

## 集合論の背景

村田 全

カントルの前半生における代表作と目される論文に、

「直線状の無限点集合について (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*)」

というものがある。(カントル著作集 (*Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*) (一九三二、再刊一九六六)、pp. 139-246) 一八七九年に発表された第一部から、一八八四年に発表された第六部まで、全体として五年がかりの論文で、いささか読みにくい部分もあるが、彼が集合論によつて何事を企てていたかが推測できる点で、なかなか貴重なものである。今回はこれを種にして、カントルの集合論の背後にある思想的契機とでもいうようなものについて、いささか無責任な話をしよう。

集合論というのは、数学の中では哲学に最も縁の深いはずの分野だが、現在それが哲学の方で問題になるのは、論理学や数学基礎論と関連する問題に限るといつてよい。しかしカントルの元来の意図においては、もう少し大きいことが考えられていたと思われる節がある。というのは、カントルの書いたものの中には、集合論を手がかりとして壮大な哲学―神学体系を作ろうとした形跡の見えるところが、かなりあるからである。デカルトにおける解析幾何学と方法論との関係のようなことさえ、ここでは思いおこされるが、ともかく、このカントルの意図は『著作集』所収の哲学論文や、同じく神学者、哲学者との書翰などからうかがえる。この種の書翰には未公開のものがなお

なりあるらしい。

H. Meschkowski, Aus den Briefbüchern Georg Cantors (カントルの書翰控から) *Archives for history of Exact Sciences*, vol. 2, 1966はその一例である。また現に、今述べている論文でも、第三部（一八八二年）や第五部（一八八三年）の或る場所に、そのような推測のできるところがある。次にそのことについて述べよう。

まずこの論文の書かれた時期はというと、すでに可付者と連続体との二つの濃度が知られ、かつユークリッド的な直線も平面も $n$ 次元空間も、すべて同じ濃度であることの示された直後である。この論文の標題が「直線状の無限点集合」となっているのは、すでに何次元でも濃度が同じである以上、一切は「直線状」の場合考察ですむという推測があつたためであるらしい。

さて本文第一部、第二部では、直線連続体の正体を明らかにするべく、導集合、和集合、共通部分などの概念が初めて導入されて、点集合論的考察が進められる。ところが、第三部になると事情が一変する。すなわち対象は「直線上」の点集合だけには限られなくなり、また必ずしも「点」の集合と限定しなくてもよいというふうになって、ここに彼の意図が顔を出すのである。曰く

「集合論は、仮に数学の範囲内だけに限定して考えても、数論、関数論、幾何学を包括するもので、それらの諸理論を、より高い統一の形にまとめる。そして連続者も不連続者も同一の見地から観察されることになり、「濃度という」共通の尺度で測られる」（『著作集』一五二ページ）

もちろん、集合論を数学の範囲に限定しないというのがどういふことかは、ここではまだわからない。しかしともかくこれはかなりな大風呂敷であつて、推察するところ「連続者」、「不連続者」というのも、古来の自然哲学で論じられた数、連続、無限などのことと関係するであろう。このことはガリレイに関連して、もう少しあとで述べよう。

上の引用と同じように、なかなか気宇の広大な内容のことは、第五部の本文にカントルの与えた註の中にも見出される。

「集合 (mannigfaltigkeit または Menge) とは、一者 (Eines——原文のまま——) と考えられるところの多者 (Viele) であり、これによってプラトンのエイドスまたはイデア、あるいはプラトンの対話篇『フィレーボス』にいわゆるミクトンなどに近いものが定義されたと信ずる…」(『著作集』二〇四ページ)

念のために断っておくと、「一と多」というのはユークリッド『原論』の第七卷(整数論の卷)の冒頭にある定義にまさに対応する形、また哲学史の上では、(ゼノンの逆理で有名な) エレア学派(前五世紀)が大きく取り上げたテーマとして知られているが、「一」を実体とし「多」を現象とするとか、「一」を神とするとか、時により人によって、いろいろな内容が与えられている。要するに、もしこれを一元論と多元論という形のテーマに拡大したりすると、哲学史の全体さえ覆われるだろうと思われるような大きい題目なのである。もともと、いくらカントルでも、集合論によって、古来の一元論と多元論の「統一」までを計っていたかどうかは疑問である。

事はやや前後するが、この論文の第五部というのは、カントルの無限論における数学と哲学との接点を示す最も重要な文献の一つである。しかも一八八二年一〇月二日付のデデキント宛の手紙には、この内容についての記述は全くないのに、一月五日付の手紙には、(神がささやいたという意味の書き出しにつづいて)、この第五部第一節の内容が延々と書きつらねられているという事情がある。すなわち、彼の思想が一カ月ぐらいの間に固まったらしいということまで、これによって判明するので、話は一段とおもしろくなる。

第五部の全体は、別に「一般集合論の基礎 (Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre) とくう (第一) 第六部の全体のための標題「直線状の無限点集合について」より格段に広い) 標題をもち、『著作集』の中では

四四ページを占めている。そのテーマは彼のいわゆる「実無限」、内容を汲んで言えば超限順序数論で、全一四節のうち第一節から第一〇節までは大部分が哲学的議論である。その間、カントルは無類の博識ぶりを発揮して古来の哲学者の無限論を続々と吟味し、特にアリストテレスの無限論を大いに攻撃する。

カントルのアリストテレス攻撃はこうである。「アリストテレスは有限の数のみが存在するということを先ず認め、それだけを忠実に守って、無限者は存在せずといつているのだ。これは論点先取 (*petitio principii*) の誤りに他ならない」けれどもアリストテレスの方では、恐らくエレア学派のゼノンの逆理などを頭におき、現代流に言えば、集合と測度との逆説的な関係——大きさのない点の集合として長さや広さや体積が生じる——を避けることなどを勘定に入れて、「実無限存在せず」の論を唱えているはずなのに、カントルの方は実質的にその点には触れようとしない。従ってこれではアリストテレスがウンと言うはずはないであろう。

これに対するカントルの「実無限存在す」の論は、本人が（自然数列の延長——今日の超限数列——という形で「実無限（すなわち超限順序数）」を見ているつもりでいるだけに、こんな明白なことがわからないのかと、ガンガン主張される。しかし正直なところ、アリストテレスであれ誰であれ、そういうものを「見て」いない人に、そんな話の通ずるはずはなく、かえってそれこそ論点先取だ——無限者の存在を前提して、そこから無限者の存在を導いた——と逆襲されるのは必然である。カントルのこのアリストテレス攻撃のかげには、旧師であつて今やカントル攻撃の筆頭になっているクロネツカー教授への鬱憤も秘められているのだが、こういう議論の立て方では、いよいよカントルへの風当たりが強かったことも、無理とはいえないであろう。

これらとは反対に、カントルが大いに関心と共感を示すのは、スピノザ（一六三二—一六七七）、ライプニッツ（一六六四—一七二六）、ボルツァーノ（一七八一—一八四八）の三人である。我の強いカントルのことだから、こ

の人たちに対しても結局かなりの苦情を申し述べるのだが、それにしても特にライプニッツの单子論は、カントルの哲学が、目指してやがて超えようとする目標のようなものであるらしい。今説明している論文の他にも、彼はしばしばこれに言及し、自分の集合論やそれに基づく自然哲学的構想を、この单子論と比べている。話がこままでくると、单子論や、スピノザ、ボルツァーノなどについても一言あってしかるべきだとは思いますが、事がまことに面倒になるので、これは（有無定かならぬ）別の機会にゆだねる。（なおこれについては「集合論史のひとこま」を参照されたい）

今度は、今問題にしている論文第五部の中で、カントルが名を引用していない学者について少し触れてみよう。これについても、ちょっとおもしろいことがある。

この種の人物の筆頭はヘーゲル（一七七〇—一八三一）である。カントルの順序数の作り方——生成原理は、この論文に現れたところでは、一つの対象に（後者として）新しい対象を添加することと、限りなくできてくる対象を一括し、新しい対象として追加すること、との二つである。（実はこの他に、濃度の上昇に潜在的に、かつ私見によれば極めて本質的に関係してくる抑制原理という第三の原理があるが、今はこれには触れない。）カントルはこの事情を説明するのに、順序数の列は「自らの中に生成原理をもち、それによって必然的にどこまでも無限に発展する」という意味のことを持出してくる（『著作集』、一四八、一四九ページ）。これはどうもヘーゲルの思想を思わせる言葉だが、実をいうとヘーゲルを思わせるのはここだけではない。カントルは自分の「実無限（超限順序数）」を、「悪しき無限（schlechtes Unendliches）」ではないと言っており、これは明らかにヘーゲルの用語である。すなわち内容的にも表現の上でも、カントルの中には確かにヘーゲルの思想が影を落していると思われるのに、少なくとも今考えている論文の中では、ヘーゲルの名は引用されていない。これも例によって我の強さのせいなのか、それ

とも他に何か事情があるのであろうか。

パスカルの数学的帰納法のこと、全く触れられていないことの一つである。しかし、これはどうやら、この方面におけるパスカルの仕事、当時はまだ世間に十分知られていなかったせいではないかと思われる。

これに比べて、一段と不思議なのはガリレイである。ガリレイは『新科学対話』の第一日目の対話の途中で、実に興味ある無限論を展開しており、それは、自然哲学的側面までを含めて、或るところまではカントルの思考とよく似ている。ところがカントルの『著作集』全体を通じて、ガリレイの名は徹底して出てこない。(一カ所だけ脚註に出ているが、それはカントルの引用した書物の内容の一部である。他にはどうも見当たらずに思う。) カントルがあれば古今の学者の無限論をあさりまわっているだけに、これは少々奇妙なことだと思われる。

もつとも、カントルとガリレイの無限論は、その目のつけどころにおいて非常に近い割に、それに対する対処の仕方、点では、まるで違っている。例えばガリレイは自然数の集合と平方数の集合との一対一対応や、ある種の図形の間の一対一対応などをもち出した後で、このことを、「われわれが限られた知性をもつて無限を論じ、限界のある有限者に付与するのと同じような性質を、無限者にも付与するために生ずる困難な問題」であるとして、いわば消極的に事を運ぶのに対して、カントルは周知のように、同じ事実を積極的に取り上げて積極的に集合論を創っていくからである。

ところが、ここに、もう一つおもしろいことがある。ガリレイはこの無限論を、真空の存在というようなことと結びつけ、物質の凝縮力とか粘着力とか、物が物として形を保っていることの根拠づけなどにまで、その無限論を関連させて論ずるのだが、このたびはカントルの中にも、いささかこれに似た発想が見られる。たとえばガリレイは、車輪が回転するとき、同心の小円周が全体として、車の走った距離だけの長さ引きのばされることを説明して、「線分を無限に多くの、無限に小さい不可分の部分に分割した場合には、有限の長さをもたないが、

無限小で、かつ不可分という隙間を、無数にその間に挿入していけば、その線分はいくらでも延びる」というようなことをいう。あるいはまた「例えば金の小さい塊りは、有限の大きさの隙間を挿入しなくても、非常に大きく伸ばせるが、それは金が無限に多くの不可分量からできていると考えればよくわかる」などという。数学上の「連続」「不連続」の概念は、ここでは自然哲学的な物質概念と危くも境を接しているわけである。一方、カントルの集合論の方にも、これにまけずおとらずの自然哲学的展開が企てられていて、この点、カントルとガリレイとは、約三百年の年月をへだてて、意外に似たところを示している。このことも「集合論史のひとつま」で触れているが、ともかくカントルの集合論の目標が、彼本人の意図においては、今日の数学的構造の基盤になる集合概念の形成というようなことと、少々違っていたらしいことは注意しなければならない。

カントルの夢は今のところ夢のまままで終わっている。というよりも、天上高く舞い上がるような彼の無限論をそのまま空転させず、これを地上にとどめて、特に論理と存在との一致する一種の理想郷を現前したところに、デデキントに始まる現代数学の真価があると見るのが本当であろう。しかしわれわれは、この理想郷の構築を支えたものとして、すなわちその構築が十分に羽根を伸ばしてできるような舞台——集合論的存在論——の提供者として、カントルの超限論が必須不可欠の条件であることを銘記すべきである。しかもその理論を用意する仕事は、その中にアリストテレス以来の伝統的な論理ならびに存在論への反逆が含まれていただけに、カントルほどの特異な創造力を以てするのでなければ、建設はもとより、企画されることすらなかったのではないかと思われる。そしてこのところ、現代数学の世界が、古代や近世の数学ないし哲学を背景にしなから、なおかつそれらを格段に超越しえた一つの大きな理由なのである。カントルの夢には、その本来の意図とは少し違ったところに、極めて大きな可能性が秘められていたとも言うべきであろう。





- 
- 村田全 『数学史の世界』（玉川大学出版部、一九七七年三月）所収。
  - PDF化には`LaTeX2ε`でタイプセットを行い、`dvipdfmx`を使用した。

村田全氏のその他の著作については、

科学の古典文献の電子図書館 「科学図書館」

<http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html>

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内、その他「科学図書館」に関する意見などは、「科学図書館掲示板」

<http://6325.teacup.com/munehiromeda/bbs>

を御覧いただくか、書き込みください。