ボレルのエフェクチフ概念の形成

——数学的存在の一側面——

村田　全

これは私の書いた最初の論文で『高崎論叢』創刊号 (1953) に掲載された後, 最初の英論文 (French Empiricism—0ne of the studies of foundations of mathematics I〜IV, 1958-60) の骨組みになったものである。本書の内でこれのみは文体もろとも，1952 年当時のほぼ原型のままにしたが，それは私の問題意識ないし方法が，粘りか停滞かはともかく，その後も余り変わっていないことを告白するとともに，問題そのものに今なお多少の学問的意味があると私には思われたからである。なお**本文の原脚注**はそのまま残し，**今回の補筆は脚注に［補注］または［補筆］**で示した。

今日の数学基礎論において，ボレル，ベール，ルベーグ[1) 達の経験主義的思潮は必ずしも重きをおかれていない。これにはこれなりの理由もあろうし，そもそも彼らが自覚的かつ積極的に一つの基礎論を展開しようとしたか否かが既に問題かもしれない[2)] 。しかしここに理論の今後の展開に資すべきものがないというわけではなく，むしろ今日の基礎論のアンチテーゼとして注目すべき点があるのではないかと思われる。その意味で，本編では彼らの思想の一つの基調的な概念を考察しつつ，その立場の概観をも併せて試みる。もっとも取り扱いの範囲はその概念が一応の形成を終えるまでに限り，それが基礎論の他の立場といかに関連するか，あるいは，今後いかなる自覚的な立場の上にいかに生かされうるか等の私見については別に論ずることにした。

1. 問題の意義

ここで問題にする一連の言葉 effet，effectif，effectivement[3)] については，少なくとも自然科学に関する限り，通常とりたてていうほどのことはない。即ち effet は日本語の「作用」「実現」「効果」等と互いに重なり合い，それに対応して形容詞 effectif は「現実の」「効果ある」くらい[4)] ,「実効値」(valeur effective) 等がその一

[1)] **補注**　E. Borel(1871–1956)，R. Baire(1874–1932)，H. Lebesgue(1875–1941)。彼らは 1830 年代の数年間に前後してパリの高等師範大学 (Ecole Normale Supérieure，特に J. Tannery) に学び，パリ大学でも C. Jordan などの指導を受けた。当然，H. Poincaré の影響も受けている。

[2)] **補注**　これは 1952 年の私見であり，今から見て見識不足だった。

[3)] Effect，Effeckt 等の英語，ドイツ語をはじめこれらの同系語はラテン語の動詞 facio（作る，為す）→ efficio（生ずる，為す）に由来する。なお，本文の三者と同系の語 effecace（効能）はボレルには見当たらない。

[4)] **補注**　‘effectif’ をこのような意味に使う前例は，数学はもとより哲学にも見当たらない。例えばララント (Lalande) の

例である。また，副詞 effectivement はやや狭く，en effet と似た肯定の気持の下に「現実に」「実際」等がその主なものであろう。ところでこのうち effectif の語は，その存在性が強調されて可能的存在に対する現実的存在を意味することがあり，数学ではこの用例の方がむしろ普通である。しかしこの言葉の内容を詳細に検討すると数学者個人個人の間にかなりの齟齬が認められ，勿論或る共通性は底流しているが，これが言わず語らずのうちに諒解されているという事情も加わって事が時として紛糾する。われわれの差し当たっての目標はこの混乱に多少の脈絡をつけることである。

最初にその共通の意義を確認しておかねばならない。それは次の通りである。《effectif》は，数学の対象と方法の一つの性格を表す言葉であって，例えば或る対象の定義，また或る定理の証明等が，誰がいつどこでやっても同一の結果に導かれることを意味し，なかんずく選択公理ないしこれに類するものはそこに使われていないことを併せ意味する。ここではこの解釈を effectif の**具現的解釈**と呼び，時としてこれを用いる。「具現性[1]」の訳は近藤基吉氏による。けだし具体性と現実性との総合であろう。さてわれわれはこの解釈を支点として事の検討を行うのであるが，その前に念のため effectif についての簡単な例を挙げておこう。ただし選択公理[2] との関係はやがて詳しく述べるから，ここでは特にふれない。

先ず，例えば一つの整数を，円周率 π の十進小数展開で小数第 2 位にあらわれる数として定義することを考えよう。誰の眼にも明らかなように，これは 4 であり，従ってこの定義を effectif だといっても問題はあるまい。しかしここで小数第 2 位を第 1 億位といいかえると，事情は多少変化する。少なくとも「数学の現状においては」π の小数第 1 億位にどんな数がくるかを，今日のわれわれは全然知りえないから，先のように確定的な数をあげることはできない。これは例の具現的解釈の「いつやっても」という点に抵触するとして，この定義を effectif でないときめつけることもあながち不可能ではなさそうである。勿論こうなると，小数

『哲学用語辞典』(*Vocabulaire technique et critique de la philospphie*)(6e éd. 1951) には ‘effectif’（可能的存在に対する現実的 (réellement) 存在），‘effet’，‘efficace’，‘efficience’，‘efficiente’ があるが，これらは全て「原因」(cause) の対立語として，しばしば最終原因たる神につなげられている。別に ‘infini’ の項で，絶対的無限 (infini absolu) を，増減する量を超えた質的全体たる ‘une effectivité complète’（完全な実現性，むしろ創造性？）として，カントルの論文 “Zur Lehre von Transfiniten(1890)”（実は 1887–88 の『超限論報告』）が引用されているが，ボレルにその種の主張はなく，彼の用法とは無関係であろう。

[1] **補筆**　後に吉田洋一氏はこれを「確定的」と訳されたが，用語としてはこれが最もこなれているかもしれない。（ワイルダー，吉田訳『数学基礎論序説』培風館，1969）

[2] 「カントルにおける数学と哲学」補説 2

第 2 位についても，未開人や子供をひきあいに出して，「誰がやっても」に衝突させることもできるわけで，これでは事は紛糾するばかりである。しかし effectif の多義性の中には，こうしたことが多少変形された形であらわれている可能性もあるかのように思われる。われわれはこの後の方の多義性を第二次的なものとして一先ず切り捨てたいと思うが，それはこの考察が数学内での考察に主体をおいているからであって，もし数学的真理とか，ないし数学そのものの性格とかを哲学的に考察するのならば，このことも改めて考え直さねばなるまい。少なくとも私はここにも本質的な問題があることだけは意識しておきたいと思う。

さてもう一度 π を問題にするならば，これは元来円周と直径の比という判然たる定義をもっている。実際の計算は不能だが方式は一様なのだから，その意味からいうと，計算を誰かがしていると否とに関係なく，小数第何桁の数字も確定しているはずだと解釈することもできる。そうなると π の十進小数展開は第何桁であろうと effectif に定まっているともいえるわけである。実はこれなどは今日の数学者の間ではむしろ effectif の典型的な例に近い方であって，以下の考察の主体たるボレルのごときも 1910 年の頃には確かにこの見解をとっていた。もっともボレルが今日（1952 年）なおこれを肯定する立場にいるか否かには多少の疑問がある[1]。ここいらは微妙なところであり，手近くは後に述べる公理主義対経験主義の論争，つきつめれば，哲学における先験主義対経験主義の対立がここにその一端を露呈しているのである[2]。

ここで対比的に非 effectif の例を一つ出してみよう。今一つの小数を定義するのに，一桁一桁骰子(さいころ)をふって数字をきめていくとする。無限に小数の桁を伸ばしてゆくことは人間にできることでないが，仮にこの点を黙認して定義が完了したとしても，この方法では二度あるいは二人で試みて同じ無限小数に到達することは先ずあるまい。即ち，非 effectif である。

さて次に多少唐突であるが，ある数の定義が一つの論理式で与えられている場合を考えてみる。この式の示す数を実際に計算するのは，上の π や骰子(さいころ)の場合と同様人間的尺度では不可能と思われるとして，ただ骰子(さいころ)とちがってその式が**一つ**

[1] ボレルの『関数論』第 2 版付録 IV〜VI にはこのことが肯定されている。しかしこの付録は第 4 版で，必ずしも著者今日の思想ではないと断りを付せられている上，他の二三の考慮からこういう叙述をした。

[2] **補注**　私は 1955 年頃，この件についてボレル氏に質問状を出したが，挨拶状だけで返答はなかった。これは彼の逝去の前年である。

の数を表すことだけは何らかの方法によって確かめられたとしよう。そして更にその条件の一つとなるわけであるが，そこには選択公理が使われていないことも分かっているとしよう。この場合も今日の数学的常識からいうと，effectif な定義の仲間に入れられる。逆に考えると，初めに述べた具現的解釈の性格はこの程度のものだといってもよいわけである。もっとも effectif と論理式とのこの結びつきは effectif の意味がある程度定まった後に，主としてポーランド学派の人達によってなしとげられて今日に到ったものであることは，後のため注意しておきたい。

以上の数例によって，effectif なる概念の内容とその多義性とは多少明らかになったと思う。後者については既に述べたことの他に，多くの要素のあることも大体看取されるであろう。実際，例の具現的解釈には「誰がやっても」とあるが，そこでは誰にでもやれることが何であるかは触れられていないので，これを明らかにするのは経験から理論への出発点たる例えば「公理」や「直観」の問題であろうし，また簡単に「同一の結果に到達する」とあるが,「同一の結果」とか「到達」とかいうことも，考えてみると公理等とはまた違った面倒な問題を潜めていよう。即ち，effectif の内容は単なる語義の問題ではない。事は数学的対象の性格という面から，数学の根底にある思想へつらなる一つの契機的問題であって，われわれがその意味の由来を求め，これを検討弁別せんとする究極の目的は実にこの点にこそ存するのである。

2. 問題の由来

最初に，この言葉の意味が，特に選択公理とからんで固まっていった経路を問題にしたい。元来この公理は後にも述べる通り，或る意味では存在可能性に関する理論であって，具体的・現実性に乏しいから，その点確かに非 - effectif の一例ではある。しかしこれと同じことが，例えば帰謬法による証明にもいえるのであるから，ここには何かそれなりの根拠があると見てよいであろう。私はこのことを集合論の発展の中に，焦点をボレル，なかんずくその主著の一つたる『関数論』(*Leçons sur la théorie des functions*) に結ばせつつ検討してみた。もとより目下の問題について，この観点以外からの検討が行われることは大切であるが，一方依然として，ボレルないしその『関数論』が，一つの主要な資料を提供してくれるのでないかという思いは禁じえない。そこで先ずこの書について予備的な注

意を二三しておこう。『関数論』は「集合論の原理と関数論への応用」の副題の下に，本文六章，三つの付録の八，九割までが集合論に捧げられており，第2版以後の付録はほぼ集合論に関する記述のみである。

『関数論』の初版は1898年の発行であるから，今日（1952年）からみて既に半世紀の昔であり，その内容も決して現代的とはいえない。しかしカントルの集合論の仕事は大体1870年代に始まり，95年，97年の二度にわたる総合報告によって終わると考えてよいので，むしろ比べてもって当時におけるこの書の新しさ，またその意義をこそ思うべきではなかろうか。勿論，この頃には選択公理も知られておらず，また集合論の二律背反の内で問題となっているものはブラリ・フォルチ (Burali-Forti) の逆理 (1897) ただ一つ，しかもこれとてもその二年前にカントルがその逆理を「証明」に応用したほどで，たとえクロネッカー (Kronecker) の論難があったとはいえ，98年にはその彼も既に亡き人であったし，後にいわゆる数学の危機はなお多くの人の念頭にはなかったことであろう。『関数論』は山雨を孕んだ高楼の風にも似て人々の前に現れたのである。やがて疾風怒濤の時代がくる。そのさなかにこの書は1914年の第2版（付録IV〜VI）と28年の第3版（付録VII）とに，共に嵐の残滓を数十頁の付録に追加して再刊され，更に1950年の第4版にも付録VIIIと旧版の本文付録への脚注とが加えられている。即ち現在（1952年）においてもなおそれだけの意味をもつものとみてよいであろう。

さてこの『関数論』初版の中にeffectifとその類語を探してみると，本文六章の内の集合論に関する三章に5回，関数論に関する残り三章に1回，更に三つの付録における4回を加えて都合10回見出される。事いささか枝葉に立ち入るようであるが，これを更に検討すると，その最初に現れるeffectivementは，或る定理とその証明との間に句点で前後を限られているという文の構造からみて，原義通りen effet（実際に）と解すれば足るごとくであるが，ただその後に続く証明が例の具現的解釈にあうようになっていることは注目をひく。しかしここに何か必然的関係があるか否かは私には何ともいえない。即ちボレルはこの言葉をこの形に用いたのはこれ限りであり，類語en effetはしばしばあらわれるがそれらは必ずしも具現的論証を伴っているともいえず，その上具現的定義や具現的証明はまたしばしば別の類語[1]で表されているからである。かえってここから感じられる

[1] explicitement，réellement，actuellemellt

ものは，この頃のボレルは effectif 系の言葉を特別扱いにしていなかったのではないかということである。この感じは残る 9 例についても或る程度あてはまるのであって，これを，一つの思想がまだ確たる内容をもたぬままにいくつかの言葉に託され，従ってまたそれぞれの言葉も厳格に一つの意味を担わない状態とみるのはどうであろうか。

ここに重要なのは別様に換言された二つの例のあることである。われわれはこれによって，当時ボレルがそこに暗黙のうちに潜めた意義を推測することができる。その一つは本文第 2 章「代数的数と無理数の近似」にあって，自然対数の底 e に関係する。《事実 e は，言うべくんば，超越数の effectif な例の最初のものである。換言すれば，リューヴイル (Liouville) の数のように単なる算術的級数によるのでなく，解析学による簡単な仕方で定義された超越数の最初の例なのである》(p. 26)。これは具現的解釈より相当きびしい条件である。即ちリューヴイルの数[1] は定義の仕方如何によっては，誰がやっても同一の数がきまるようになるものであるが，それをわざわざ斥けている点が問題である。実はこの引用文のすぐ前には，《リューヴィルの方法は非常に巧みであるが，こうして定義された数の性質 (propriété) は何も分からない》という記述があるのであって，「性質」という言葉の意味は的確に掴みがたいが，それはそれとして推察するのに，ここの effectif は一つの理論が数学に対してどんな意味ないしは効果を持つかという，いわばその「実効性」(effectivité) まで問題になっていそうに思われる。

第 2 例はずっとはなれて付録 II「関数の増大型[2] と第 2 級（順序）数」にあらわれる。これは一見すると第 1 例と違って具現性が強く前面に出ている。事は関数の増大型についてのデュ・ボア・レイモンの定理に関するもので，「任意の関数」という言葉を含んだ或る命題の成否が問題になっている。《ところでもし，任意の関数という語を effectivement に定義しうる関数と解釈すれば，即ち与えられた変数値に対する関数の値を，与えられた近似の範囲内で，しかも有限回の演算によって計算しうる関数と解するならば，この命題は疑う余地がない》。これは第

---

[1] $\xi = \dfrac{\alpha_1}{10} + \dfrac{\alpha_2}{10^{2!}} + \dfrac{\alpha_3}{10^{3!}} + \cdots\cdots + \dfrac{\alpha_n}{10^{n!}} + \cdots\cdots$，$\alpha_n$ は 10 以下の自然数とすると ξ が超越数となることが証明される。ここで α_n をいずれも 1 とでもおけば ξ の定義は一意である。

[2] **補注**　増大型の理論とは，$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ が 0, 有限値 α, 無限大のどれかのとき，f, g の間に $f < g$, $f = g$, $f > g$ と順序を付けると，$y = x$ 以下，$y = x^2, \cdots\cdots, y = e^x, \cdots\cdots$, に対し $x < x^2 < \cdots\cdots < x^n < \cdots\cdots < e^x < \cdots\cdots < e^{e^x} < \cdots\cdots$ のような系列が得られるが，この尺度により関数の様相を調べる理論である。

1例とは別の意味でずいぶんきびしい条件であるが，第1例を見た眼には「計算」等というところに再び「実効性」が覗きみられるような気がする。

さて渾沌の中に統一を秘めたボレルのこれら《effectif》は，1950年の『関数論』第4版に到って既に一つの確定に達している。前にも述べた通り，この版には，特に集合論の章に多くの脚注が加えられているのであるが，その中には effectivement énumérable という言葉が5回あって，他にはこれと関連して用いられた effectivement が1回あるのみである。ところでこれこそは選択公理との関係をも含めて最も典型的な effectif の用法の一つであり，今日いわゆるそれの一つの濫觴ともみられるものである。そこで関心はおのずからこの間の約五十年にあったであろうその跳躍点にうつるわけであるが，この書の中ではそれは第2版 (1914年) の付録 IV「超限論争とツェルメロの証明」の III「ツェルメロによる整列連続体」の中に見出され[1] 次には事ここに到る学界の動きを概観すべきであろう。

1898年から1914年に到る16年の歳月は，ちょうど世界大戦へと歩んでいく世の動きと軌を一にするかのように，集合論にとって稔り多くもまた多難な時期であった。創始者カントルはその悲劇的な晩年を既にむかえており，集合論に内在する矛盾は1906年の頃までに一つまた一つと露呈されていた。そして数学基礎論はこの動揺の中に生みの苦しみを重ねていた。実際今日の基礎論に見られる三つの枝——論理主義，形式主義，直観主義——はあるいは萌芽の形であるいは大樹を打ちたてて，ことごとくこの時期に一つの重点を示している。勿論基礎論ばかりではなく，数学の内からも外からも多くの批判，検討が行われ，そこに未解決の問題は残しながら，今日に続く新しい局面が数多くひらかれて行ったのもこの時期である。われわれの主題の一つたるツェルメロの整列可能定理の証明はこのまっ唯中，1904年と1908年の再度にわたって，前者は普通の集合論の定理として，後者はその公理的取り扱いの下でなしとげられた。ところがこの証明の根拠たる「選択公理」については，これを容認するか否かをめぐって数学史上にも類例の少ない論争が生じたのであるが，ボレルはこの時その論争の一中心にあって，その間の事情を上述の付録 IV（の 1〜VII）にまとめたわけである。

この付録は，一度雑誌に発表した論文の再録を主とする八つの節からなる。付録 IV の I(1899)，II(1900) は「超限の二律背反」に関するもので，初版時代からの

---

[1] 初出は 1908 年，それ以前の著書に，この例はない。

中心課題でこの付録の伏線をなす。付録IVのIII（書き下し）「ツェルメロによる整列連続体」とIVのIV「集合論に関する五つの手紙」とはツェルメロの証明の解説，批判にあてられている。ちなみにその証明の日付は1904年9月24日であり，四人の交換した五つの手紙がその年の12月には雑誌に送られているという事情なども，この間の学界の雲行きを伺う多少のよすがとなるであろう。これから中三年をおいた1908年の論文IVのV「集合論の諸原理」は彼の立場を知るのに重要なものであるが，差し当たってわれわれの注目をひくのはこれと発表の年を同じくするIVのVI「集合論の逆理」であろう。『関数論』においてeffectivement énumérableなる成語があらわれるのは実にここに始まるからである。ところがここにまことに面白いのは，その内容がツェルメロの立場に対立するものであるにもかかわらず，これを相手に書かれたのでなかったことである。ボレルをしてこの用語を導入させたのはむしろ1906年の発表にかかるリシャール(Richard)の逆理であったように思われる（章末の補説参照)。この逆理は従来のボレルの主張を，ツェルメロ達と全く別のところから，文字通り根底的に脅かした。‘あえて臆測を逞しくするならば，付録IVのIVと対照的な年余に亘る彼の沈黙はこの打撃の深さを物語るのでないかとさえ思われる’[1]。しかしこの節においてボレルは完全に立ち直ったようであって，付録IVのVII「数理哲学と無限」，同じくVIII「数学的無限と実在」はこの新しい立場を中心に，集合論の意味等について展開されるのであるが，ここはむしろボレルの思想を，ツェルメロやリシャールと関係させながら，その常に動かぬ面と，時と共にするその変貌との交錯の中で検討するのが得策であろう。そしてそれはやがてボレルの思想如何をこえて，数学的存在の一つの面の解剖にまで到らねばならないが，われわれはここではeffectifの概念にその一つの截断（せつだん）面を見出そうとするのである。

3. 《Effectif》の二義性

ボレルの思想における不易は何であろうか。集合論に限ってこれを探ねるとしても，ここにこそ他のすべてが帰着するという態の第一原理は容易に見出せない。むしろそういった天降り的な第一原理のないところに，あるいは積極的にいえばフランス流のbon sens，合理的現実主義といったものに，彼の本領を見出すことに

[1] **補注**　この‘　’内の一節は余計な臆測であった。

なるのではなかろうか。即ち彼の理論は現実から生まれるとともに，再びかえって現実の上に効果を及ぼすようなものでなくてはならない。そのためには先ず理論を人々が共通の像をもちうるものに限らねばならない。他はすべて《illusoire (幻覚錯覚的)》である。けだし前者だけが現実を見失わず，また現実に対して有効なのだから。しかし一たび「効果」とか「価値」とかいうことになると，問題は数学そのものの意義にさえ結びついてひとえにむずかしい。またたとえ事を数学の内部に限るとしても，今日の幻想は明日にも実現し効果を示すかもしれない。ここでボレル愛用の一句《数学の現状においては》[1] が生きてくる。そして第 1 節で触れた多義性の中には，具現性の問題というより**実効性**の問題であるものもあるかと思われる。これによって事はより紛糾するにせよ，その焦点だけはとらえられたことになろう。

ところで，もしこれらの考察に誤りがないならば，第 2 節で引用した二つの effectif は正しくボレルの思想の根底を伝えるものであろうし，また今日いわゆる effectif はボレルのそれの二肢の一たる具体性，現実性の強調形とみうることにもなるであろう。この新しい意味づけが，ロシア人やポーランド人など言語系統を異にする人達によってなされた点に私は多少の興味を喚られる。同じく ‘effectif’ な議論といってもボレル，ベール，ルベーグなどのラテン系の人達のそれは依然としてその原義に縛られていたかに思えてならない。それは時代の動きによるのかもしれないが，また案外に言語系統にも理由の一つはないものであろうか[2] 。

さて本題に戻って，先の推測を裏付けるべき二三の事実をあげてみよう。最初に断っておくべきは，ボレルが元来初期の集合論，特に点集合論を駆使して顕著な効果をおさめた有力な一人でありながら，同時にその多くの部分に対して懐疑的でもあったことであろう。『関数論』本文のはじめには，《事，無限に関する限り，いわゆる自明なるものを極端なまでに信用しないがよい。そのような場合，言葉だけで満足するほど危険なことはないのである》(p.3) とあるが，これは正に彼の一貫した態度であり，その懐疑は時とともに次第に深まったようである。もっともこれと同じことを，ボレルの対照点たる例えばツェルメロもいうかもしれない。そこでこの言葉の裏付けとしてボレルは何を信じ，何を信じなかったか，ま

[1] ブロウエルも同じ文言をよく用いるが，ここでは両者の相違の方に興味があろう。それについては，第 5 節でふれている。
[2] なお「フランス経験主義の数学思想」補説 2 参照

たその根拠は何であったか，それがこれからの問題である。

ボレルは集合を「定義を与えるにはあまりに基本的な概念である」として，可算集合としての自然数列と「定規やコンパスで書いて見れば分かる」線分や円周などの連続的図形とを例示するところから出発する，集合論の対象として彼の信じたものは，精一杯，幾何学的直観による連続体と可算集合とだけであった。その他の対象について彼は全くといってよいまで口を閉ざしている。このことをもう少し詳細に検討しよう。

彼は幾何学的直観による連続体を認めている。なるほどこれは例えば一本の線を引くことによって，共通の像を現前せしめうるものである。しかし彼の認めるのは，あくまでその幾何学的直観の範囲であって，算術的性質となると話は別となる。このことを彼は繰り返し述べているが，最も具体的な議論は本文第 3 章に見られる。今，区間 $(0,1)$ の有理点 $\dfrac{p}{q}$（既約分数）の各々にそれぞれ一つの区間

$$\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right),\ \text{ただし}\ n>3$$

を対応させ，この各区間を元の区間 $(0,1)$ から除き去ると考える。一見すると有理点は稠密にあるのだから，このことによって $(0,1)$ は取り尽くされて何も残らないかに見えるのであるが，精密に計算すると，無限個の点が，それも可算より多く残ることが証明される[1]。《このような事実を考慮すると「連続とは何か」が分かっていると信じたり，ないしは他の完全に明晰な直観的概念と同じように連続体を論じたりすることはやめたがいい》（第 3 章，§II）というわけである。ところでこの事実は果たして実際的効果をもつのであろうか。しかり，彼はこれを無理数の近似問題や測度の問題に利用する。この連続の豊饒さに比べて濃度とか順序数とかいう概念は《興味も実益もあるものではあろうが，根底的には皮相な概念で，初めに予想されるほど豊かな結果は生み出さない》（初版付録 III）。事実，彼のいわゆる「超限の二律背反」は，第 2 級順序数のごとき比較的小さい超限ですら，いかに不明晰かつ不毛であるかの表明に他ならない。むしろ彼の超限への疑惑はここに源を発するのである。これについては後にまた少しふれる。

もっとも，濃度や順序数のうちでも可算集合だけは例外である。可算集合はボレルにとっては，われわれの日常の言葉によって，人々の間に容易に共通の像

1）「連続論覚え書き」参照

を浮かばせうるはずのものであった。即ち何番目にどの要素がくるかが，簡単な規則で掴めているべきものなのであった。後にこのことの具体的明晰性が疑われはじめた時，彼はこの性質を保存している可算集合として前述の effectivement énumérable をもち出して，その障害を避けたが（第 4 版付録 VIII，1950），いずれにせよ，この共通の像による具現性は二人の論者の間に齟齬や錯覚の余地をなくし，その意味で数学への効果の期待できる一つの無限集合をボレルに残してくれたのである。

さて連続体を一応認め可算集合を認めたとなると，その両者を関係づける対角線論法はどうなるであろうか。ここでも彼自身の言葉を借りると《連続体は算術的見地からはその全体という形では与えられていない》（第 2 版付録 IV の V）のであって，連続の濃度は口にするが，その立脚地は《集合論の原理に関する討論から，種々の濃度についてわれわれが厳密に知っているのは可算集合と非可算集合とがあって，後者は純粋に négatif（否定的／消極的）な概念だという注意以上の何者でもない》（同上）という状態であってみれば，対角線論法の運命も明白である。実際「五つの手紙」（付録 IV の IV）の中でルベーグが引用したボレルの意見によると，対角線論法によって証明されていることは「可算個の数があれば，そこに含まれぬ一数を常に定義することができる」というだけのことで，別段一つの無限の数え方が積極的に示されたわけではない。これを論証の中で使おうというなら，それはせいぜい「A でないとすると全ての実数は可算となる。これは矛盾だから A である」という帰謬法の形で用いる他はあるまい。即ち《négatif な概念[1]》だというのであった。彼には連続の濃度をカントルのいわゆる $\aleph$ 数の仲間に入れてよいかどうかが，先ず問題であったのである。

可算や連続の濃度を超えて考える時，勿論《一般的抽象論は必ずしも常に無益ではあるまい。それは時として諸観念 (idées) の解明にも役立つし，より具体的な領域へ移行させうることもある。しかしそれら一般論の真の内容について空想を逞しくしてはならない》（同上）。手っ取り早くいえば，彼は関数の集合の濃度 $2^{\aleph} = 2^{2^{\aleph_0}}$ をすら許そうとしなかったのである。この論拠は同時に連続の算術的性質ともからみあっていて興味あるものであるが，詳細は準備の都合上次節にま

[1] négatif の概念を徹底的に究明したのは，直観主義者ブロウエルであるが，ボレルの négatif には無効果という気持が強いのかもしれない。これについてはなお検討を要する。

わすとして，その要点は，この集合の任意の要素を他と区別して取り出すということが，二人の数学者に鮮明単一な像を呼びおこし難いという点にあった。そしてこの「取り出す」，これは例のツェルメロの選択公理の問題である。ボレルはやがて述べるように，選択公理を連続体に適用して検討した。連続の算術的性質の中に暗黒を覗(のぞ)き，かつ連続以上の濃度を認めようとしなかった彼にとって，選択公理は《illusoire》以外の何者でもなかったことは容易に想像されるところであるが，同時にその討論が互いに他に対する決定打をもちえなかった所以(ゆえん)も，ここから諒解されるのである。ただこれが単なる批判のための批判でなかったことは，effectivement énumérable をはじめ，射影集合論，積分論から確率論等に亘る積極的な成果が続いた事実をあげれば足りるであろう。

4. 有限的定義

ボレルのいわゆる共通の像は，その表現において先ず有限的定義，即ち有限個の語による定義の形をとる。しかしわざわざ有限語法とことわるからには，何かそこに特質がなくてはならない。事実いかなる集合論の書物も有限個の語で述べられていることにちがいはないのだから。

先ずこれを実数の定義について調べよう。今一つの小数を定義するのに一桁一桁数字を指定していくとする。この方法で有限的に定義されるのは，明らかに有限小数だけである。無限小数を一桁一桁式に定義してこれが完了したというのは，人間業でなければ言葉のあやで，ここには共通の像も効果も期待はできないとボレルは考えるのである。しかし勿論彼は微積分学の「効果」は無視しえないし，また一方無限小数の中にも $\dfrac{1}{3}$ や $\sqrt{2}$ ように一桁一桁定義しなくてもすむものがある。そのかねあいが問題になってくる。上の例でいえば前者は「3 倍して 1 になる数」であり，後者は「2 乗して 2 になる数」である。前者は $0.\dot{3}$ のように小数形の表現規約さえ立てられ，後者にも循環連分数と呼ばれる簡便な表示がある。これらはすべてボレルのいわゆる有限的定義をもつ数である。このように有限回の四則演算および冪(べき)根によってえられる数，いわゆる代数的数は，有限的に定義される数に加えてよい。しかし集合論は，これだけでは連続体は取り尽くせぬことを教える。「共通の像」ということになれば，可算集合（ないし effectivement énumérable な集合）が既に許されていることに対応して極限算法 1im が許され，

これによっていくつかの超越数，例えば $e\left[=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$ が有限的定義を獲得する。更に，直観的連続体の許されていることをふまえて，これも考えてみるとむずかしいことながら連続体に長さの測定[1] を認めるならば，超越数 π もこれに加わる。しかも依然として連続体の中には非可算個の点が残されることが分かっている。この種の有限確定的な定義に漏れる数，それはとりもなおさず無限個の語を要する数であろう。連続体の中にはこれが無数にある。もっともこれらは近似範囲さえ与えられれば，有限回の操作でその範囲内に近づけうる望みも持てるが，操作の定義を有限的なものに限る[2] ということに制約されて本質的な事情は変わらない。ここから計算可能数[3] (nombre calculable) という概念も生まれたけれども，結局「数学の現状においては」任意の無理数を把握するには人為を絶した限りない言葉が連ねられねばならない。ボレルはこうして個々の無理数を簡単に取り扱うことに躊躇（ちゅうちょ）を示すのである。

次に関数や点集合を対象として，有限的定義を考察すると，ここでは可算集合が既に許されているということに呼応して一つの著しい事実が目につく。それは「可算の条件」である。

彼においては，連続体が幾何学的全体として掴まれていながら，その個々の要素に問題を残しているために，関数や点集合の把握が困難なのは当然予想されるところである。しかも例えば連続関数の類は，その具体性からいっても効果からいっても，彼として捨てることのできないものであって，これを救うのが可算の条件なのである。連続関数を例にとると，これは有理数に対するその値が分かれば決定される関数である。実際，有理点は可算個しかないからこの関数は「可算個の条件」しかも《より厳密には可算個の整数を用いることによって完全に定義される[4] 》のである。解析関数を始め，高々可算個の不連続点をもつ関数まで，解析学に普通あらわれて役に立つ関数はかくして定義されたことになる。点集合

---

1) 「長さの測定」は測度論以前の問題である。ボレルのいう連続体は等質均一 (homogène) であって（『関数論』第 2 章），この点に忠実であろうとすれば，連続体に印をつけることさえ問題となるであろう。

2) **補注**　これらの「有限確定的に定義」された点の全体を，彼は「実用的連続体」(continu pratique) と呼び（1908,『関数論』第 2 版 (1914) 付録 IV–VI），この議論を実関数の領域にまで展開した。ただしこの実用的連続体の概念には，論理的にリシャールの逆理に関連して「有限語法」の問題があり，内容的にもなお曖昧さが残っている。記述的集合論の階層の理論はこの出発点の一つである（「連続論覚え書き」補説 3，4 ; 付録 2 参照）

3) **補注**　任意の n に対し，誤差 $\dfrac{1}{n}$ 以内の有理数の得られる数,『関数論』付録 IV

4) この記述は曖昧である。関数値は必ずしも有限的に定義しうるとは限らぬからである。これは決定的な障害とはならぬかもしれぬが，相当な考慮を要する。

についても事は同様に運ぶ。実際，ボレルの考えている点集合は連続体ないしそれに類するものの上に限られているから，その議論は連続体で定義され，値として 0 または 1 を，即ち問題の集合の点では 1，それ以外では 0 をとる特殊な関数を考えることによって，関数の議論へうつしてしまえるからである。例えば完全集合の族や B 可測集合の族は可算的条件によってきまり，このゆえにこそそれは議論も容易であるし，性質も探(たず)ねうるとボレルはいう[1]。

さて，こうした可算の条件で定義される対象は，集合論によると全体として連続の濃度をもつ。ところが論理的に考えられる関数――それは例えば上に述べた関数で，0 と 1 との配置が恐ろしく複雑になったものを含むわけであるが――その全体の濃度は，連続の濃度をこえた別の濃度となる。ボレルは後にここにも近似論によって，即ち計算可能関数[2] [3] (fonction calculable) という概念によって事態の整理だけは試みるが，本質的な事情にかわりはない。可算の条件で律しきれぬ関数は無数というもおろかである。そしてここにある障害は《普通の無理数の場合より遥かに大きい》。実際，無理数の方は初めの n 項までの数学を定義して，次にこの n を無際限に増すというやり方でその桁の全体を掴む目途(めど)までは立つが，関数ともなれば《変数全部の値に対応する関数値を与えねばならない。ところがその変数値の方が可算でないから，その全体を掴(つか)めるような方法は指示できない。換言すれば，限られた時間内にその関数の任意の一つをも得ることは不可能である》。従ってこれらは《学問の現状からみて多くの場合役にたたぬものである》。しかも無理数の場合とも違って，その全体は《論理的にこそ定義できても，われわれはそれについて体認しうるもの (conception) を一体どのくらいもっているというのであろうか》。こうして彼にとって関数濃度およびそれ以上の濃度は《現実的には考える甲斐のないもの》となったのである（『関数論』初版付録 I「濃度」，II「増大型と順序数」，III「一般の関数」)。

有限的定義を完全にはずれる今一つの例は第 2 級順序数である。即ち彼のいわゆる「超限の二律背反」が現れるのである。その意味するところは，例えば自然数全体の後に ω をおき，これを用いて第 2 級順序数を有限的に表現せんとしても

---

[1] ここにも論理に飛躍がある。完全集合の族についてはこれを証明しうるが，B 可測集合族までも前者と同じ意味で可算的条件できめうるであろうか。そこには選択公理があらわれる懼れさえある。

[2] 変域の各計算可能数に対して値も計算可能数とする関数

[3] **補注**　計算可能数，同関数は後にチャーチの提言などを経由して整理され，今日の帰納的関数の一つの出発点となる。

得られるものは可算にすぎぬため，そのどれより高い順序数，例えば最初の ε 数が続き，以後も同様になる。可算は超えらるべく，しかも超ええた先に待つものは再び可算であるという空しいくりかえしである。ボレルはこれを具体的に，増大関数列からなる増大型標尺というモデルに移して論じ，従って ω，ε 等は effectif に構成しうることを注意した。前述のデス・ボア・レイモンの定理はこの構成の基本である。今回はこの問題自身の検討には立ち入らないが，要するに第 2 級順序数の有限的表現は永遠に不安定であり，従って人々がそこに抱く心像は自然数列等の場合と比べて格段に曖昧である。このことを積極的にとりあげて，その全体という概念は，人々がその共通の像を心に描けないという négatif な事実をいいかえただけのもの，ここから数学への真の寄与は期待しえないというのがボレルの言い分であると思われる。

5. 選択公理

前 2 節に述べたことはすべて 1898 年までの意見であり，従ってこの彼の眼に 1904 年のツェルメロの「証明」がいかに映ったかは，問うまでもなく明らかである。

ところでこのことはまた次のようにも考えられる：整列可能定理が証明されると，集合論における理論的効果 (effet) は直ちに多くの場所で見出された。しかしそれは大抵ボレルの黙殺した領域での話であって，それは彼の関心を惹かない。勿論その影響は彼の関心するところにも追々及んでくる，実際『関数論』初版には選択公理の無意識的な用例がそこここに見出されるのであるが，ここには彼なりの例えば effectivement énumérable のごとき口実があって，結局選択公理の「効果」もまたボレルにおいては effectif の市民権を保証しなかったのである。

さてボレルの注目したこと，それは例えば連続体のような具体的なモデルについてツェルメロのいわゆる「部分集合全体」とか「一つの規則」とかがいかにして認められ，またそれがいかに整列させられるかであった。上の準備によって，どんなことがどんな形で問題となったかは大体明らかであろうが，念のため『関数論』第 2 版付録 IV の III「ツェルメロによる整列連続体」，IV「集合論に関する五つの手紙」から二三の引用をしておく。

先ず彼の結論は《その選択が超限的にみて，より無数であり，かつ実際的には

逐次的選択に基づく直観的証明を複雑にしたもの，論理的道具建ての下にかくされた複雑化に他ならない》というにあった。実際，連続体の全部分集合の濃度は上述の関数濃度であって，これをボレルが認めぬことは既に述べた通りである。ツェルメロの証明では公理によって，空集合を除く全部分集合に代表を用意しておきながら，実際に証明に使われるのはその一部分なのであるが，その余計物をすてると《初めの観念的証明に逆戻りする》。ツェルメロの側からいえばそこが論理的にみてうまいのだというのであろうが，ボレルの方ではそれでは実際上無意味だといっているのである[1]。

次に「一つの規則」について見れば，《集合をあらかじめ順序づけておいて得られる選択以上に簡単な選択規則が，たやすく与えられるかどうかも問題》で，《$0, 1$ の間の有理数からなる極めて簡単な集合 M についてこれを自問自答してみたが，M の空でない各部分集合 A に，その代表要素 a を関係させるべく頭に浮かぶ方法は，いずれも M を整列させるべき或る規則が既に立っていると考えてのことであった。……少なくとも自然にあらわれる方法はそうである》。これを要するに《ツェルメロの「証明」は逐次的選択を，それより数多い超限的な同時的選択でおきかえて，この後者から再び選択を行うことができるのだということになるが，それくらいならば，例えば，$\sqrt{2}$ や π のような数の小数展開を克明に一桁一桁計算せしむべき規則にかえて，**すべて**の小数を書き尽くして（!?）一望の下に捉え，与えられた無限個の条件に従ってこれらの間から $\sqrt{2}$ や π に等しいものを選び出すということもできたであろう》。勿論これに対してツェルメロの側からも，彼自身を初めいくつかの再批判が出された[2]。しかしその立場上，彼らが選択すべきものの数の大小は始めから黙殺し，関心の中心をもっぱら「一つの規則」においたのはけだし当然であった。この間の経緯を詳しく述べるのは別の機会に譲るが，要するにツェルメロが強調したところは，出来上がった公理の数学的意義を措いて他になかったのに対し，ボレルの関心はもっぱら人間はいかにしてその公理を探りあてるか，またそれは人間にとっていかなる意味をもつか等の公理以前の問題にあった。両者の論点は初めから互いにピントがはずれていたのであって，また仮にこれを合わせたとしても，事は所詮数学に対する先験論的見解と経験論

[1] 「カントルにおける数学と哲学」補説 6 参照。なお連続体の問題 $\aleph = \aleph_1$？ の解けぬことも，当時，論者によっては選択公理の価値を疑わせたが。ボレルはこのことにはふれていない。

[2] 特に Zermelo, Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, (*Math. Ann.* Bd. 65, 1908)，§2。

的見解との対立という永遠のアポリアの中にふみこむだけのことであったろう。

この対立のうちでもアダマール (Hadamard) とのそれは最も顕著であり，これが、「五つの手紙」（付録IVのIV）の主軸であった。アダマールにいわせると，ボレルのいう「規則」は，例えばリーマン (Riemann) 以前の数学者が「関数」を数式によって表示されるものと解して，リーマンを批判したに類するもので，学問の進歩はこれを捨てるところに起こるべきものなのであった。そして選択の可能性については，無数に要素のある中からその一つを取り出すのを躊躇するような取り越し苦労はやめて，現に要素が「有る」のだから，どれでもよいその一つを「考え」ればよいといいきるのである。「存在すること，それは存在することさ」というわけである。勿論ボレルの仲間も黙ってはいない。「どれでもよい，有るものを一つ」といわれても，議論の間ずっと考えているものが，その何だか分からぬ「或るもの」と同じだというのは，どうして知るのかという類である[1)] 。

この種の論争は果てしもなくつづき，しかもこれだけではそれほどの意味もあるまいが，これとは別に，この論争の中で選択公理の信徒，異教徒の間に，信，不信諸々の態度の中から，あるいは厳しくあるいは緩い様々のニュアンスが看取られる事実があって注目をひく。われわれは今回この点には深入りしないが，「互いに言葉の通じあわない二つの人間性の対立」等と呼ばれているこの断絶も，今少し新しい光の下に，即ち「断絶」の中に隠された階段や坂道を求めながら再検討されてよいのではあるまいか。実際，ボレル達は自らを réaliste（実在論者）と呼び，ツェルメロ達を idéaliste（観念論者）と呼ぶが，《réaliste》もまた無限の学たる数学の中では或る程度 idéaliste たらざるをえないし，《idéaliste》にもそれなりの実在性は伴っていよう[2)] 。むしろ観念と実在との二つの世界を，あるいは観念に濃くあるいは実在に濃く彩りながら橋架けているものが数学だとはいえぬものであろうか。

とにかくこのような問題を潜め，このような経路を辿ってボレルの effectif は醸成されていくのであるが，しかもなお確実な固まりは見せていない。その前にあった今一つの障害，それがツェルメロに遅れること 1 年，1905 年のリシャール

[1)] **補注**　この「有る - 或る」の議論は後に「一価化問題」に発展する。例えば平面ボレル集合の縦線上の切り口から各一点を「選んで」作られるグラフは必ずボレル集合かという類の問題（この答は否）である。（「フランス経験主義の数学思想」補説 4

[2)] ポアンカレ (Poincaré) のごとく，idéaliste，réaliste の呼び名を相互に交換してしまった例さえある（『晩年の思想』第 5 章末尾参照)。

の逆理である（「数学史における逆説の役割」6 節参照）。

6. リシャールの逆理と effectivement énumérable

リシャールの逆理は有限的定義に関してあらわれる。その概要は次の通りである。有限的に定義しうる数学的対象，例えば有限的に定義しうる全ての十進小数の集合 M は可算かつ整列である。即ち先ず定義に要する文字の数によって，次に同数の場合には辞書式に abc 順によって，整列させればよい。しかし一般に小数の可算整列集合 A からは対角線論法と同様の方法で A に属さぬ無限小数 α が作られ，しかもその定義（「数学史における逆説の役割」6 節）には対角線論法と同じで百字もいらない。A として上の M をとれば，M は有限定義的十進小数の全体であり，同時に M に入らぬ有限定義的十進小数 α があるために矛盾である！　ボレルは《ここに与えられた多くの説明に満足せず》これを《形而上学的考慮も純理論的考察も混えずに現実性 (réalité) の範囲において》とり上げた。そして先ず《私が考えているのは，有限個の語によって曖昧なく定義される小数だということを明確に》せんとした。ここにいう「曖昧なく」とは《二人の数学者がその定義を聞いて各々が同じ数を作りうること，即ち小数の各桁に同じ値を与えうること》を意味する。

さてこの厳密な意味の下で，有限的に定義される小数の集合 E は確かに可算である。しかもこの E については上のごとき逆理はおこらないとボレルはいう。この E を前記 A として α を作っても，α の定義は「曖昧なく」というわけにはいかないからだというのである。その理由は，E の個々の要素は曖昧なき有限性をもっているが，要素の系列たる E そのものを貫くべき有限的定義がないために，正にそのために α の定義に曖昧なものが潜入してしまうというにある。実際，曖昧なき有限性ある定義にも「π の十進展開で 7 と 8 とを互いに置き換えてえられる数が代数的である時に限りこれをとる」というような，未解決の問題を下に踏まえたものがあって，《E の effectif な形成は実現不能なのである》。換言すれば E は可算であるけれども《effectivement énumérable ではない。即ちその各要素にその整列番号を曖昧なく添えしめるに足る方法を，有限個の語によって示すことにできない》というのである[1)]。

[1)] **補注**　リシャールの逆理とゲーデルの決定不能定理の関係については「数学における無限と有限の弁証法」の他，「ゲーデルの決定不能定理」を参照。

ボレルはこうして《リシャールその他の逆理のすべて[1]に与うべき答え》を掲げ，同時にこれによって彼の《effectif》に一つの決定的な意義を与えたといえよう。事実，以後彼がこの言葉に与える意義はことごとく effectivement énumérable を予想しており，またここに顕著にあらわれた「具現性」が，これに続く人々の《effectif》の性格を決定したともいえるであろう。しかしわれわれが上来見て来たその効果性の面は，少なくともボレルに関する限りなお十二分に残っていて，私にはむしろこれが彼の effectivement énumérable なる命名の真意ではなかったかと思われる。第 2 節でも述べた通り，この時までのボレルが必ずしも確定的な意義をこれに与えていなかったことを，再び思いおこすべきであろう。この事情の下で単に現実性を表すだけなら，réellement でも explicitement でもよかったのではあるまいか。われわれは最後にこの点を検討することにしよう。

7. 効果性からみた effectivement énumérable

初めに多少準備的考察をする。ボレルが濃度や順序数の一般論を illusoire（幻覚錯覚的）と呼んでしりぞけたことは既に述べた。しかしこの逆手をとって，たとえ effectivement énumérable にせよ，あるいはまた数学的帰納法のごときものにせよ，無限者のそのような把握の中に illusoire は何もないのかと問いかえすことはできないであろうか。例えばラッセルの無限列車の逆理（「数学史における逆説の役割」)「無限に長い列車があって，各客車は前の客車が動いて少し後に初めて動きはじめる時，この列車全体は果たして動き出すであろうか」という問いをもって，これに立ちむかうこともできるのではあるまいか。第一の問題は無限の列車が「ある」とは何かだが，一たび事をこのように厳格に扱うならば，無限者の現れる以前にも沢山の問題があるであろう。それらの多くは恐らくどこかに無限者を隠在させているのではあろうが，とにかく現実の世界から数学への途は予想以上に険しいように思われる。

いささか余談になるが，われわれは簡単に，点は位置のみあって大きさはない等という。これもまた illusoire であろう。現実に描かれた点は必ず大きさをもち，

[1] ただし《その他の逆理のすべて》は勿論当時までに，現にあらわれたものを指すとしても，(従って可能性の議論たる今日の数学基礎論からの苦情は当然としてあえて問わぬにしても）依然として問題を含んだ述べ方であろう。ラッセル (Russell) の逆理のごときいわゆる論理的逆理は，例えばその濃度等にあらわれてくる《論理性》のゆえに初めからすててしまうのであろうか。なお，リシャールの逆理の種々の解釈は手近くはポアンカレ『科学と方法』第 2 編第 5 章，高木貞治『続数学雑談』等を参照。

しかもわれわれの眼は構造上極めて接近した小さい二つの対象を識別しえない。「点」は茫漠たるこの拡がりの中から，あるいは極限概念として，あるいは境界概念を援用して抽象されたものでなくてはならない。ところで実験的に，今日いわゆる「点」が幾何学の体系や論理学とからみあって生まれてきた過去をしばらく無視し，上の茫漠たる拡がりを「点」と呼ぶことにすれば，ここでは例えば相等の三原則[1] のうち，推移性だけがみたされなくなることがありうる。実際茫漠たる点の相等の定義は完全なる重なりによるわけにはゆくまい。（もしそうするならそれは茫漠ではなく，れっきとした境界をもっている！）そこで両者が何となく重なりあう状態をでも「相等」と呼ばねばなるまい。これはわれわれの眼にとってはむしろ自然なことでさえあるが，こうなると点 a, b の「相等」と a, c の「相等」とから二点 b, c の「相等」——重なりあい——は必ずしも出てこない。

点をぼかして推移性だけを判然と残すのは不公平ではあるが，とにかく眼にうつる「現実の点」に固着することがいかに議論を錯雑させるかはこれで認められよう。認識の素朴な段階においては，茫漠たる点も自然であり，普通の対象に対する推移性もまた自然である。この背反する二つの自然は，一つの恐らくは唯一の途として「idéal な点」をとることによって止揚され，ここに議論の簡潔と応用の広さとが獲得されるのである。勿論，恐らくすべての数学的認識は何らかの意味でこの途をとっているのであろうし，数学基礎論における論理主義，形式主義，直観主義，更にはボレル達にしてもことごとくこの例外ではあるまい。しかし idéal は危くも illusoire と相接する。ボレルはツェルメロやヒルベルトの「idéal」を「illusoire」と見た。また少し後れてはブロウエルの「idéal」を，illusoire ではないが無効果なものとした。そしてその彼自身は《われわれの想像の及ぶぎりぎりの可能性》として，しかも《砂上の楼閣でなく，関数論の進歩に effectif な寄与をした直観》の産物として，例の effectivement énumérable を採ったのである。この間の事情は『関数論』付録 IV の VII「数理哲学と無限」，同じく VIII「数学的無限と実在」と，付録 VII「経験論的論理への賛否両論」とに詳しい。

ボレルの意見の中で上の「茫漠たる拡がり」に対比させられるものは《いかなる無限者をも認めない絶対的有限論者[2] 》であろう。《彼らの立場は，論理的には

[1] 反射性 :$a = a$，対称性 :$a = b$ ならば $b = a$，推移性 :$a = b$ かつ $b = c$ ならば $a = c$

[2] 年代的にみてこの時の相手はベールあたりでブロウエルではあるまい。

非常に強固であるが，実際上は極めて弱い》。解析学からの無限の排除は混乱を招くだけで，早い話が無限級数の公式は使えなくなる。なるほど，無限級数やその背後にある自然数列にも一種の illusion それもいわゆる超限の二律背反と類似のそれがあることはベールによって指摘されている[1]。しかし《現実性 (réalité) の領域に立って，哲学でなく数学の理解と発展をのみ考える者が実際やっていることだけを問題にするならば，この障害は決定的ではあるまい》。そればかりでなく，《無限論が有限の研究に何らかの光明をもたらすからこそこれを弁護するのである。……例えば数理物理学を見よ。分子の不連続な体系は連続面や連続固体でおきかえられる……その方が研究が簡単なのである》。

しかしだからとてツェルメロ式の余りに超越的な無限にまで飛躍しては行きすぎである。《超限の心像 (idée) を思い浮かべようとしても，私には effectivement énumérable しか思い浮かばない。超限論議は私にとっては何らの実在性にも対応せぬ抽象的性格しかない。私の想像力が乏しいのかもしれないが，それが人々の間に共通の心像を生まず，従って実際上数学に何の役割も果たしていないことだけは確言しうる》。彼の念頭には，再びかの超限の二律背反のようなものが，（illusoire として）ただよっているのである。結局，それらの超越的方向から現実的な《発見が得られれば，それと手を握りもしようが，今のところわれわれのいう集合論によって，数学に現実の進歩を実現 (effectuer) した人達が仲間にいる》ので満足だというのである。ヒルベルト達の形式主義の数学についてもほぼ同様，《この種の論理的見地では結論の価値は口先だけで，実在とは関係がない。仮に古典数学を実在とよぶとしてもそうである》。《論理的に無矛盾なことは科学を創っていく働きを特性づけるものではない》。

この間しばしば物理学との対比が行われるが，この対比の或るものは彼の言によれば《人為的関係でなく，物理学の発展に伴って深められていくであろう》ものなのであったが，詳細な説明がないためその内容がよく分からぬのは残念である[2]。しかし消極的ながら，この種の対比が effectivement énumérable に関連して

[1] 標語的にいえば，可算が第 2 級順序数を尽くしきれぬように有限も可算を表しきれぬということである。

[2] 数学における有限語法には物理学における少数語法が対比される。ある室内の気体分子の数は「有限」でこそあれ，物理学的には実際上無限である。物理学は少数語法で扱える現象に限られているが，数学も有限語法に限られねばならぬ。数学的無限と物理学的無限とのこの種の関係は人為的 (artificiel) でないというのである（『関数論』付録 IV の VIII「数学的無限と実在」)。なおボレルの *Introduction géométrique à quelques théories physiques*（物理学の定理のための幾何学序説）(1914)Note VII を参照。

行われたという事実だけは見逃してはなるまい。

これに反して次の対比は明快である。原子の実在は実験で確かめられているが，それにしても全原子の運動方程式は書けない。ここからは実在と関係のない色々な理論が，辻褄だけはあわせて作られるだろう。しかし《原子が真に「実在性」を獲得するのは，それを考えることによって理論が簡単になる時以後である[1)]。しかもあくまでこのイメージのどこまでが illusoire でないのかは考えなくてはならない》。これはこのままで集合論における effectivement énumérable の意義を物語っていよう。

ブロウエルが問題になるのはこれから十二，三年の後，ワヴル (Wavre) やレヴィ (Lévy) が排中律の問題を effectif に関する議論としてとり上げたので，ここでも少しふれておく。この時，上の二人の effectif は既に大なり小なり具現的解釈の強いものであったが，ボレルはこのたびは《情熱をもやさなかった》。即ち，フェルマの定理やオイラーの常数の超越性やの命題から，そこで問題にされた態の取り扱いでは《形式的でなく現実的な結論は出そうにない。即ち数学の他の分野と結びついて新しいものが加えられる見込みはない》。論理屋はいつも数学を主観的に扱って，客観的な科学と考えていないと彼は慨嘆する。《数学は論理的演繹の単なる集積でなく，算術は精密な数値計算の集積ではない。整理と選択とが大切である》。その中から残されていくものがクラシック，それらはただ一本の演繹の糸ではなく，《数学の各領域をつなぎながら，全体として数学という豊かな織物をおりなしている。あえていうならばワヴル達のとり上げた問題は一本の糸の方で，残っていく方には入らぬだろう》。

このように見てくると effectivement énumérable の中にボレルが潜めた真の意義は，具現性よりはむしろ実効性であったとしてもはなはだしく不当ではなさそうであるが，それが真に効果的な概念であるかという問題になると多少の疑問なしとしない。例えば（選択公理をこそ使うにせよ）普通の可算集合ではその無限部分集合は常に可算であるのに effectivement énumérable の集合 E の部分集合には effectivement énumérable でないものの方が「多い」のである。自然数全体という E を基にしてその全部分集合を考えれば，これは自明であろう。このことが「点」

[1)] ここにはマッハ (Mach) の思想との類似がみられる。しかし今日のマッハの後継者とは，次のブロウエルないしブロウエル解釈に対する彼の見解から推して，必ずしも協調しえないであろう。

に対する「茫漠たる拡がり」の醸し出す混乱に相当するか否かは，今日なお行われている。《整理と選択》に期待しつつ疑問符のまま残しておく他はあるまい。しかしわれわれにとって大切なことはこの概念の運命如何ではなくて，これを導いた基調自身であった。その限りにおいてわれわれの考察はここに一応の落着を見せたというべきであろう。 (1952.9.29　擱筆)

［**付記**］　この論文ではボレルの姿勢について論じただけで，解析学，確率論等，彼の広範な実質的業績には触れなかった。少なくともボレル集合（「フランス経験主義の数学思想」補説 3）と選択公理（「カントルにおける数学と哲学」補説 2）の説明はあるべきだったと思う。 (1998 年 3 月)

補説. Effectivemeht énumérable をめぐって

この概念（‘ef–可算’ と略）の初出は「集合論の逆理」(1908,『関数論』付録 IV–VI)で，そこでは可算集合 $M(\ni m)$ が ef–可算であることを，自然数の集合 $N(\ni n)$ との**一対一対応**が，m の原像 n まで有限の語法で曖昧なく確定することと定義されていた（同書，p.163)。

ボレルがこれを考えたのは，リシャールの逆理での問題の定義（「数学史における逆説の役割」参照）が文言の上では有限的だが実は無限語法だとして逆理を避ける意図だったが，一対一対応では代数的実数の集合 A さえ排除されかねない。実際，A の可算性は先ず元を整列し，重複する元を消去していくので（「数学における無限と有限の弁証法」補説 2)，重複元の消去は「有限語法で曖昧なし」と言えるかどうか，普通はこれはベルンシュタインの定理 ($A \subset B \subset C$ で A と B の濃度が同一なら C の濃度も同じ）によって証明されるが，ともかく彼は「この種の難点はしばらく無視して」と書いている（同書，p.163)。（ボレルは 1897 年にカントルに会い濃度比較の可能性を質問した際，当時未発表だったこの定理のことを知らされたと書いている（『関数論』付録 1))。いずれにせよ，ef–可算はやがて対応 $n \to m$ の有限語法性が強調されるようになって（同書，p.218)，今日に到っている。

ゲーデルは同じ逆理に関して，対象言語とメタ言語を峻別して決定不能定理に致る道を拓いたが，ボレルの ef–可算の概念もまた理論性と具体性の谷間に生じた本質的問題で，その見識が記述的集合論を導いたと言っても過言ではない。

PDF 化にあたって

本 PDF は，

村田　全『数学と哲学との間』（1998 年 2 月，玉川大学出版部）

を元に作成したものである。

村田全先生のその他の著述は

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

`http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html`

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

`http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs`

を御覧いただくか，書き込みください。