の点集合

も取り込まれ，無限次導集合などもそれに応じて拡大される。それらは「関数の理論への応用が見込まれる上，線状点集合そのものの研究にも新しい視野を与えるから」というのだが，狙いはあくまで「連続」で，視野は極めて抽象的な哲学的問題にまで及んでいる。関数論への応用に言及したのは，大家中ただ一人の理解者，ワイヤシュトラスの示唆によるらしい。

次に濃度については，その用語をシュタイナーの射影的対応から採ったとした後，集合に本来的に付属する「契機」(Moment) として，点の集合のみでなく，対象が「定義明確」(wohldefinit) でさえあれば，それはどんな概念領域の対象の集合にも考えられるとする。これは抽象的集合論の自立である。文中の契機はヘーゲル的な意味の内在的であろうか。それならば集合論の形成を弁証法的生成過程と見て，そこに内在する必然的な動因の意味にとれる。実際，彼はここでもまた「高次導集合は必然的な弁証法によって生ずる」と繰り返すが，その次数はまだ「無限の記号」で「数」とは認められていない。約一年後に導入される超限順序数は，これが「実在的整数」として認知されたものである。

一方,「定義明確な集合」とは，或る対象領域の各メンバーがその集合に属するか否かが，その集合の定義そのものから「排中律によって内在的に」決定されることを指す。例えば或る実数 a が超越数か否かは未解決でも，a は「内在的」にそのいずれかだから，超越数の集合を考える妨げにはならないという類の，論理的判断に超経験性を認める立場である。「定義明確」(wohldefinit) という用語は後のツェルメロの公理的集合論に引き継がれる。

これに続く彼の付記は更に面白い。曰く

> 「上の意味での集合論は，数学だけに注目して他の概念領域はしばらく度外視しても，数論，関数論，幾何学等を包括する。集合論はこれらを濃度の概念に基づいて，それらをより高い統一体へと取りまとめる。そして不連続者も連続者もこの同一の見地から考察され，共通の測度 (Maß) をもって測られる。」

ここで「他の概念領域」として彼が極めて広大な哲学的領域を考えていたことは第 5 部以後の展開の中で分かる。また「共通の測度」とは濃度のことだが，これはリーマンの思想に対するカントルなりの反響かもしれない。リーマンは『幾

何学の基礎をなす仮説』(1854) の中で，自然数による数え上げ (Zahlung) で定まる離散的多者 (discrete Größe; discrete Mannigfaltigkeit) と，測定 (messen) によって定まる連続的多者 (stetige Mannigfaltigkeit) とを区別しているが，カントルは離散的多者を無限集合 (unendliche Mannigfaltigkeit) の彼方にまで拡大して，その二つを濃度という「量」によって統一しようとしたと見られるからである。濃度は第 5 部において超限順序数の列にはめ込まれ，「集合論の基本的問題」(1890–91) 以後は「超限基数」という数になる。

その半面，濃度と別に長さ，面積などの測度も考慮する必要があることを悟ってか，以後その方面にも探求の歩が進められる。なお，この「共通測度」の存在に関しては約二十年後にフランスのベールが集合論に対する最も根底的な批判をした (1905)（「フランス経験主義の数学思想」補説 2 参照）。

第 3 部では以上の議論の後に，n 次元連続空間の可算分解の試みから，後に弧状連結と呼ばれる考えを導入して，経験的空間の「連続性」について「その物理的ないし自然哲学的意味」の吟味に着手する。数学的空間の可算分解とは「n 次元非有界の連続的空間 A を，境界以外に共有点のない無数の n 次元連続部分空間に分かつとき，その分割部分の集合の濃度は常に可算」という結果で，これは第 6 部で大幅に展開される。

経験的空間の「連続性」とは，例えば「$n \geqq 2$ の場合，A において［有理座標の点のような］到る所稠密な可算集合 M を A から除き去って孔だらけの集合 A^* にしても，A^* の各点はその中の点だけを通る連続弧で繋ぐことができること」である。これは，A^* の二点を通る円弧の濃度が連続体濃度をもつから，可算集合 M の点は迂回できるというだけのことだが，面白いのはこれに続くこの考察の ‘物理的ないし自然哲学的意味’ の議論で，A^* でも一種の連続運動が可能であることによって経験的空間の「連続性」を吟味しようとするのである。これは学士論文の第二テーゼ（時間・空間のこと）の延長上のことのようだが，ともかくカントルは次のように言う。

> 「現実の世界を「連続」な三次元空間とするのは，そこに生起する種々の形や特に運動を配慮して立てられた仮説である。それは “人間の思考の産物たる三次元の数論的連続体（実は実数の三重対）と経験界の底に横たわる空

間概念との間には，完全な一対一対応がつく” という任意性のある仮説であり，この仮説に内在的な強制力はない。それは “非連続”(unstetig)［実は非完備］な三次元空間でありながら，その任意の二点をその空間内の連続曲線で結ぶことができ，ひいては連続的運動の可能な空間，例えば A^* などがあるからである。そこで運動の「連続性」の説明に空間の連続性を直ちに持ち出すわけには行かない。むしろこのような考慮の下での力学の研究があってよい……」

カントルが抽象的集合論はもとより点集合論についても背後にこうした自然哲学的構想を懐いていたことは，彼の集合論の全体像を歴史の立場から論ずる場合，記憶してよい。その構想は「種々の定理 (2)」(1885) に極端な形で現れるもので (4-2 節参照)，率直にいって，その内容自身はいささか幻想的だが，それはそれとして彼のこの傾向は注目に値するであろう。

そう言えば，デデキントもまた『連続と無理数』(1872) の §3 で，切断によって連続を定義した後，次のように書いている。

「直線のこの性質を承認するのは公理に他ならない。……これによってわれわれは連続性を直線の中に持ち込んで考えうるのである。……もし空間が現実のものとしての存在性をもつとしても，空間が連続である必要は必ずしもない。また，たとえ不連続であっても，われわれが思考の中でその隙間を満たし，それによって連続な空間を作るのには何のさしつかえもない。この隙間の充填(じゅうてん)は新たに「点」という個体を創造することであり，それは上の原理に従って遂行できるであろう。」

カントルの考えはこの影響を受けたのか，それとも独立に時代精神，例えばリーマンの『仮説』にある空間論の影響下にあるのか，ともかくここには数学的存在を人間の創造物とする現代数学の思想の発端が見られる。

3-1-4. 第 4 部（1883 春）

翌年春の第 4 部には第 3 部のような哲学的内容は見られない。連続体濃度の集合 P の導集合 P' を，高々(たかだか)可算個の孤立集合とそれ以外の部分とに分解している点が一歩の前進である。

X が孤立集合とは X のどの元も集積点でない (孤立点である) ことを言う。そこ

で点集合 P を, 集積点でもある部分 $P \cap P'$ とそれを除いた部分 $Q = P - (P \cap P')$ とに分解すると Q は孤立集合である。また P' は閉集合だから $P' - (P' \cap P'') = P' - P''$ も孤立集合，一般に $P^{(n)} - P^{(n-1)}$ も孤立集合なので，P' を

$$\left\{ \begin{array}{l} P' = (P' - P'') + (P'' - p^{(3)}) + \cdots + (p^{(n)} - p^{(n+1)}) + p^{(n+1)} \\ P' = (P' - P'') + (P'' - P^{(3)}) + \cdots + (p^{(n)} - P^{(n+1)}) + \cdots + p^{(\omega)} \end{array} \right. \tag{1}$$

と分解して考える試みで，上式は $P^{(n+1)}$ より後が空になる場合，下の式は項が極限の ω まで残る場合である。カントルはこの種の分解を用いて P' ひいては P の濃度を決定しようとし，第 6 部ではこの分解が超限的に延長されて連続体問題を攻めるのに用いられる。これはまたその自然哲学でも利用される。

次の定理 (I)–(VI) はその最初の結果だが，それは後あとまで続けられ，閉集合の濃度が可算か連続体濃度に限ること（第 6 部）は，この分解の線上で得られる。また同様の分解は後の自然哲学的考察でも或る役割を果たす。

(I)　孤立集合は可算,

(II)　P' が可算ならば，P も可算,

(III)　(1) の上式の場合，P は可算,

(IV)　下式の場合も，$P^{(\omega)}$ が可算ならば，P は可算,

(V)　P が第 2 部の無限記号 α まで延びても，$P^{(\alpha)}$ が可算ならば，P も可算。

以上は P が可算であるための十分条件だが，非可算の場合については，(V) から「P が非可算ならば，$P^{(\alpha)}$ も非可算」と言うのが精一杯で，この場合の吟味は第 6 部 §16（下の 3–3 節）以後になる。最後の定理は,

(VI)　区間 (a,b) 内の線状点集合 P の導集合 P' が可算ならば，P を，有限個の任意に小さい区間によって包むことができる,

である。これはいわゆる被覆定理の先駆けで，一見，本題を外れた問題のように見えるが，P' が可算な集合が，当時の積分理論に現れ始めた「任意の小区間の有限和で包みうる」点集合の例になっていることを示したものである。カントルがここで「共通の測度」である濃度の他に長さなどの「量」(Größe) という測度を導入したことは，彼の連続論において重大な意義をもつ。実際，疎な完全集合 [導集合と一致する集合] は非可算だがその「量」は 0 であり（第 6 部），個数の拡張たる濃度だけでは連続的測定の拡張たる「量」には手が届かぬことが分かっ

たからである。連続体濃度を持ちながら測度は 0 というカントルの「三進集合」［閉区間［0，1] から一連の小開区間

$$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right),\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right),\cdots\cdots$$

を除き去るとき，そこに残る集合］は第 5 部の原注に現れるが，その発見は，直接にはこの考察に発するのであろう。

測度への配慮はゼノンの逆理につながりうるが，カントルはそれに関心を示していない。しかし当時，数学史家 P. タンヌリ（ボレルたちを育てた数学者 J. タンヌリの兄）を始め一部の数学者，哲学者が，集合論によってゼノンの逆理は解決したと即断した例がある。

3-2. 超限順序数論の出現（第 5 部，1883 秋)

半年後の第 5 部は雑誌への寄稿 (*Math. Ann.* Bd. 21) と別に，より広い標題『一般集合論の基礎』(*Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*) の下で個人出版されている (1883)。雑誌への掲載が遅れて我慢ができなかったらしい。第 4 部の数カ月後の 11 月初め，デデキント宛の長い手紙に「とうとう神が囁(ささや)いた」という書き出しでその梗概 (§§1–3) を書き送り，全 15 節を一気に書いたものと言われる（数学者，数学史家のカヴァイエス (Cavail1ès) による）。その記述は体系的でなく哲学的には問題が多いが，彼の集合論の哲学的背景を見るにはもっとも基本的な文献である。一年後に続編第 6 部が発表され，「以下続く」とあったが続編は出ず，後で取り上げる「種々の定理 (2)」がそれに当たると見られるが，それも未完に終わっている。

3-2-1. 超限順序数の導入 (§§1–3)

§1 では全体の構想が示される。自然数を超限的に延長した「実在的 (rea1) 整数」実は超限順序数を定義し，連続体をそれによって「数える」ことになる。元来の連続体問題は「可算濃度と実数連続体の濃度との間に別の濃度があるか」という形だったが，これを現在の形「実数連続体の濃度は何番目の超限濃度か」に変えたのはこの実在的整数の導入による。この数はやがて彼の自然哲学において深い意味を担わされる。なお彼において空集合は集合でなく，従って 0 も実在的整数ではない。

「実在的」の訳は後出の 4–3 節を踏まえたものである。元来。実数 (reelle Zahl)

の‘reell’（フランス語経由らしい）も，この‘real’（実体のある，実在的）も，語源はラテン語の res（もの），realis（物の，事実の）である。この real は観念的 (ideal) に対立する言葉で，中世スコラ哲学の実在論では「普遍者は個物に先立ち」(universalia ante rem)，真実在は普遍者 (universalia) であり個体ではないとした。他方，唯名論では「普遍者は個物の後」(universalia post rem) の形で，普遍者よりも個体の実在性を先立ててそれに対立した。カントルの‘real’がこの歴史をどう踏まえていたかは分からないが，それは確かにプラトンのイデア的存在論につながる実在的である。

§1 に付けられた原注によると，集合論 (Mannigfaltigkeitslehre) は本来，数学より遥かに包括的な新しい「一と多の哲学」であるという。即ち，Mannigfaltigkeit または Menge とは一者 (Eines) と考えうる各々の多者 (jedes Viele)，言い換えれば，一つの法則によって一個の全体 (Ganze) に結びつけられる或る定まった元の全体のことで，「自分はこれによって，プラトンのエイドスやイデアに近い或るもの，あるいは対話篇『ピレーボス』におけるミクトンと似たものを定義しえたと信ずる」と述べている。[エイドスもこの篇にある。岩波版『プラトン全集』総索引参照。] ミクトンとは，プラトンが「ト・アペイロン」(不定，無限界) や「ペラス」(限界) と対置して，両者の「混合者」と説くもので [23D，25B，D]，話が少々壮大すぎる気もするが，この考えはカントルの集合論の哲学の基本線である。

彼はそれらの実在的無限整数を「これなしに集合の理論は一歩も進まない」と言う。そして，解析学でいう無限大，無限小（どんな限界も超えて大または小となる変数）のような「非本来的無限」(Uneigentlich-Unendliches) ではなく，射影幾何や関数論の無限遠点のような存在する無限，「本来的無限者」(Eigentlich-Unendliches) の一種であると言い，しかも無限遠点などと違って，それらの「数」は一系の無限列をなし，有限整数，無限整数の相互の間で数論的関係をもつように定義されると言う。そして「それらの整数は，“本来的無限者の形相と変状（または顕現）に属する (zu den Formen und Affektionen des Eigentlich-Unendlichen)”」(『論文集』p.166)。Affektion は普通は刺激，愛着などの意味だが，この文脈ではスコラ哲学，特にスピノーザの用例に従って解するのがよい。元来，デカルト以降の近世哲学での関心の中心は，「世界における真実在は何か」ということで，デカ

ルトはそれを「実体 (substantia)」と呼び，神，精神，自然の各々をそれとしたが，スピノーザは「実体」を神のみとし，神を本来的無限者，能動的自然 (natura naturans) であるとして，精神も被造物自然 (natura naturata) も神の基本的属性 (attributio) の一つであり，属性が様態的変状 (modificatio) を受けて個々に顕現した状態を affectio とした。彼において世界の窮極の形相（forma，単数）は，無限者にして能動的自然たる神であるが，神の質料（materiae，複数）に当たる用語は見られず，属性ないし変状（顕現）がそれに当たっている。上記のカントルの引用は，博士論文 D–2 も考慮して，この脈絡で考えるのが最も妥当である（補説 4 参照)。

この解読は彼の「絶対者」に関する意見（3–2–2 節）や数理哲学的見解（3–2–3 節）ともよく合致する。私はこれらの点をとって，カントルの超限数論の根底には，若い頃からのスピノーザ解読の試みが底流していたと見るのである。カントルの引用の Formen（複数）は，彼の「実在的無限整数」がスピノーザ本来の単一の形相的無限者ではないことを示すものであろう。実在的無限整数 α の導入の大筋も §1 で示される。それらは，単位 1 の付加と無限列の新しい単位化という二つの「生成原理」と第 3 の「抑制または仕切り原理」(Hemmungs-oder Beschränkungsprinzip) によって規定される。初めの二つは第 2 部で「弁証法的生成」と呼ばれたものの自覚的な表現であり，導集合列の指数として導入された無限記号の実体化である。数学的には整列集合の順序型と定義される。

一方，濃度は第 3 の原理によって超限順序数の列の所々に生じる節目に当たる順序数として，個数 (Anzahl) あるいは後の「超限基数」になり，濃度も超限順序数列の中に吸収される。しかしこの間の理論展開 (§§11–13) には下記の論点先取と絡んで，補説 1 で示すような微妙なずれがある。ここではとりあえず第 3 原理の骨子を要約する。

> 「二つの生成原理の力で，新しい実在的整数の列に現れうる境目はそのつど超越されるが，それに対しては第 3 の抑制または仕切原理がこの無終の形成過程には次々と或る境目を与え，こうして実在的整数の列には自然な区分が得られる。これらを私は ‘数クラス’ と名付ける。」

彼は「数クラス (1)」は有限整数の集合，「数クラス (2)」は ‘或る一定の無限整数

（実は可算順序数）の列' からなる集合であるとし，更に「数クラス (3)」，「数クラス (4)」，…に到るとする。これで見るとカントルはこの時点では，「二つの生成原理」によって**すべての**超限順序数列が得られたものと考えていたようで，これが後に問題を生ずるのである。

他方，定義明確な集合にはそれぞれ一つの濃度が付与され，二つの集合の間に一対一対応がつけば，その濃度は同一と定められる。有限集合は元をどう配列しても同一の個数を持つからその濃度は個数と一致するが，今まで元の個数が論じられたことのない無限集合でも，そこに順序と独立な一定の濃度が与えうるという意味で濃度を個数概念の拡張とするのである。超限順序数の大小は常に比較できるので，それと濃度の間につながりが付けば濃度も常に比較可能となり，ひいては連続体問題も解けるというつもりであろう。

無限集合の最小濃度は数クラス (1) の全体と一対一に対応する集合の濃度つまり可算濃度 ($\aleph_0$) である。次に「ω に始まる実在的整数の各数クラス」は，定義明確な無限集合の濃度の規則的に上昇する列を一意的かつ自然に表現するものになっており，数クラス (2)（第 2 級順序数）の濃度は数クラス (1) の濃度 $\aleph_0$ の直後の第 2 濃度 ($\aleph_1$)，数クラス (3)（第 3 級順序数）から第 3 濃度 ($\aleph_2$)，…と延長され，連続体問題の舞台も超限基数の上とへ大きく飛躍する。以上を明確にするのが §§11–13 だが，そこに問題があるのである。

§2 では超限順序数の基本になる整列集合の概念が明記され，§3 では整列集合の性質に基づいて，超限順序数の加法と乗法が定義される。つまり，実在的無限整数が実際に「数」であることを示そうというわけである。次に数学の哲学の角度から二三の注目すべき点を挙げる。

先ず「無限と有限の本質的区別」として「有限集合はいかに元を並べかえてもその順序型が常に同一だが，無限集合は元の並べ方次第で順序型が様々に変わる」ことが指摘され，「濃度は順序に関係せぬ属性，順序数は整列集合の並べ方で定まる因子であり，無限集合では濃度と順序数の間に或る関係がある」とされるが，その関係が後で触れる論点先取の問題とからんで微妙である。いずれにせよ有限無限のこの区別は，これを真部分集合と対等か否かとしたデデキントの区別と比較すると，いささか我田引水の感なしとしないが，この種の独りよがり的な試論

はこの後も折々現れる。なお，M の順序型は M に一回の抽象を経た結果として $\overline{M}$，その濃度は更に一回の抽象の結果として $\overline{\overline{M}}$ で示される（「超限集合論の基礎付け (1)」1895）。

§3 の冒頭,「整列集合の概念は集合論全体に対して基本的で, 定義明確な各集合が常に整列集合の形に直せることは，最も基本的で普遍妥当的な思考法則 (Denkgesetz) だ」とし,「その証明は後に示すが，先ず整列集合の概念から，有限整数，無限整数の間の基本演算が，直接の内的直観から論証的確実性をもって導かれる様子を示そう」とする。しかし肝心の証明は彼によっては与えられず，後にツェルメロがその証明を与えたとき (1904)，その「証明」の性質を巡って激しい論争が生じ，或る意味ではカントルの集合論を変質させた公理的集合論の誕生を招来した。ツェルメロの証明については章末の補説 2 で解説する。

それらの数の加法，乗法 $\alpha+\beta\alpha\cdot\beta$ の定義によって，

$$\alpha+\beta\neq\beta+\alpha,\qquad \alpha\cdot\beta\neq\beta\cdot\alpha$$

だが

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$$

などが示され，§6 の超限的な偶数，奇数，素数その他の導入に続く。

3-2-2. 集合論の論点先取的性格 (§§4–7)

§4 からはこの無限論の背後にある哲学が示される。第一の論点は，超限順序数が無限大の方向に延長されたのに対し，無限小の方向に「実在的無限小数」導入されないかという問題である。これは今日の超準解析 (non standard analysis) の方向だが，カントルはこの方向への延長は無用とする。「無限小」が，限りなく 0 に近づく有限量を示す変数の形で多くの［物理学的］成果を収めており，下手にそのような数を導入すると逆説や矛盾が生ずる以上，無理にその種の存在を導入する必要なしという。これは数学に対する経験的要素の導入である (次項 (3–2–3) 参照)。

第二の論点は「数学において有限整数以外の対象は真の存在ではない」というアリストテレスの意見（『形而上学』XI–10）への反論の形で，実はクロネッカー的有限主義を批判する。具体的構成にこだわる有限主義は，対象の地平に止まって大きな見通しを欠くと言うのが主旨である。特に無限整数の導入への批判につ

いてはアリストテレスの説に対して，それは「数は有限だから無限でありない」という論点先取（petitio principii；結論を前提に潜りこませること，循環論法）だとして反論する。しかしこう言うならば，カントルの超限数にしても「数には無限がありうるから超限数はある」との論点先取に支えられていると言うべきであろう。

このような二つの「論点先取」のどちらを採るかは，信念の問題として片づけるのでない限り，それぞれの成果如何にかかっていよう。カントルはこの点に触れていないが，§8 で「かつては数と認めるのに問題のあった複素数もその成果によって認知されたように，実在的整数もその自然科学への成果によってやがて認知されるだろう」と述べているのはこのつながりで受け取って良い。実際，彼は例えば連続体濃度を積極的に利用するが，それを支えるのは「連続体は可算集合では尽くせない」という否定的な事実だけである。彼は「しかしそれを‘数える’数もありうる」と開き直って（論点先取 1），初めて事を進めたのである。この辺は彼の後の自然哲学の伏線である。

ともかく，この時期のカントルは集合論の成果に確信をもち，その夢に酔っていたのであろうか，語調は自信に満ちている。しかしその後の多くの吟味を経た上での実際のありようを見ると，集合論を公理論的に厳密に展開する場合，無限集合の存在は「無限公理」として天降りに要請する他に途のないことが分かっている。そしてカントルの発見的だが曖昧性を残す論点先取的理論は，「無限集合の存在」その他，公理の形で先取りされて漸く演繹的な形を獲得し精密な議論の対象になるが，それとともにカントルの変幻自在な理論展開も神通力を失うように見える。

と言うよりも，私はこの**論点先取的論法こそカントルの集合論の本質**だと見ている。それは無限の逆理すれすれの議論だが，それを回避しつつ大きな成果を収めたところに，その意義を認めるのである。ただしこれは，論点先取が悪いと言うのではない。集合論の無限公理だけでなく，例えば絶体的存在者たる「神」を理論的に扱おうとする場合にも，その種の論点先取は不可避であろう。従ってまたその論点先取を共にしない者に対して，それが説得力を失うことは言うまでもない。例えばアンセルムス (1033–1109) やデカルトの「神の存在証明」にしても，

西欧の超越的な神と無縁の伝統に育った私などには，所詮，論点先取以外の何者でもないと思われる（個人的に言えば，私は西欧的な「神」の概念を人間の「創造」した最大のものと考えている。もっと手近なところで，「神」を近代的な「国家」概念で置き換えてもこの議論は或る程度通用するであろう。）

アリストテレスの「論点先取」に関する原注には，プラトンとアリストテレスの無限観が全く違うことを述べた後，プラトン寄りの自分の解釈を支える意見としてニコラウス・クサヌスやその後継者ブルーノにまで言及し，かつそこに自分の集合論の創意を強調している。（なかなかの自己主張！）即ちその人達と自分との本質的な違いは，自分が実在的無限整数の上昇列を数学的に探究したのみでなく，それが自然界に現れる場所を指摘し追求すべきことを初めて問題にしたところにあるという。後出の論文「種々の定理 (2)」（4–2 節）はその実現を目指すもので，その自然哲学の根は深いわけである。

同じ場所で彼はまた「この無際限の列の途上では決して絶対者 (das Absolute) に到達しえないが，……，この絶対的な超限順序数の列は絶対者のための適切なシンボルを与えるはず」と言う。その詳説が後の「種々の立場」（4–3 節）における神学的哲学となる。3–2–3 節に見るように，カントルのスピノーザ哲学解釈にはスピノーザの原形と微妙な食い違い点もあるが，それにしてもこれはスピノーザの超越的無限者たる神（『エチカ』第 1 部）の反映，ないしそれのカントル的解釈と見てよいであろう。なおこのことは超限順序数全体の自家撞着性（「ブラリ・フォルチの逆理」）の意識がカントルに既にあったことを示す。

アリストテレスの所説「無限者が存在するとすると，有限者はそれによって止揚され破壊（揚棄）される。有限数は一つの無限的数によって名目上無効にされるからである」（出典は示されていないが『自然学』III–5，205a などはその一例）についても，超限順序数の加法を根拠として反論が試みられる。例えば $1+\omega=\omega$ における 1 は無効だが，$\omega+1>\omega$ における 1 はそうではなく，無限数が有限数によって限定 (modifizieren) されることもあるという。（この「限定」は，スピノーザの用語，「様態」(modus)，「様態的変状」(modificatio) に対応しそうだが，（下位の）有限数が（上位の）無限数を限定するというのはスピノーザの用例に合わない。）$1+\omega$ は $\{a\}$ を $\{b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots\}$ の前に置く順序型 $\{a, b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots\}$

で ω 型，$\omega+1$ は $\{a\}$ を後に置く順序型 $\{b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots, a\}$ である。自分の導入した「実在的整数」に基づいて広く無限一般を処理しているという意味では我田引水的だが，その創造力の生んだ理念的存在はカントルの心眼に明瞭に見えていたのである。なお下記の 2ω は対 $\{a_n, b_n\}$ を ω 型に並べた型 $\{a_o, b_0, a_1, b_1, \cdots\}$ のことで ω 型だが，$\omega 2$ は ω を対に並べた型 $\{a_0, a_1, \cdots, b_0, b_1, \cdots\}$ のことで別の順序型である。

数学と哲学との間のこの種の想念の飛躍は彼にしばしば現れる。これを当時の彼の不安定な精神状態の反映とする歴史家もいるが（カントルはこの直後，精神病の発作で入院），少なくともこの数学的創造の方は健全である。

§5 では数の有限性にまつわる近世以後の哲学と科学の伝統的考え方，特にスピノーザとライプニッツが批判される。彼はその考え方を「数は有限のものだが，真の無限すなわち神の絶対性は限定 (determinatio) を許さないもの」という形にまとめ，この後半は正しいが，「数は有限」と決めてかかるのはこれまた論点先取だと批判する。またこれに関連して，数の有限性の根拠に人間の悟性能力の有限性をもち込む考え方（カント？）についても，その根拠は数を有限と決めているところにあると言う。この辺の議論は，後のカントへの言及にも関連する微妙な点だが，$1+\omega=\omega$ だが，$\omega+1 \neq \omega$ などの例はここでも用いられており，これまた我田引水の感は否めない。

§6 では実在的無限整数は「数」の性質を持つが違った性質もあるとして，例えば ω は「偶数 ($\omega=2\omega$) でも奇数 ($\omega=1+2\omega$) でもあり」，同時に「偶数でも奇数でもない ($\omega=\alpha 2$ なる α も，$\omega=\alpha 2+1$ なる α もない)」とし，しかしこの故に「超限数は存在しえず」とするのは，整数を頭から有限整数のみと決めてかかるために生じることだとして，概念の一般化は或る種の特殊性を捨てるところに起こると反論する。ここでもアリストテレスの，「数は無限でありえない。なぜなら無限の数は奇数でも偶数でもないが，数の生成は常に奇数か偶数かのいずれかで生ずるから」（『形而上学』XIII-8）が引用され，「同様のことは複素数についてもあった」と言う。実際，複素数に普通の大小関係は導入できないわけで，哲学的考察の方はともかく，この主張は今日の数学の立場から見ても妥当である。

§7 ではライプニッツへの批判に関連して，ボルツァーノの『無限の逆説』(B.

Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*，1851; 藤田伊吉訳，みすず書房，1978) が取り上げられる:

> 「ボルツァーノは，無限にまつわるアリストテレス以来の矛盾が無限概念の内容を本当に吟味すれば消滅するとの論旨を最初に示そうとした人であり，実無限を初めて正当に取り扱ったものだが，そこには順序と独立な濃度概念と，順序と結びついて無限集合を整列させる数え方である順序数概念との二つの重要な概念が欠けていた。」

この節には中世の実在論者について長い原注があり，中世以来の無限論に関しては多くの文献を引用して，「そこにある生成的な非本来的無限についての論に異存はないが，実無限についての論には賛成できない」と述べ，それは近代のカントやへーゲルなどにも言えると付け加えている。もっとも，私にはよく分からぬことが多い。

3-2-3. 「数学の自由性」の数理哲学 (§8)

§8 は彼の数学的自然哲学への道を積極的に示すもので，その精神を示すのが有名な標語「数学の本質は正にその自由性にある」(Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit) である。ただしこの節では純粋数学が論じられるのみでなく，その応用可能性の根拠にまで及び，後の自然哲学さえ予想される。そしてここには内容，用語の両面からスピノーザの『エチカ』の影響が微妙な形で現れるのである。

彼は先ず数学的存在特に超限数の実在性 (Realität) について，主観内的実在性 (intrasubjektive oder immanente Realität) と超主観的実在性 (transsubjektive oder transiente Realität) とを分かつ。これはスピノーザの用例 (「神は万物の内在的原因 (causa immanens) であって超越的原因 (causa transiens) ではない」;『エチカ』第 1 部命題 18) といくらか違っているが，全く無縁というものではない。

カントルによれば，主観内的実在性とは「それらが定義によって悟性の中に確固として定まり (Ideenmaterial ［イデア質料!?］ なる言葉が見られる)，精神の実体 (Substanz) に一定の仕方で様態的変状を与える (modifozieren) 限りでの実在性であり，超限順序数を数クラス (1)(有限整数の組)，数クラス (2)(可算順序数の組)，数クラス (3)(第 3 級順序数の組)…と分かつのはこの実在性の問題だとされる。この

数学的理論の本質は自由性にあり，これを制限するのは無矛盾性 (widerspruchslos) のみだから，これには「自由数学」(freie Mathematik) の名がふさわしいともされる。

他方，超主観的実在性とは，「それが外界の現象や関係の表現であり，例えば数クラス (1)，(2)，(3)…が，物的自然 (Natur) や精神的自然に現実に現れる濃度の表現である限りでの実在化」とされる。

一般に，主観内的に実在する諸概念は無数の関係で超主観的実在化とつながるが，それらの関係を確定するのは超主観的実在性への問題である諸学との関係を考慮せねばならず，この意味でそれはメタフィジク（Metaphysik; 形而上学というより，メタ物理学？）に属するというわけである。そこでその成果を外界の条件や関係の表現に用いる（解析力学や数理物理学などの）応用数学は，超主観的実在性にからむため，前者ほどの自由は認められないとする。してみると彼は，超限数のクラス (1)，(2)，(3)…などを力学や物理学に応用することを意図していたのかと言いたくなるが，後の「種々の定理 (2)」における自然哲学の構想は正にその線上のものである。たとえ夢幻的に見えようとも，それはカントルにとって決して単なる思いつきや脇道ではなかったのである。

以上は純粋数学と応用数学，むしろ観念論と経験論の間の関連を論じたものだが，カントルはこの二種の実在性のつながりの基礎はわれわれを含む万有の統一の中にあるとし，「これこそ数学を他の諸学から区別する特徴である」とする。これは注目すべき意見で，たとえ若干のニュアンスはあるにせよ，観念の秩序と物の秩序とを神に結びつけ，それらを同一視したスピノーザの物心並行論の思想の反映といってよい（博士論文の (H–2) 参照)。

ここに付された原注には，この思想がプラトンからスピノーザ，ライプニッツの線にあることを述べた後，経験論，感覚論，懐疑論と並べてカントの批判哲学を「それでは数学や物理学の認識の普遍的確実性は得られない」と論難している。しかしカントが問題にしたその種の普遍的確実性の根拠は，カントルの論じたようなことよりも認識主体に関する批判だったから，論点が根本的にずれていると思われる。私はむしろカントルの超限数の「形而上学」にこそ，賛否いずれにせよ，カント流の批判があってよいと考え，カントルのこの天下りな議論にはつい

て行けない。

ここで更に大切なことは，彼が上記の標語によって，その念頭にあった「数学の本質」の中に，超限数論をも支えうる人間精神の能力として超限的能力を強調しようとしていることである。これは旧師クロネッカーの批判への抗議でもあったようだが，ともかくその標語の提示に続いて超限数の実在性について主観と客観の統一の基礎に言及し，人間の「自由な創造」の中には「超限数のような，あるいは複素数のような必然性」のあるものもあれば，そうでないものもあるけれども，前者における必然性とはその万有の統一性の中に位置づけられるものと論じて，その根底に万有の統一神があると述べている。論文「種々の立場」はこの議論の続きである。

3-2-4. 数学的連続論に基づく時間論・空間論 (§§9–10)

§9 は実数の議論で，§10 の伏線として「連続即実数」とする速断を避け，実数をもって連続を定義しようとするのである。

§10 は連続 (Kontinuum) に関する哲学から始まる。即ち古来の哲学の中から，連続者が終わりなく分割可能な原子からなるとするデモクリトス的原子論（カントルはアリストテレスもこれに入れる)，有限の大きさの原子からなるとするルクレチウス的原子論，更に連続者は，有限個無限個を問わず，いかなる部分からなるものでもなく，「連続の分割は意味なし」とする聖トマスの 13 世紀的議論の三つを挙げる。そして「この長い論争に立ち入ることは避け，空間という枠に限定して数学的に連続の概念を確立したい」と断った上で，「数学者の連続の扱いは，n 次元の実数や複素数などの‘連続的量の集合’つまり n 次元数空間に依存する関数の概念に結びつけられてきたが，自分は連続をそのものずばりの形で数学的集合論によって解明しようとする」と言う。即ち，1872 年の「拡張」以来の実数論を継承した §9 を踏まえて，実数の連続性を空間の，次いで時間の連続性の基礎に置こうという考えで，1867 年の学士論文のテーゼに対する彼なりの解答であろう。

連続を集合論的に点の集合とし，時間を時点（時刻）の集合，空間を（数学的）点の集合とするのは現代の自然科学では常識だが，この常識に哲学的基礎を集合論の形で与えながら，なおかつそれを吟味したのはカントルの独創である。ただしよく見ると，その哲学的議論には多くの問題がある。

元来，時間とは何かという問いは人類にとって永遠のアポリアである。試みに古来の時間に関する注目すべき言説を挙げると，古代ではプラトンの詩的な「時は永劫の過ぎゆく影」，アリストテレスの理論的な「時は一方向の矢だが，それを測るのは回帰現象」があり，5 世紀では聖アウグスティヌスの有名な章句「時間とは何か，人がそれを問うまでは私にも分かっているが，問われた途端に分からなくなる」がある（『告白』第 11 巻第 14 章)。聖トマスの「連続の分割は意味なし」も時間論と無縁ではない。近世では，（スピノーザの時間は永遠性の陰に隠れてやや異質だが（『エチカ』第 1 部定義 8 ほか)）ニュートンの連続的な「宇宙の普遍的変数」t，ライプニッツの原子論的な dx や dt があり，近代ではカントの先験的直観形式としての時間論，聖トマスの現代版のようなベルグソンの純粋持続の説も見逃せない。

空間概念の難しさも古くからあるが，時間概念と違ってそれが数学や哲学の前面に出たのは近代かもしれない。デモクリトスの存在論（虚空と原子）はともかく，アリストテレスでは空間は虚無（真空）であり，ユークリッドには空間内の図形はあっても，空間の意識はない。この考えはガリレイの頃まで続いていて，空間が学問の対象になるのは射影幾何学の現れた近代以降であるように見える。カントの空間論が注目に値する一つの点はこの動きの中の意義で，実際，ユークリッド幾何学の研究が顕著になるのはカントの『純粋理性批判』の刺激だとする説もある（近藤洋逸『新幾何学思想史』(1966)）。

以上の歴史の中にカントルの時間論，空間論を置いてみると，「空間の枠に限定して数学的に連続の概念を確立する」という制約のせいにもせよ，むしろ単純で，学士論文での「時間，空間の実在性が絶対的か否かは決定できない」(D-2) から余り進んでいないように見える。また哲学的にもいくつか問題がある。彼は先ず時間について次のように言う。

> 「連続の概念は時間以上に根元的であり，連続を考える時に時間概念や時間的直観を援用するのは本末顛倒である。時間とは，これと独立な連続概念の助けを借りて捉えうる表象であり客観的実体ではなく，また必然的，先験的な直観形式のような主観的なものでもなく，自然界に現れ知覚される運動の間の関係を確立するための補助概念ないし関係概念にすぎない。客観的な時

間，絶対的な時間などは自然のどこにも存在せず，従って時間は運動の量ではなく，むしろ運動を時間の量と見るべきである。」

として，カントの時間論に異を唱え，同じことを空間の直観形式についても主張するが，論点がすれ違っているという感は否めない。曰く

「連続を明らかにするのに［カント的な］直観形式ではどうしようもない。何故なら空間も空間的で考えられる図形も感性的（ästhetisch; 原義は美的だが，カントの用例による）考察，哲学的考察，あるいは大まかな比較はもちろん，厳密な数学的研究においても，その対象になれるだけの内容を持ちうるのは，既に概念として用意されている連続を援用してのみできることだからである。」

要するに，彼は連続なるものが概念上，数学的に先ず用意されていてこそ，時間，空間の概念はその力をかりて初めて学問の対象になりうるとし，残る仕事は §9 で定義した実数概念を援用して点の連続体を調べることだとしたのである。しかし，もしこのような問題にまで立ち入るならば，（スピノーザ的実体（神）まではともかく）カントルはその世界被造的自然と人間精神について，特に数学がその世界でどんな位置を占めるか主観内か主観外か等の根本的問題にも触れるべきであったろう。また特にその時間論はいささか単純に過ぎたのではないか。加えて上記のカント批判はカントの斥けた形而上学的な議論と見えるため，そこにはカントルの側にカント数学についての誤解があったのでないかとさえ思われる。

私はむしろ現代的連続概念をカント的批判によって吟味すること，すなわちそれを「真理」ならしめるために理性はどんな条件を満たすべきかの角度から考察することが，意味あることだと考えている。ただしカントが準拠したユークリッド的純粋数学は単一だったのに対し，現代の集合論は単一でないから，問題をいかに設定するか自身がかなり難しい。

なお数学的に連続概念を確定するという，類似の議論はデデキントの『連続と無理数』にもあるが（同書 §3），こちらは現実に対する理論数学的モデルという意味で現代の数理科学の考え方の先駆なのに対し，カントルの方は時間，空間の方に関心があり，モデルというような意識はあったかどうか。彼の見方はピュタゴラス的で現代数学の世界からは遠いように見える。彼は集合論の連続体は形式

(Form) であり，この助けによって初めて時間，空間は内容 (Gehalt) を獲得するとするが。この Form は古典的な形相，Gehalt は質料に近い意味だったように見える。

なおカントルのこの時空論については，スピノーザは全く無関係である。そもそも絶対者の「永遠の相の下」で思索した彼に時間はなく，空間もまたない。

§10 の後半は，§9 の実数を援用して線状連続体の数論的概念として n 次元の数空間 G_n［実は距離空間］を導入し，G_n ひいては区間 $[0,1]$ の濃度 $(\aleph)$ が第 2 濃度 $(\aleph_1)$ になることに以後の問題を集約し，ただし超限順序数の一部として，第 1 濃度（可算）の他に第 2，第 3，…の濃度のあり得ることを認めることによって，連続体問題は初めて今日のような形になる。

> 「G_n ないし P の濃度 $\aleph$ は第 2 濃度 $\aleph_1$ であるか？　また一変数または多変数の関数の全体は第 3 濃度 $\aleph_2$ であるか？」

これ以後の彼の仕事は全てこの問題に繋がり，依然として哲学的関心が底流しているが（4-2 節），ここで再び連続体の分解に戻る。即ち点集合 P の導集合 $P^{(1)}$ の濃度が非可算のとき，$P^{(1)}$ を，高々（たかだか）第 2 級順序数の或る α に対して $R^{(\alpha)} = 0$ となる R（「縮約集合」，reduktibele Punktmenge）と，どの α に対しても常に $S^{(\alpha)} = \cdots = S^{(1)} = S$ となる S（「完全集合」，perfekte Punktmenge）とに分解する:

$$P^{(1)} = R + S$$

この分解は第 6 部以後も続けられるが，ここで Kontinuum（連続体）の正確な定義が従来なかったとの意識が生ずることは注目すべきである。即ち，この分解は G_n における点集合 P がいかなる時に連続体 (Kontinuum) と呼べるかの吟味が始まる。疎な完全集合であるカントルの三進集合（3–2 節）は，ここに付けられた原注で初めて現れ，「点連続体」の十全な定義のために，完全集合であることは必要だが十分でないことが自覚されるのである。

彼は，第 3 部で触れた（孔だらけではあるが，その任意の 2 点を集合内の連続曲線で結びうる）（弧状）連結集合を併せて，とりあえず，完全かつ（弧状）連結であることをもって「点連続体」の当座の定義とする。しかしそこにはなお若干の迷いがあったようで，例えば開区間や円の内部など（彼はこれらを複数形で半連続体 (Semikontinua) と呼ぶ）もそこに含められるようにしたいと言い，第 6

部 §19 でもそれに配慮している。

3–2–5. 第 5 部 §§11–14

§§11–13 は §1 で骨子の示された超限順序数論の詳説だが，具体的には第 2 級順序数（数クラス (2)）に限られた議論である。ところがここへ来て §1 の議論，特に第 3 の仕切原理に関して例の論点先取の問題に絡んで問題が現れる。これはやや細かい議論になるので，私見を交えて補説 1 で述べる。

第 3 級順序数以後のことは，Ω の末端部分が全く目に見えないという事情によってであろうが進捗せず，後の論文『超限集合論の基礎付け』において，もう一度その問題に空しく挑戦したが，以後再び筆を執ることはなかった。Ω について「万人共通の表象が得られない」という事実を，私は無限に関する人間の数学的認識における決定的な制約の一つと思う。

§14 では超限順序数 (実は第 2 級順序数) の和と積のみでなく，差，商，素数 (例えば $\omega, \omega^{\alpha}+1$)，素因数分解の定義が与えられる。後ではほとんど利用されないが，超限順序数はあくまで数の一種だと言うつもりであろう。この辺のカントルの創意はいつもながら極めて卓抜奔放である。

3-3. 閉集合の範囲での連続体仮説の成立（第 6 部)

第 6 部（1884) は第 5 部に続く §§15–19 からなるが，第 5 部と違って哲学的傾向は乏しい。§§15–17 は第 3 部までの点集合論的吟味に超限順序数を導入しての展開，§18 は第 4 部の続きで点集合に「容積」(Inhalt) を与える議論で一種の積分論である。§19 では「集合」の範囲を閉集合に限れば連続体仮説がなりたつことを示し，その全面的解決が予告されるが，勿論それは果たされず，雑誌発表の末尾には「以下続く」と書かれたものの，この論文はこれで終わる。「種々の定理 (2)」(1885) はそれに続く試みの中間報告――ただし最終報告は出なかった――と見てよい。

§15 では n 次元の空間 G_n の点集合 P を検討するための三つの一般的定理 I，II，III が証明されている。これらは §16 以下で，また次節 (4–2) の「種々の定理 (2)」で用いられるが，詳細は省略する。カントルはこれらを「メタ定理」と呼び，「メタ数学」の名も用いているが，この呼称は今日の「メタ数学」の発端であろう。

§16 では定理 A–G が示される。G_n は n 次元連続空間，P はそこでの点集合で，

P の濃度は定理 A–C では高々可算，定理 D–G では可算を超える。

定理 A.　P が高々可算集合の時，P は完全集合ではない。

定理 B.　高々第 2 級の或る順序数に対して $P^{(\alpha)}$ が空である時，P と $P^{(1)}$ は可算である。

定理 C.　逆に $P^{(1)}$ が高々可算の時，同様の或る β が存在して $P^{(\beta)}$ は空集合になる。

定理 D.　P の濃度が可算より高い時，第 2 級のどの順序数 α に対しても，P の点 p で $p \epsilon P^{(\alpha)}$ となるものが存在し，p の全体 $P^{(\Omega)} = S$ は常に完全集合である。

定理 E.　$R = P^{(1)} - S$ は高々可算で，この分解は一意である。（R は §10 で導入した縮約集合）

定理 F.　また或る高々第 2 級の順序数 α が存在して $P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)}$。

定理 G.　逆に，定理 E の可算集合 R に対して，$D(R, R^{(\alpha)}) = 0$ となるような高々第 2 級の最小の順序数 α が存在する。

証明には第 4 部の分解式 (1) の超限的延長が使われ，次の結果を得る。

$$P' = (P' - P'') + (P'' - P^{(3)}) + \cdots\cdots + (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})\,[\,=0] + P^{(\alpha)}\,[\,= \cdots\cdots = P^{(\Omega)}] \tag{2}$$

以上によると導集合 $P^{(1)}$ の構造はかなりはっきりする。即ち $P^{(1)}$ は，完全集合の部分 S と，高々第 2 級順序数 α 以降の $P^{(\beta)} - P^{(\beta+1)}$ が消滅する部分 R とに一意的に分かれる。これを連続体問題に利用しようとするのである。

§17 は前節からの前進である。$P \supset P^{(1)}$ の場合を「閉集合」と呼ぶ。この術語はこれまで断りなく使ってきたが，実はここが初出である。可算閉集合 P に対しては，$P - P'$ が疎集合で $P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}$ は疎か空となることが容易に示されるため，定理 A–G はこの P についても成立する。例えば，

定理 C$'$.　P が可算な閉集合とすると，高々第 2 級の順序数 α に対して $P^{(\alpha)}$ は空集合。つまり P は縮約集合である。

定理 E$'$.　P を可算より高い濃度の閉集合とすると，P は完全集合 S と高々可算濃度の R とにただ一通りの仕方で分解され，高々第 2 級の順序数で $P^{(\alpha)} = S$ となるような最小数 α が存在する。

ここでまだ分かっていないのは $P-P^{(1)}$ と $P^{(1)}-P$，つまり P の点で導集合に属さぬものと，導集合の点でもとの集合に属さぬものの様相で，やがて分かるように，ここには連続体問題の真の難点が潜んでいる。

§18 では G_n の点集合に「容積」(Inhalt) $\int dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ を定義し，新しい積分理論の建設を試みる。完全集合に関する一応の結果は

1) P が縮約集合ならば，容積 $I(P)$ は 0 である。

2) P が縮約集合でなければ，常に $I(P \operatorname{in} G_n) = I(P \operatorname{in} S)$。

つまり任意の点集合の容積は完全部分集合の容積に帰着されることである。

彼は「この $I(P)$ の一般化は数理物理学への集合論の将来の応用において本質的な役割を果たすであろう」と書いたが，彼の脳裏にどんな物理学があったのであろうか。この積分論はルベーグ積分ができた今となると意味も乏しいが，ツェルメロはここでの注釈で，この種の「無限小」を量子論で改めて考察することを示唆し，「この理論について更に知ることは面白いかもしれない」と書いている。この容積論の詳しい説明は Hawkins, *Lesbesgue's Theory of Integration*(2 ed., 1975) にある。

§19 はこの論文の締めくくりで，完全集合の詳細な研究から始まる。

先ず「完全集合の名は，それが自分自身の限界内で閉じて完結している点でふさわしいが，これは更に根本的に攻究すべきだと思う。それは，第 5 部 §10 で「連続者」としたものも連結完全集合だったし，そこで「半連続」と呼んだ開集合なども全て有限個の完全集合と高々可算の集合との和や差によって表されるから」と彼は言っている。

ここで完全集合は，「容積その他の点で多様ではあっても，全てに共通な性質として線状連続体の濃度，つまり閉区間 $[0,1]$ の実数全体の濃度という共通性があること」が示される。

> 「S が区間 $[0,1]$ における線状完全集合であれば，閉区間 $[0,1]$ のどの小開区間でも到る所稠密ではない疎集合の時も，その濃度は区間 $[0,1]$ の濃度と等しく，S が有界でないときも同じである。」

この証明は点列と区間列とを一対一に丹念に対応させる古典的証明で，ベルンシュタインの定理（$A \supset X \supset B$ で，A，B の濃度が一致すれば，X の濃度とも

一致する）を使えば数行ですむが，対応の具体性は乏しい。カントルの基本的な考えは原形の方が良く分かる。しかし数学的に細かい議論なので省略し，これと§17 の定理 C′，E′ から直ちに導かれる結論とを次に挙げる。

線状の閉集合 P は，可算でなければ縮約不能であり，或る定まった可算集合 R と完全集合 S に一意に分解される（定理 E′ : $P = R + S$)。この R の点を，証明に現れた「孔として除く小区間の点」にぶつけることによって，P と区間との一対一対応が付く。即ち，

「無限線状閉集合は可算濃度または線状連続体の濃度をもつ」

こうして仮に「集合」の範囲を無限線状閉集合のみに限定すると，連続体仮説は成り立つわけだが，カントルはこの後に「この定理が閉でない線状点集合にも，また n 次元の全ての点集合にも成立することは，後続の章で証明されるであろう」と書いた。しかし一般の点集合 P では $P^{(1)}$ の濃度は分かっても，$P - P^{(1)}$［P の点で集積点でない部分］，$P^{(1)} - P$［P の集積点で P に入らない部分］についてはは G_n の部分集合として連続体の濃度を超えないこと以外に何も分からず，それらが $\aleph$ より低い第 3，第 4 の濃度である可能性が残る。そしてそれは結局，一般の集合に対する連続体問題はまだ少しも解けていないことを意味する。彼は後に閉集合と対照的な自己稠密（ちゅうみつ）集合［P が $P^{(1)}$ に包まれる集合」を導入したが，それは，閉集合 P が $P^{(1)}$ を包む集合，自己稠密（ちゅうみつ）集合 P が $P^{(1)}$ に包まれる集合，任意の P がその中間の形なので，先ず両極端の場合から，ということだったかもしれない. しかしこの試みは成功せず，続編はついに書かれなかったのである。

カントルの悪戦苦闘の痕は雑誌『数学年報』(*Acta Mathematica*, t.50, 1927) に，同誌の創刊者ミッターク・レフラー (Mittag-Lefler) 宛の書簡に残っている. しかしそれはヒルベルトが 1900 年に提出した「数学の問題」（1900；一松信訳『数学の問題』1969，共立出版）の第 1 に挙げられて多くの数学者の努力目標になりながら原型のままでは解決せず，今では公理的集合論の中で，選択公理とともに他の公理から独立な命題と判明している。

なお *Acta Mathematica* はスウェーデンのミッターク・レフラーの創設した新雑誌で，ドイツの *Mathematischen Annalen*（これも『数学年報』）が編集者クロネッカーの批判の影響でか，カントルにとって敷居が高くなっていたところへ，そ

れが場所を提供し，その理論の普及に貢献したわけである。しかしそのミッターク・レフラーでさえ友人宛の手紙の中で「カントルの数学は良いが，あの哲学は頂けない」と書いているくらいで，これが当時の数学界の大勢だったし，現在も変わっていない。上記の通り，それには彼の「哲学」の側にも十分の理由があるが，私はカントルの創造の底を叩き，その想念のもつ可能性ないしその思想の「自由性」を探る意味で，あえてその面を取り上げているのである。

4. 「無限線状点集合」以後の論文

カントルは上の論文と最後の論文「超限集合論の基礎付け」(1895；1897) との間に数編の論文を発表しているが，「基礎付け」は哲学臭を完全に払拭している上，功力金二郎氏と私の訳があるので省略し。次の三編について解説する。「超限論報告」(1887–88) には重複や神学が多く，私の読み込みも不十分なので，今回は保留する。

4-1.「n 重に拡がる連続空間 G_n の点集合論 (la théorie des ensembles de points) の種々の定理」(1883)（「種々の定理」と略）

これは *Acta Math.*(t. 2, 1883) にフランス語で発表されたもので，「無限線状」第 6 部 §16 の定理 A，B，C の再掲だが，証明はやや簡易化されている。またカントルの主要論文のフランス語訳が掲載されている。即ち本稿では略した「与えられた関数の三角級数表示の一意性の証明」(1870) 以下，三角級数論の一定理の「拡張」(1872)，代数的実数全体の一「性質」(1874)，集合論への一「寄与」(1878)，および「無限線状点集合」(1879–84) で，ここまでのカントルの集合論の仕事はこれで一通りカバーできる。ただし翻訳はかなり粗雑で，「無限線状」の哲学的部分，特に第 5 部の大部分は訳されていない (補説 5)。また第 6 部の紹介は次の論文 4-2) に引き継がれる。

4-2.「n 重に拡がる連続空間 G_n の点集合論 (die Theorie der Punktmengen) の種々の定理 (第 2 報)」(1885)（「種々の定理 (2)」）

同じく *Acta math.*(t. 7, 1885) でのドイツ語による発表で，フランス語とドイツ語の違いはあるが，論文 4-1) の継承と補足である。

4-1) では「無限線状」第 6 部の §16（集合 P に対する 1 次導集合 P' 中心の考察）から定理 A，B，C だけがとられていたが，この論文の §1 では，§15，§16 から空

間の有限分割などに関する「メタ定理」1，II，III，および定理 D–G（導集合 $P^{(1)}$ の考察）が再録される。定理 H はその纏めである。

> 定理 H.　任意の閉集合 P は互いに素な二つの部分 R と S に分けられる：$P=R+S$。ここで R，S の一方は空でもあり得るが，R は分離集合で高々可算，S は空でなければ完全集合で線状連続体の濃度を持つ。P が有限または可算ならば S は空で，高々第 2 級の或る最小の順序数 α に対して $P^{(\alpha)}=0$ となる。P の濃度が可算より高い場合 S は決して空ではなく，高々第 2 級の或る順序数 α 以下，常に $P^{(\alpha)}=P^{(\alpha+n)}=S$，ひいては $P^{(\Omega)}=S$ となる。なお，分離集合 R は $R\cap R^{(\alpha)}=R\cap R^{(\Omega)}=0$ である。閉集合は全て第 1 濃度 (可算) または線状連続体の濃度を持つ。

§2 では，定理 H が一般の点集合についても成り立つか否かを，自己稠密集合 $(P\supset P^{(1)})$ を用いて吟味する。前にも注意したように，連続体問題の最も微妙な点は $P-P'$,$P'-P$ の様相にあるが，閉集合 $(P-P'=0)$ の次に，自己稠密集合を考えたのは自然である。しかしこれは結局，閉集合のようにはうまく行かなかった。以下はそのつまずきの大筋である。

問題は，一般の点集合 P を自己稠密集合を念頭に置いて，超限順序数列に沿って分解することだが，閉集合の場合の導集合の列のような分解をいかにして得るかが眼目である。そのために若干の道具立てがいる。

自己稠密集合 P は，その各点の小さい近傍内の P の点が常に同一の濃度を持つとき，**均質集合** (Homogene Menge) と呼ばれる。有理数の全体は第 1 濃度の均質集合，無理数の全体は線状連続体濃度の均質集合である。勿論，均質性も連続体の一つの性質である。そこで P の孤立点の全体 P_a を**付加部分** (Adharenz) と呼び，P の点で P の極限点でもあるものを**凝集部分** (Kohärenz)$P_c(=P\cap P^{(1)})$ と呼ぶと，P は P_a と P_c に分解される：

$$P=P_a+P_c \tag{1}$$

P の自己稠密部分集合はいずれも P_c に包まれ，P が自己稠密の場合に限って $P_c=P$ となる。

P_a は孤立集合か空集合だが，P_c には付加部分 P_{ca} と凝集部分 P_{c^2} とがあり，一

般に γ を或る第 2 級順序数として，$(\gamma' < \gamma)$

$$P = P_a + P_{ca} + P_{c^2a} + \cdots\cdots P_{c^\omega a} + \cdots\cdots P_{c^{\gamma'}a} + \cdots\cdots + P_{c^\gamma} \tag{2}$$

と分解される。γ' 次の凝集部分 $P_{c^{r'}}$ その他は「超限帰納法」（この名の出現！）で定義するのである。更にこの分解を第 3 級順序数の数 Ω まで形式的に延長して，第 2 級順序数の末端部における様相を調べる。

$$P = \sum_{\gamma'=0,1,\cdots<\Omega} P_{c^{\gamma'}a} + P_{c^\Omega} \tag{3}$$

例えば P を有理数の全体とすれば，$P_a = 0$，$P_c = P$ で，どの γ に対しても $P_{c^\gamma a} = 0$，$P = P_{c^{(1)}} = \cdots\cdots = P_{c^\gamma}\ (= P_{c^\Omega})$ だが，カントルは当然これ以上の具体例を持っていたに違いない。驚くべき分析力である。

もし (2) の分解において，各 $P_{c^{\gamma'}a}$ が可算 (γ' は高々(たかだか)第 2 級順序数)，或る γ で P_{c^γ} が連続体濃度をもつことにでもなれば，閉集合の場合と同様，問題は解決する。しかしそうはならなかった。

先ず，各 $P_{c^\gamma a}$ は孤立集合で，(2) におけるそれらの和は自己稠密(ちゅうみつ)部分を含まぬ分離集合になるが，それは可算濃度であることが示される（定理 J)。

次に，P が可算だが分離集合でない場合も，或る α が存在して P_{c^α} は可算濃度の均質集合 U となり，U を除いた (2) の和を R と置けば，P は，R と $U^{(1)}$ とが互いに素なように，$R + U$ の形に分解される（定理 K)。

ここまではよいのだが，肝心の非可算を扱う次の定理 L でつまずく。

> 定理 L.　P の濃度が可算を超えるとき，高々(たかだか)第 2 級の順序数 α が存在して P_{c^α} は自己稠密(ちゅうみつ)集合となるが，これはまた非可算な自己稠密(ちゅうみつ)集合［正確には，P の点 p でその各近傍に P の非可算の部分を含むようなものの全体］V と，P_{c^α} のその他の点の全体 U との二つの部分に分かれる。U は可算濃度の均質集合である。定理 K の R を用いると，$P = R + U + V$ で，R と U'，R と V'，U と V' はそれぞれ互いに素である。

となるが，自己稠密(ちゅうみつ)部分 V の濃度が不明のまま残るのである。なお，カントルのメタ定理 1，II，III は定理 J，K，L の証明で有効に働く。また定理 K，L における $R = P_r$ は P の**残余部分** (Rest)，$U \cup V = P_i$ は**全固有部分** (totale Inhärenz) と呼ばれる。U は 1 階の固有部分 P_i，V は 2 階の固有部分 P_{i_2} である。

§3 において，この分解は第 2，第 3，…の高い濃度を念頭に置きつつ粘り強く継続されるが，分解の各要素が可算集合と連続体濃度の完全集合とに限定された閉集合の場合（§16，定理 A—G）と違って，均質部分集合の濃度がどこまで行っても決定できなくて，自己稠密（ちゅうみつ）集合 P の濃度決定には到らない。カントルはさぞ歯がゆい思いをしただろうが，それにしてもその思索の粘り強さには感嘆の他ない。

面白いのは §3 の後半で，そこではこの考察が一種の自然哲学の建設を目指すものだという意図が述べられている。この意図は博士論文のテーゼ以来のもので，「無限線状」第 3 部などでもしばしば示唆されてきたが，今度の場合それは形而上学的幻想といった要素が強く現代的意義はほとんどない。しかしそれはカントルの数学的創造の一つの推進力だったようだし，このように超越的な想念の飛躍そのものは，独り数学と言わず，学問の将来のために意味あることと思うので，あえて彼の「自然哲学」の輪郭を説明する。

カントルの自然哲学は，当時の物理学にあったエネルギー論と原子論の対立の中に，それらとは直接につながらない点集合論をもって割って入ったという態のもので，あまり人から相手にされなかったのも無理はない。量子論の勃興は 20 世紀になってからで，当時は化学の方面で分子，原子が少しずつ認められ，熱力学や電磁気学ではエネルギー論が優勢だったが，熱輻射の問題やエーテルの問題がようやく人々の関心を捉えていた頃である。

彼は先ず，自然現象の理論的研究が基礎においている仮説に不満を表明する。不満の由来は，「理論家がマテリア（物質というより質料か）の窮極要素について全くはっきりしたことを言わなかったり，あるいは極小だが空間的容積が皆無ではない，いわゆる原子を仮定したりしている現状にある」と言う。そして「もっと満足の行く自然解釈に達するには，マテリアの窮極本来の単純な要素を実無限数［実在的整数］におくべく，空間性に関しては拡がりを完全に欠いた真に点状のものとして見るべしということは，私には全く疑問の余地なし」と言う。同様の意見を持つ物理学者としてファラデー，アンペール，ウェーバーを，また数学者として特にコーシーを挙げているが，もちろん私にはその当否は分からない。

彼は更に，この基本的直観を実現に移すには，自分の創った一般的な点集合論の推進が必須だと主張する。

「私は，自然の単純な要素でマテリアを構成するものを，ライプニッツとの関連で「モナド」または「一者」と呼び，次の見方から出発する。即ち，種として異なるが互いに影響し合う二種のマテリア，ないしそれに応ずる二つのクラスのモナド，即ち物体マテリアとエーテル・マテリア，ないし物体モナドとエーテル・モナドが相並んで基礎におかれるべきであり，この二つの基盤は今日まで観察された感覚的現象を解釈するのに十分と思われる」

という見方で，これが上の集合の分解論に繋がるのである。

「私の信ずるところでは，これは今日の物理学とうまく調和する。」

「この見地において先ず問題になるのは，この二つのマテリアを物体モナドないしエーテル・モナドの集合と見るとき，それぞれはどんな濃度をもつかである。これについて私は物体マテリアの濃度は第 1 濃度，エーテル・マテリアの濃度は第 2 濃度という仮説をずっと前から立てていた。」

「この見解には非常に多くの根拠があり，それは今後順次提示するつもりだが，さしあたりの仮定として，……，各時刻において物体マテリアは（世界空間全体 G_3 においてであれ，その限られた部分 H_3 においてであれ）第 1 濃度の点集合 P の形の下で考え，エーテル・マテリアは同じ空間においてそれと並んで現れる第 2 濃度の点集合 Q の形で考えねばならない。そしてこれら二つの点集合 P と Q は或る程度まで時間の関数として観察されるべきであろう。」

以下の議論では，それまでの吟味の対象だった連続体仮説が，今度は暗黙のうちに前提されている。その下で §2 の結果からすると，§2 末の記号を使って P と Q は次のように分解される。

$$P = P_r + P_{i_1},$$

P_r は分離集合で P の残余部分，P_{i_1} は（空でなければ）定理 K，L で固有部分 (Inhärenz) と呼ばれた可算で均質な集合で，P が可算だからそれ以上の固有部分はない。同様に

$$Q = Q_r + Q_{i_1} + Q_{i_2}$$

この場合，Q が第 2 濃度なので Q_{i_3} 以上の固有部分はない。そして最後に，

「この本質的に異なる五つの構成部分は物体マテリアとエーテル・マテリア

を各時刻において分離すると見られるが，おそらくこの五者には，そしてまた P_r と Q_r が

$$P_r = \sum_{\alpha'=0,1,\cdots<\alpha} P_{c^{\alpha'}a}$$

$$Q_r = \sum_{\alpha'=0,1,\cdots<\alpha} Q_{c^{\alpha'}}a$$

と分解された部分それぞれには，マテリアの本質的に別個な現象様式や作用様式，例えば物質の（固体，液体，気体の）状態，化学的区別，光，熱，電気と磁気などが対応するか，先ずこれを決定すべきであろう。」

カントルは「この推測を，これにもっと十分な検証を与えるまでは決定的な形で述べないでおきたい」としてこの論文を結んだが，それが公表される機会はついに来なかった。

なお，この間の考察においては濃度 a に［α_γ などの］超限順序数の添え字が付き，大小順に並べられているなど，或る種の思いこみが暗黙の仮定として使われている。この添字の使用は後の「超限集合論の基礎付け」で理論的に導入されるが，その動機はこの辺にもあったかもしれない。

4–3.「実無限に関する種々の立場」(1885)

これはスウェーデンの科学史家エネストレーム (Eneström) に宛てて書かれたもの (1885/XI/4) で『哲学・哲学的批判雑誌』(*Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, Bd. 88(1886)) に発表されている。哲学の文献が極めて多く，私の手には負えないので，適当に端折りながらその大筋を示す。

文脈からすると，エネストレームはカントル「無限線状点集合」の第 5 部の不完全なフランス語訳を読み，それに関連して「モワニョ神父の『実無限数の不可能性；信仰と科学の関係』(1884) を読まれたか」と訊ねたらしい (1885/X/31)。これはそれに対する答えである。モワニョ (Moigno，1804–84) はジェスイットの神父で数学，物理学に造詣のあった人，その書は没年の出版で，小冊子らしいが私は見ていない。

カントルに言わせると，モワニョの批判は「実無限数の可能性」を「数は有限なもの」という信仰箇条によって斥けるもので結局は論点先取であり，信仰と学問との調和を求める点で原理的に反対はしないが方法は間違っているとして，上

記の第 5 部 §§4-8 を「仏訳でなく原文で読んでほしい」と言っている。4–1 節で触れた通り，仏訳ではこの部分が著しく不完全だったのである。彼はここでアリストテレスやライプニッツの他に，新たに多くの哲学者とともにコーシーの『自然哲学の七つの講義』(*Sept leçons de physique générale*) やガウスの名を挙げて，「彼らの権威にもかかわらず，その実無限批判は頂けない」と主張している。

私は先に 3–2–2 節で，論点先取といえばカントルの側にもあると述べたが，まとめとして彼がイタリック書きにしているところを要約しておく。

> 「実無限数の可能性に反対する主張の，いわゆる証明はすべて問題にしている数に有限数のもつあらゆる性質を押しつけようとするところに間違いの根本がある。他方，無限数の方はこれが一般に何らかの形 (Form) で思考可能である以上，有限数との対比を通じて，全く新しい数の種族を，即ちその性質が物の本性と完全に独立だが，その研究対象はわれわれの恣意や偏見によるのでないような数の種族を構成せねばならない。」

これによってそれを見れば，カントルの側の「論点先取」の背後には，無限数なるものは或る客観的な「数」として自ら新しい数の種族を構成せねばならぬという積極的な創造精神があったと言うべきであろう。3–2–1 節で ‘rea1’ を「実在的」と訳したのもこれに由来する。

もっとも，ガウスの実無限反対は幾何学での無限遠点の実在性に関するもので，その反面，整数論では（剰余類のような）無限集合を一個のものとして対象化することに先鞭を付けている。現代数学の集合一元論的性格がデデキントに発するとしても，その事実上の源はガウスの整数論研究にあると言うべきであろう。

さてカントルはここでこの件について古来の思想家の意見を吟味する。先ずパスカルはアルノー神父とともに，上記のアリストテレス的論難を矛盾とは言わぬまでも疑義ありとし，実無限数の存在を認めている。［例えば『パンセ』232 に「数には無限がある」(Il y a un infinité en nombre.) という章句がある。『数学と哲学との間』III–2「パスカル私記」参照］ただしカントルに言わせると，パスカルは実無限数の把握に関して，まだ人間精神の能力を低く評価しているとされる。

こうして彼は歴史上の思想家を，実無限者（das Aktual-Unendliche; A.-U. と略）に対する姿勢によって三つに分類する。即ち，A.-U. を

1)　現世を超えた永遠にして万能なる神，または能動的自然において (in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive in natura naturans) 問題にする。これを絶対［的実無限］者 (das Absolute) と呼ぶ。

2)　具体界または被造的自然において (in concreto seu in natura naturata) 問題にする。これを超有限［的実無限］者 (Transfinitum) と呼ぶ。

3)　抽象界において (in abstracto)，すなわち人間の認識能力による実無限者 (Aktua1-Unendlichen) の形において，超限順序数の形として，より一般には超限順序型の形として捉えられる限りで問題にする。

カントルの属したキリスト教的世界において 1) の肯定は当然のことで問題にならない。2) も 3) も否定する例としてはコーシー，モワニョの他，フランスの新カント派の哲学者ルヌヴィエを挙げ，2) のみ肯定して 3) は否定する例としてデカルト，スピノーザ，ライプニッツ，その他を挙げ，2) は肯定するが 3) は否定する例も一部の新スコラ学派に見られるという。勿論，この分類のどこにおくべきかはっきりしない思想家も多数あり，そもそもこの分類にどれだけの意味があるのかも疑問だが，彼が本当の気持ちは「2) も 3) も肯定するのは極めて少数で，おそらく自分が最初であろう」と言いたかったのである。

彼はこの後，エネストレームが「種々の定理 (2)」に関心を示したらしいことを捉えて，「拡がりを完全に欠いた真に点状のもの」をマテリアの窮極要素とするという彼独特の原子論に，ライプニッツやボシュコヴィッツ (R. Bosković, 1711–87) の名を挙げて注釈を加えている。またポテンシャルな無限，つまり解析学でいう無限小が関係概念ないし補助概念であり，上のような分類の基準にはならないこと，またそれにもかかわらずそれとこれとが混同される場合があるとして，例の「無限線状」第 5 部での議論を補強し，更に，新たに分類した絶対的実無限と超有限的実無限との混同の例についても論じている。彼によれば，後者は同じく無限 (Unendliches) だが多化可能なもの (Vermehrbares) と考えるべきだが，前者は本質的に多化不能 (unvermehrbar) であり，数学的に限定不能 (undeterminibar) であると考えねばならぬとする。そしてこの誤りを犯した例として汎神論者を挙げ，それをスピノーザの『エチカ』のアキレス腱と呼んでいるが出所は明示していない。そもそもスピノーザの議論自身が難解の上，カントルの解釈もますます難物

で，何が「アキレス腱」か判然としないが，スピノーザは無限者たる神を認識する知性 (intellectus) と表現あるいは想像の能力 (imaginatio) とを峻別しているので，その辺の事情を指すのであろう。『エチカ』では例えば第 1 部命題 15 の「備考」にその例が見られる。

率直に言って，カントルの哲学は決して体系的なものではなく，説得的なものとも言えないが，ともかくこの論文をもって彼は哲学者や神学者との果てしない論争に入って行く。その記録はこの論文に続く「超限論報告 (Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten)1–VIII」に残されている。

* * *

以上,「無限線状点集合」を中心に解説した。この論文は，ツェルメロがそれに与えた注釈に「この論文はカントルの全業績の精髄 (Quintessenz) であり，他の論文はその先駆ないしは補完である」とまで注記したほどの労作でありながら，今日余り読まれないので，これを中心に一連の哲学的内容のものについて私見をまとめたのである。実はカントルの仕事の中で数学者の間で現在最も評価の高いのは点集合論の創造で，超限数論の方は集合論の専門家以外にはあまり用いられず，自然哲学に到っては全く顧みられない。私自身もこの評価に特に異議はなく，率直に言えばその自然哲学は形而上学的幻想詩と思っている。しかしそれが常識的でなければないだけ，現代の常識に対する「アンチテーゼ」として頭のどこかにおいておきたい気がする上，このような形而上学的構想もその数学的創造の推進力の一翼を担っていただろうという気持がぬぐえないので，この極めて創造的な特殊な学問の形成の実相を垣間見る機会でもあるとして，あえてこれを取り上げたのである。

少なくとも私は，カントルの超限集合論では，超限数論以下，閉集合や自己稠密集合の導入に到るまで，数学的内容とない交ぜの形で自然哲学的想念が働いていると考える。またライプニッツの『モナドロジィ』とまでは言えないが，超限数論を以てするスピノーザの『エチカ』へのアプローチは，スピノーザの分かりにくさを思えば思うほど，カントルの哲学的創意あるいは恣意を示しているように思われる。いずれにせよ，これは確かに稀にしか見られない天才の仕事である。

しかしあえて言えば，このような讃美の思いだけが私のカントル観なのではな

い。この思いの半面，たとえ連続体問題にどんな成果が上がろうと，それで「連続とは何か」が終わったとは言えないのではないかとの思いが禁じ得ない。カントルそこのけの幻想を持ち出すようだが，私は，人間存在の深淵に潜む意識の無限性や連続性を，言葉，文字，記号などの限定作用によって，従って数学や理論哲学によって解明するというのは，所詮，人間には無理なことであり，せいぜいそれに対する不断の追求に終わるであろう，何かを残したとしてもそれは霧の上に書いた文字のようなものではないか，という絶望的な思いから離れられない。これはカントルの集合論はもとより，例えばカント，ベルグソン，あるいはフッサールなどの哲学をひもとくときにも常につきまとう私の本音中の本音である。事情が許せば，いつかこの本音について，せめて輪郭だけでも纏めてみたいと思っている。

（1996 年 11 月）

補説 1．カントルの超限順序数論の原型

「無限線状　第 5 部」の §§11-13 は §1 で骨子の示された超限順序数の生成の詳説だが，具体的には可算順序数である数クラス (2) に限られている。ところがここへ来て §1 で示された順序数形成論の曖昧なところが現れるように思われるので，あえて私見を加えて概観する。

先ず §11 で第 1，第 2 生成原理が説明される。次はその要約である。

> 「第 1 生成原理は，基礎におかれて同一と見なされる「単位」を，既成の（有限または無限の）実在的整数 α に繰り返し付加し統合することである。
> 第 2 生成原理は，$\{1, 2, \cdots\cdots, \nu, \cdots\cdots\}$ から ω を，$\{1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots, \omega, \omega + 1, \cdots\cdots, \omega + \nu, \cdots\cdots\}$ から $\omega 2$ を，というふうに，「定義ずみの実在的整数からなる或る定まった列で最大者の存在せぬものがあるとき，その列自身をこの原理によって新たな数の生成とする」という論理的機能 (logische Funktion) である。」

この間，ω はクラス (1) の整数全体の順序型を示す表現で，数クラス (1) の最大個数という意味ではなく，それは有限の n が或る個数の単位を統合する意味の記号であるのと同じだと彼は注意する。本当は n も $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1\}$ を示す記号と言いたかったところだろうが，0 を排除する実在的整数の概念の下ではそう

も言えなかったのであろう。（万有の統一の綻び!?）

厄介なのは §12 にある第 3 の「抑制または仕切り原理」(germanHemmungs -oder Beschränkungsprinzip) である。§§11-12 での説明は §1 ほど歯切れよくない。

話は概説から始まる。即ち数クラス (2) の元（第 2 級順序数）α が終わりなく延長されることを確認し，各 α が可算濃度（数クラス (1) の濃度）であることを確かめ (§11)，次に $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n, \cdots\cdots$ を数クラス (2) の数の単純列（ω 型の列）とするとき，そこに最大者がなくても上限 β が存在し，それもクラス (2) の数であることを確かめる (§12)。そしてそれは次のように続く。

> 「以上のことから，数クラス (2) の全体は数クラス (1) の濃度（可算）ではないとの定理が得られる。実際，もし可算だと仮定すれば，クラス (2) の元の全体は，（大小を別にすれば）単純列（ω 型）
>
> $$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots \tag{*}$$
>
> に並べられるが，(*) に最大者 γ があれば $\gamma + 1$ が，なければ上限 δ が (*) のどの元より大きいのに，いずれも (*) の元のはずだから矛盾である。また数クラス (2) の濃度は数クラス (1) の直後の濃度であり，その中間に別の濃度は存在しない。」

要するにこれで $\aleph_0$ の次の $\aleph_1$ は得られたわけである。そこで

> 「ここまでを思い返してこの拡大過程を導いた方法を思い描くと，そこに働く三つの論理的契機 (1ogische Momente) があった」

として第 3 原理に続く。しかしこれが分かりにくいので，以下その部分をできるだけ忠実に訳すことを試みる。

> 「……その契機とは，上の二つの生成原理とそれに追加される抑制または仕切り原理 (Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip) で，後者は以下の要求からなる。すなわち，［或る数 α に］先んずるあらゆる数の全体が，それの全外延に従って，すでに手もとにある完成ずみの一つの数クラスの濃度［M] をもつとき (wenn die Gesamtheit aller voraufgegangenen Zahlen die Mächtigkeit einer ihrem ganzen Umfange nach bereits vorhandenen definierten Zahlenklasse hat)，その限りにおいて，他の二つの生成原理のどちらかを用いて新しい数の生成を進めよという要求である。」

ここで問題になるのは私が挿入した［或る数 α に］である。この挿入は許されると思うので，それに沿って考えてみよう。

α を任意の可算順序数（第 2 級順序数）とすると，α 未満の数の全体は既得のクラス (1) の濃度すなわち可算濃度を持つから，第 3 原理の要求は，第 1，第 2 原理による生成を，生成結果が可算である限り続行すること，言いかえれば，その生成を一応可算の範囲に「抑制」し，そこに「仕切り」を設けて進めること，というふうにとれる。

しかし α を，第 2 級順序数の全体である Ω（第 3 級順序数の始数）とすると，事情は大分変わってくる。Ω に先立つ順序数全体（数クラス (3)）の濃度 ($\aleph_1$) は，今述べた生成の範囲では未得のはずだから，その濃度ひいては Ω が既得と考えられることは別に保障されておらねばならない。ただしカントルの方ではすべての超限順序数が第 1，第 2 原理だけで得られるものと考えていたらしく，n 階の数クラスの導入はその列の上での話であり，第 3 原理の役割は，既得の超限順序数を濃度に結びつけ，これを超限基数として扱う道を拓いただけのように見受けられる。第 1，第 2 の原理だけで Ω の存在が確認できるかという問いを，彼はここでは全く考慮していなかったのではないか。

実はこれと似た状況は第 2 級順序数の始数 ω についても考えられる。有限の n の列から ω を「導入」するのは最初にして最大の飛躍である。そしてこれを始数として「生成」するのが第 2 生成原理の最初の役割なのである。しかし Ω 以下多くの数クラスの「始数」の存在まで第 2 原理一本で押し通すのはかなりの無理がある。有限の n から ω へという飛躍は確かに際立っているが，可算順序数 α から Ω への飛躍については，Ω の形が判然とせず，どこに仕切りが入るのか際立って見えにくい。II–4 で示すように，ボレルなどは，「第 2 級順序数の全体」の概念を「超限の二律背反」と呼んで斥けているほどなのである。要するに $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots, \omega, \cdots\cdots, \alpha, \cdots\cdots\}$ が終わりのない列であること（その間，第 2 原理を何回も用いる）は事実として，その全体が一括できることはどうして知りうるかは不鮮明であり，現にカントル自身，Ω 以下の第 3 級順序数の全体についても，第 2 級の場合のような吟味を試みかけた形跡がある。すなわち彼自身もその点に多少の不安を覚えていたのであろう。

実は，§§12-13 の議論を考慮すると，カントルが§1 のように考えた気持ちには，もう少し別の要素があり，それは (1)—(3) のように推測できる。

(1) 「しばらく自然数列を 0 から始めれば，n は n 自身の切片 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n{-}1\}$ の型の表現になる。」

(2) 「そこで，もしすべての有限整数の列を自らの前にもつ順序数 ω ［が存在するとして，それ］をとれば，ω はもはや有限順序数ではない。それは，ω を有限だとすれば，$\omega + 1$ も有限であり，しかもすべての有限整数の後に来るはずの ω より、更に後に来るからである。」

(3) 「第 2 級順序数 α の切片 $\{0, 1, \cdots\cdots, \omega, \cdots\cdots, \beta, \cdots\cdots, (\beta < \alpha)\}$ の型は α であり，その濃度は依然，可算に止まる。従って全ての第 2 級順序数を自らの切片とする順序数［が存在するとして，それ］をとれば，(2) の場合と同様の議論によってそれはもはや第 2 級順序数ではない。それは第 3 級順序数の始数 Ω である。第 3 級以降の順序数についても，議論は同様に進められる。」

もちろん，カントルは ω,Ω などの存在に関する部分の挿入［　］を明言していない。(1) では自然数の自然列 ω をとることで一応良いとして，(2) では第 2 級順序数 α の全系列 Ω が見えてこない。ただ，可算濃度 $\aleph_0$ より連続体濃度 $\aleph (= 2^{\aleph_0})$ が大きいから，α が $\aleph$ で押さえられる以上，α の全体 Ω もせいぜい $\aleph$ またはそれ以下になるとでもしたのであろうか。しかしこれには $\aleph$ がまず整列できるとの前提がいる。これは，$\aleph$ を「数える」ための数を得るのに，$\aleph$ が既に「数えられる」形（整列）になっている必要があるということで，この点を克服しないことには論点先取のそしりを免れない。§3 で彼が触れた「すべての集合は整列可能という思考法則」はここで極めて重要な論点になるが，いずれにせよ，第 3 級より高い超限順序数ともなれば不鮮明の度はいよいよ加わる。

これに対して，上の挿入「が存在するとして，それ」や「或る数 α に」について，制約的なこの原理に読み込みをあえてして，それを第 3 の**生成**原理と解し，

(4) 「（第 2 級でも，それ以上でも）任意の α の先行者の全体が既得の濃度である限り，第 1，第 2 の原理のどちらかを使うが，それが既得の濃度内での足踏みの繰り返しに陥ると**自覚**したら，それは第 2 原理の質的に新しい出番

として，超限列の生成に**飛躍**を生むものとせよ」

と拡大解釈する手がある。要するにこれは第3原理を単に既得の列の仕切りに使うのでなく，これを，制約的な仕切りを取り払うという積極的な役割をもつ第3の**生成**原理として積極的に用いようとするのである。しかしその**自覚**をどう説明するかは問題で，所詮，これも順序数と濃度の終わりない鼬(いたち)ごっこであり，結局は論点先取である。ただ「或る数に」などの挿入部分の解釈に関する限り，事は気分的にすっきりするかもしれない。

もちろん，これでは（超限順序数全体に関する）ブラリ・フォルチの逆理を防止することはできないが，この点はカントルの元の形でも同じで，特にこの拡大解釈の欠点だとは言えない。それよりも彼はこの時点で，第3級以上の順序数も上の (2)，(3) と同様の形で定義しようとして，第2級順序数の表現にもこだわったのではなかったか。ただしその場合，第3原理は生成に本質的に関与するが，逆理を含みうる危険な原理と解する必要があるであろう。

この解釈 (4) には，上の試訳の部分の後に添えられたツェルメロの注釈「上のカントルの三原理は ω 番目の数クラス $\aleph_\omega$ を得るのにも不十分である」（カントル『論文集』p.199）に関して，数学的にちょっと面白い事情がある。カントルの哲学とは関係がないが，数学における想念と理論化とのギャップを示す意味で注意しておく。補説3と併せて読まれたい。

実はツェルメロはカントルの考えに沿って公理系 Z を組み立てたつもりだったのだろうが (1908)，そこでは濃度の無限列 $\aleph_0, \aleph_1, \cdots\cdots, \aleph_n, \cdots\cdots$ が得られても $\aleph_\omega$ に当たる濃度は得られぬことをフレンケルが指摘し，公理系を修整した (1922)，もしその列が集合 $T = \{\aleph_0, \aleph_1, \cdots\cdots, \aleph_n, \cdots\cdots\}$ として一括できるならば，$\aleph_\omega$ は T の和集合として得られる（補説3の $\mathfrak{S}T$）が，その一括を許す公理がツェルメロの体系にはなかったのである。（フレンケルはこの状況を，「集合」の一価写像の像が全体として「集合」であることを「置換公理」として追加要請することによって，事態を救済した。つまり定義域 $\omega = \{0, 1, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$ の上の一価写像 T を，n を $\aleph_\omega$ に対応させるものと定めると，その像集合は $\{\aleph_0, \aleph_1, \cdots\cdots, \aleph_n, \cdots\cdots\} = T(\omega)$ となり，$\aleph_\omega = \mathfrak{S}T(\omega)$ として得られる。）

しかしツェルメロがカントル『論文集』に与えた注釈は，自分の作った公理的

表現に対してフレンケルが与えた批判を，そのままカントルの言葉による表現に対して適用したもののように私には思われる。（ツェルメロが『論文集』を編集したのはフレンケルの批判の十年後の 1932 年で，当時，集合論の公理化は時代の一つの中心課題であった。）あえて乱暴に言いかえれば，私はフレンケルの批判がツェルメロ流の厳格な「集合」にこそ当てはまっても，カントルの融通無碍な想念の下では乗り越えられた（!?）かもしれないと考える。例えば上の仕切り原理の解説 (4) の下であれば，カントルが $\aleph_\omega$ を「見た」としても一応はうなずける。$\aleph_\omega$ を捉えてその手前との隔たりを描き出したのはフレンケルの功績だが，カントルの場合，超限数論の目標は「連続とは何か」であり，また「到達不能な絶対的無限者」の表現という面もあって，彼の想念もそれにはともかく役立ったであろうから。ただそれにしてもブラリ・フォルチの逆理への暴走に防壁がなかったことは致命的である。

一方，Z,ZF の両体系（ないしそれに続く今日の種々の公理的集合論）には，可能な限りの一切の逆理の不存在の証明こそできないものの（『数学と哲学との間』付録 1)，この逆理をはじめ集合論の逆理として今日，具体的に知られている逆理は十分防止できる。ただその反面，Z に対する ZF のように，メタの立場から言うと，その表現を漏れる巨大な濃度の存在の余地は残ってしまう。言いかえれば，表現の厳密さが足かせになって「集合論」が縮こまる——というにはそれは巨大すぎるが——感はまぬがれないのである。しかしこれは言語あるいは記号による表現にとって，どうしようもないことかもしれない。実際，甘さの残る表現が時として創造を支えることがあるのである。当然のことながら，今日の公理的集合論には第 3 原理に当たる公理はない。

以上要するに，カントルはまず第 3 級順序数からなる「単純列」(既得の順序数たる高々第 2 級順序数を添え数にもつ列）に対する上限がまた第 3 級順序数である，などのことを示すべきだと思い，そこで Ω の末端部分が全く目に見えないという事情を再認識したのではなかったか。カントルがこの論文を未完とせざるをえなかったのは，もちろん連続体問題の難しさだが，この件もその一要素であろう。彼は後の論文「基礎付け」において，もう一度この問題に挑戦したが成功せず，その後これについて再び筆を執ることはなかった。始数 Ω について「万人共

通の表象が得られない」という事実は，無限に関する人間の認識における決定的な制約の一つではないかと思われる。

補説 2. 整列可能定理・選択公理・ツォルンの補題

カントルは，どんな抽象的な集合も整列集合の形に直せることを「思考法則」(Denkgesetz) と呼び，その証明はやがて示すといったが，それは果たせなかった。推測するにその証明は，どんな集合も彼の思い描いた理想の超限順序数で数え上げて行く限り，いつかはその濃度に達するという考えを，順序数と濃度の関係を介して保証するものだったのではあるまいか。そうだとすれば，彼の順序数生成の原理ひいては第 3 級順序数 Ω への空しい追求はここでもつまずきの石であったと言える。ツェルメロの証明も「思考上」の証明だが，巧妙な点は濃度を表面から隠し，集合の基本的性質と演算とだけで事を運んだことである。なおこの項については田中尚夫『選択公理と数学』（遊星社，1987）が参考になる。

集合 M の部分集合 M' の全体 2^M（M の冪(べき)集合）を取り，空集合以外のすべての M' には，その元 m' を一つ固定して「目印元」(ausgezeichnetes Element) と呼び，以後その目印元の選択表 T を動かさない。この表の存在を要請するのが選択公理である。一つの M' でも m' の取り方は M' の濃度だけあるから，ありうべき T の集合の濃度は巨大で，T を固定するというのはあくまで思考上のことである。

T によると，M のいくつかの整列部分集合はつくられる。実際，M の目印元 m_0 による部分集合 $\{m_0\}$，$M_1 = M - \{m_0\}$ の目印元 m_1 を $\{m_0\}$ に追加した部分集合 $\{m_0, M_1\}$，$M_2 = M - \{m_0, m_1\}$ の目印元 m_2 を更に追加した $\{m_0, m_1, m_2\}$ などはそれであり，有限整列部分集合

$$\{m_0\}, \{m_0, m_1\}, \cdots\cdots, \{m_0, m_1, \cdots\cdots, m_n\} \cdots\cdots$$

の和集合 M_1 に対し，$M - M_1$ が空でなくその目印元が m_ω ならば，

$$\{m_0, m_1, \cdots\cdots, m_n, \cdots\cdots, m_\omega\}$$

もまたそれである。これらの各々は，その任意の元 m_k（k は自然数）に先行する部分，

$$A(= M - \{m_0, m_1, \cdots\cdots, m_{k-1}\})$$

の目印元になっている。

この関係を逆転し更にこれを一般化して，M の整列部分集合 X の各元 x と，x に先立つ整列部分である「切片」A_x とについて，$M-A_x$ の目印元が x であるとき，X を（表 T に依存するという意味で）T–集合と呼ぶ。明らかに T–集合は初めから順次決まって行くから，二つの T–集合 M_1，M_2 は一致するか，一方が他の切片になるかで，両者の元の順序は一意的である。ここには濃度などは現れておらず，あるのは上のような単純な整列部分集合の例のみだが，M 自身が T–集合の一つだと分かれば証明は終わる。これはいわばツェルメロの開き直りである。

M の元 x で，或る T–集合の元でもあるものを T–元と呼ぶ。上の

$$m_0, m_1, \cdots\cdots, m_\omega$$

などは全て T–元である。T–元の全体を L_T とおくと，これはまた整列集合であることが分かる。（実際，L_T の元 a, b, c は或る T–集合 M^* の元として必ず比較可能であり，推移性（$a<b$ と $b<c$ とから常に $a<c$）もなりたつから，L_T は全順序集合；また L_T の任意の部分集合 L'_T はその最初の元 a を持つから整列集合である。このことは L'_T の元 x の属する T–集合 M_T を取り，M_T の x による切片と L'_T との共通部分で考えれば分かる。）L_T はまた T–集合であることも容易に分かる。残るのは $M=L_T$ の証明である。仮に $M-L_T$ が空でないとすれば，その目印元 n を L_T の後に追加すると，n も T–元であることが分かるので，T–元の全体たる L_T の定義に反して矛盾になる。

言うまでもなく，整列集合に対して選択公理は公理として要求しなくても成立する。どの部分集合にもその最初の元があるからである。

ツェルメロのこの証明 (1904) には選択公理に関する批判（数学における「公理」の意味にまで及ぶ深刻なもの）をはじめ多くの反論が出た。中には誤解に類するものもあったが，彼はそれらを考慮し，前の証明に誤りがあったというのではなく，用いられた集合論的原理を明記した「新証明」と各批判に対する再反論とを発表し，引き続きそれらの原理を整理して公理的集合論を組み立てた（共に 1908）。「選択公理」はこれ以後，一応学界に定着する。なお，これら二つの証明，特に「新証明」はデデキントの自然数論に多くを学んでいる。ツェルメロの公理系については次の補説 3 を参照して頂きたい。

一方，選択公理は集合論のみでなく，数学の多くの分野に必要であることが分かってきたため，より単純で説得的な形が現れた。中でもツォルンの補題と呼ばれる五つの命題は今日最も多く用いられている。次にその一例を挙げるが，これは上記の証明の順序論的な骨組みを述べたものである。

順序集合 X のどの全順序部分集合も或る元を超えない（「上に有界である」;$\leqq$）とき，X を帰納的順序集合と呼ぶ。ツォルンの補題の一つの形は

「帰納的順序集合は常に少なくとも一つの極大元を持つ」

というもので，極大元とはそれ以上延長できない元のことである。上の整列証明において，M のすべての部分集合 2^M は包含関係によって順序集合となり，それは M 自身で抑えられるからつねに有界である。ここで，選択表 T を一つ定めると，T の下での整列部分集合の列:$[\{m_0\}, \{m_0, m_1\}, \cdots\cdots, L_T]$ は 2^M の全順序部分集合であり，L_T は T による整列化である限りは最大だが，別の $T', T'', \cdots\cdots$ に対する $L'_T, L''_T, \cdots\cdots$ があって，いわばどれもがそれぞれのお山の大将に止まり，その上の総大将はないから，それらは全て極大元であって「最大元」ではない。つまり整列定理の下でツォルンの補題は成立する。

逆に，ツォルンの補題を用いて上の証明を書き換えるには，（T を表に出さず）上の $[\{m_0\}, \{m_0, m_1\}, \{m_0, m_1, m_2\}]$ など，M の整列部分集合で 2^M の中で全順序列をなすものが，どんなに伸びてもそこに極大元があることで終わる。この場合，極大元とは M の一つの整列化に他ならない。

選択公理や整列可能定理からツォルンの補題を導くこともでき，結局それらは全て同等になる。

補説 3. ツェルメロ - フレンケルの公理系

ツェルメロの公理系は後にフレンケルが修正した形で「ツェルメロ - フレンケルの公理系」（体系 ZF）と呼ばれている。

ツェルメロは 1908 年に集合論の最初の公理化として次の公理系を与えた。まずその原型の大要を示す（体系 Z）。

理論の土台として或る範囲の「個体」領域を設定し（領域 $\mathfrak{B}$，基本関係 ϵ も $\mathfrak{B}$ の範囲のみで与える。それは次の公理 1〜7 をみたすものとする。

公理 1（外延の公理） 集合 M, N の元が一致すると $M = N$。（つまり外延が

集合を決定する。)

公理 2 (基本集合の公理)　空集合 0, $\mathfrak{B}$ の「対象」a に対する集合 $\{a\}$, 同じく a, b に対する $\{a, b\}$, 以上は常に存在する。

公理 3 (内包の公理または分出公理)　命題関数 $\mathfrak{E}(x)$ が集合 M のすべての元に対して明確に定義されている (definit) とき, M の元で $\mathfrak{E}(x)$ が真となるものは M の部分集合 M をなす。(「部分集合」は, 定義明快な命題関数によって内包的に分出される。この公理は単一の形だが, $\mathfrak{E}(x)$ の形だけの無数の公理がある公理形式 (スキマ) である。)

公理 4 (冪集合公理)　集合 T に対し, T の部分集合全体からなる集合 $\mathcal{U}T$ が存在する。

公理 5 (和集合公理)　集合 T に対し, T の元の全ての元からなる集合 $\mathfrak{S}T$ が存在する。

公理 6 (選択公理)　集合 T のどの元も 0 でなく, また互いに共通元をもたないとき, 和集合 $\mathfrak{S}T$ の部分集合で T の各元と一つの元のみを共有するもの S_1 が存在する。

公理 7 (無限公理)　領域 $\mathfrak{B}$ の中には, 空集合を含み, 集合 a とともに $\{a\}$ をも含むような集合 [つまり自然数全体と同型な集合] が少なくとも一つ存在する。

体系 Z には, 当然得られてよい集合が得られぬという不備があり (補説 1), それは先ず

置換公理　集合 T (元 t) で定義された一価写像 f の像 $f(t)$ の全体は集合である。(フレンケル)

によって補われる。その他にも, 公理 3 の「明確に定義された命題関数」の意味をより正確にすることなどを経て, 体系 ZF その他の公理系が 1920 年代以降, フレンケル, スコーレム, フォン・ノイマン, ベルナイスなどの手でいくつか提出された。(前二者は ZF 系だが, 後二者はゲーデルの公理系 Σ につながり, 体系 BG (ベルナイス - ゲーデル) と呼ばれることがある。)

ZF を論理的に整理すると,「集合」はすべて領域 $\mathfrak{B}$ の個体, 論理変数は必ず「集合」の範囲を動く形, つまり 1 階の述語論理を用いて書け, 可算モデルがあ

り（I–3 補説 3），それがコーヘンのモデル構成 (I–1) の基盤として用いられる（付録 1 の付記参照）。

これに対して体系 BG は，公理 3 のような公理形式を含まない代わりに，（順序数全体のような）「集合」と認めがたい大きな集まり（「プロパー・クラス」と呼ばれる）を用い，論理変数にもこれが使われる。つまりこれは 2 階の述語論理でないと扱えないが，ゲーデルのモデル Δ には BG が使われる。

補説 4. スピノーザの『エチカ』について

スピノーザ (B. Spinoza, 1632–77) はデカルトとライプニッツの間に位置する哲学者で，『エチカ』（1677，没後出版）は，「神」に中心をおいて考えられた人間の倫理学である。（しかし私は「神」についての信仰を持たず，むしろ「神」を人間の創造と考えているから，この書物はいやが上にも分かりにくい。以下はカントルの思想とのつながりの下で一応まとめたものである。）

『エチカ』は「幾何学的秩序に倣って論証されたる」との副題をもつ書物で，定義，公理に始まり定理，証明と続く形式で書かれている。しかしユークリッドの『原論』はもとより，ニュートンの『プリンキピア』の内容と比べても著しく異質で，決して論理的に透明なものとは言えない。またデカルトやライプニッツとは事変わり，スピノーザには実際の数学的活動はなく，『エチカ』に現れる数学的事項にしても，数学の普遍的真理性についての記述の他には，三角形，円，比例関数などが「備考」その他に散見するだけである。彼がこの叙述形式を用いたのは，単にその完全な演繹性の故でなく，数学の真理の永久性とそれが実利的目的をもたぬこととが，同様の性質をもつ「神」の支配の下での世界の秩序に通うためだと言われる。

『エチカ』は，(1) 神，(2) 精神の本性と起源，(3) 感性の起源と本性，(4) 人間の隷属または感情の力，(5) 知性の能力または人間の自由，の五部からなる。第 1 部は彼の形而上学，第 2 部は彼独特の認識論ないし自然哲学である。第 3 部以下では人間の情緒を含む倫理学の面が示され彼の最も特徴的な所だが，ここで特に引用すべき点はない。なお全巻と第 1 部には序章が欠けているが，これは別の書物『知性改善論』によって補われる。

第 1 部について言うと，デカルトからライプニッツの時代の哲学で最大の関心

事は「世界における真の実体 (substantia) とは何か」であった。デカルトは有名な方法的懐疑から始めて，心と物と神の三者を「実体」としたが，スピノーザはこれを首尾一貫を欠くものとし，神は他者による限定のない無限者であり，自らの原因となるが (causasui) 人間的な目的 (finis) はもたぬ能動的自然 (naturanaturans) であって（神＝無限＝能動的自然），その意味で実体と呼べる唯一者である（第 1 部付録）。また心も物も神の属性（attributa，複数）であり，それが様態的変化 (modificatio) を受けた変状ないし顕現 (affectio) として，森羅万象になるとした（汎神論）。

カントルがスピノーザに関心をもったのは，何よりもこの人の「神」が絶対的実無限者である点といってよく，それがカントルの哲学的・宗教的傾向にうったえたためであろう。しかし上の基本線について，カントルがどこまでスピノーザの思想に忠実だったかは，私にはよく分からない。少なくともカントルの超限数の哲学には，そのピュタゴラス的な数の哲学にもかかわらず，実体に関する説明が欠けている。

一方，物も心も神の中に統一されることは，スピノーザの自然哲学と認識論を通ずる基本原理である（物心並行論）。そしてこれは，カントルが超限数の内在的実在性と，それの経験界に対する応用可能性——超越的実在性——とを万有の統一の中に基礎づけようとしたことに，遥かなつながりをもつように思える。ただしこの場合も，スピノーザの「神は万有の内在的原因 (causa immanens) であって超越的原因 (causa transiens) ではない」（第 1 部命題 18）などは，用語上の類似（本章 3–2–3 節）にもかかわらず，カントルの考えがどこまでスピノーザの根本思想につながっているかを疑わせる。

またスピノーザにおいて，「時間」は永遠の相の下に (sub specie aeternitatis) 埋没し，「空間」は初めから問題になっておらず，いずれにしてもカントルの実数に基づく時間空間論とは無縁である。

なお，スピノーザの汎神論からは人間の意志の自由などが一旦否定される（第 1，2 部）。しかし第 3 部以後，実体を永遠の時の下に観るという立場から，それは「神に対する知的愛 (Amor Dei intellectualis) という形で復活し，『エチカ』が倫理学たるゆえんが明らかになる。しかしこれはカントルの「哲学」と直接のつ

ながりをもたないので，これには立ち入らない。

補説 5．カントルの論文の翻訳について

カントルの仕事には有名なわりに翻訳が少ない。「超限集合論の基礎付け」には英訳，仏訳，その他，邦訳（功力，村田訳，共立出版）もあるが，他の論文の邦訳はなく，外国にもほとんど見ない。本章（4–1 節）で挙げた仏訳は，彼の数学の紹介に役立ったに違いないが相当粗雑な訳で，カントルも了承したものだったが，彼はその後，折に触れて「仏訳でなく原文を読んで欲しい」と言っている。特に例の「無限線状」第 5 部（全 14 節）などは，哲学的な第 4〜8 節は省略し，節の順序も 1，11，12，13，2，3，14，10 と変えた上，一部は抄訳に止めている。

この第 5 部には近年，仏訳（訳者 J. C. Milner 氏）が出た。（私はそのコピーしか持たないが，プールとラッセルの論文の仏訳に挟まれているのでフランスで出た論文選集であろう。書名，編者，発行年など，ご教示頂ければ幸いである。）これは昔の訳よりずっと良質で，「集合」の原語の区別（II–1 参照）もつけてある。（前の訳ではそれらの原語を無視した上，訳者ごと論文ごとに無統一に ensemble，système，totalité などを当てている。また後で得られた結果に引きずられた誤訳らしいものもある。）しかし新訳でも第 3，6，9，10，13 節は省かれ，第 12 節は $\aleph_\Omega$ についての記述を除いた抄訳である。またカントルの ‘reale ganze Zahl’（実在的整数）が ‘nombre entier réel’ と訳されているのは，実数 (nombre réel) との混乱が心配である。

補説 6．カントルの哲学的考察の集合論への影響

私は長らくカントルの ‘哲学’ を集合論の推進力と見ていたが，本文の基礎になった原稿について，赤攝也氏から “彼の哲学は分かったが，それが推進力だったという点の説明が不足だ” との批判をもらった。私はそれを妥当と思い，それを念頭に置いて本文を書いたのだが，やや散漫になって筋の不鮮明なところが生じたので，以下に私の考えの骨子を要記する。

彼の集合論の発端期は哲学と独立に説明できる (II–1)。しかし本文でしばしば触れたように，二つの学位論文 (1867，1870) のテーゼに見られる哲学的問題意識は底流していて 1880 年頃から随所に顔を出し，その哲学的想念が数学的問題設定

の節々で大きな影響を与えている。少なくともそれを切り捨てて論ずる場合，得られるのは現代的集合論の原型としての集合論であってそれでは彼の考えていた理論構想の或る部分が欠落する可能性がある。彼の自然哲学は確かにおかしいが，私は，集合論によってその種のことを考えた彼の姿勢が，今後永久に荒唐無稽に終わるだろうとまでは考えない。私が彼の哲学的想念を集合論形成において根底的な役割を果たしたと見るのは，視野をここまで広げたときのことである。以下この点に重点をおいて述べる。

第一の点は連続の問題に関係する。彼は「無限線状　第5部」で無限概念について長広舌を振るった後 (§§4 –7)，再び1872年の無理数論を持ち出した上で (§9)，改めて「連続とは何か」の問題を歴史的に概観する (§10)。そしてそこに深入りはしないと断りつつ，数学的にも種々の吟味を経て，時間，空間ないし運動などは「連続」を基礎付けるものではなく，逆に数学的実数論の連続性によってそれらを基礎付けるべきだと言うところに落ち着くのだが，これは連続の問題が連続体問題に尽きないことを示唆する (§19)。勿論この結論は平凡だが，注意したいのはその間に歴史的概観が挟まり，かつそれが学士論文 (1867) における第二テーゼ，

D-2:　空間，時間の実在性が絶対的か否かは，この問いの論争的性格の故に判定不能である，

に繋がることである。なお，カントの時間空間論への彼の批判もこの脈絡においてであって，そのカント理解に問題があるにしても，そこには当時のカント理解がまだ今日のようでなかったことも考慮してよい。例えば少し前だが，異端的な哲学的数学者ロンスキー (H. Wronski, 1776–1853) が書いた初期のカント紹介（*Phlosophie critique découverte par Kant, 1803*) も，カントの形而上学に対する誤解の点はカントルと同様である (Montferrier éd., *Dictionnaire des sciences mathématiques*(1913) 所収 ‘Philosophie des mathématiques’ の項参照)。

第二点は彼のライプニッツとスピノーザ，特にスピノーザに対する思い入れに繋がる。実際，博士論文 (1870) のテーゼ，

H-2:　スピノーザは，万物における真の規範規則を人間が発見しうる力を数学に帰したが（『エチカ』第1部命題36付録)，それは正しい，

は「無限線状　第5部」のほぼ全般にわたって影を落としている。彼は超限順序数

がスピノーザの絶対者，神のための適切なシンボルを与えるとしたが（3–2–2 節），それらは数学的集合論の形成には無関係のようでいて，彼の「集合論」に根底的な規定を与えていると私は考える。（なお，彼の用いた Form, Affektion, immanent, transient, Modus, Modifikation 等はもとはスコラの用語だが，先ず思い当たるのはスピノーザの『エチカ』第 1 部である。）

このことは第三の論点として彼の自然哲学に関連する。当然のことながら私はその哲学を幻想的としたが，これもまた博士論文のテーゼ

H-3: 諸整数を，また同様の仕方で諸天体を，いくつかの規定と関係によって構成された何らかの全体にまとめること，

にからんで，ピュタゴラス的な数の哲学を思わせる。彼が超限順序数を「実在的 (reale) 無限整数」と呼んだこともこの関連で考えるべきであろう。「種々の定理 (2)」の最後で，彼はその論文が連続体問題へのアプローチであったことを棚上げし，あえて連続体仮説を暗黙の内に仮定して夢を展開したが，これなども連続体問題さえ自然哲学の中に繰り込む意図があったと見れば，彼の「集合論」が純数学的なものに止まらなかったことを示唆していよう。

ただし彼には哲学的意図はあっても説得的な体系はなく，それと裏腹に哲学者の用語のつまみ食い（!?）の傾向が見られる。スピノーザを始め，「弁証法的概念生成」（へーゲル），「モナド」（ライプニッツ）などはその例である。あえてつまみ食いと言うのは，私に分かる範囲でも，彼がスピノーザ，カントなどの思想をどこまで忠実に辿ったかに疑問の余地があるからである。これらの事情は一段と彼の哲学を誤解させたことであろう。[なお彼の用いたスピノーザのテキストは今日の標準的な Gebhardt 版 (1924) ではありえず，Brüder 版 (1840–43) と思うが，引用書翰の番号等に不安がある（『カントル論文集』p.175）。私はカントルの旧居訪問のときも調べようとしたが現物がなかった。]

（1998 年 5 月）

PDF 化にあたって

本 PDF は，

村田　全『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）

を元に作成したものである。

村田全先生のその他の著述は

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs

を御覧いただくか，書き込みください。