19–20世紀の数学

科学図書館叢書

村田　全

科学図書館

数学講座第18巻　『数学史』

19–20世紀の数学

村田　全

はしがき

多くの学問は，その背後にある伝統の影響を受けながら，かつそれに抗して新たな伝統を打立てながら，現下の問題に立ち向うものである。もとより数学もその例外ではない。というよりも，数学はその最も顕著なものの一つだと界われる。数学の本当の意味での普及を意図して企てられた「数学講座」に『数学史』一巻が加えられたのは，この意味で極めて自然なことであり，当然本書もその趣旨に沿って編集された。

本書において数学の歴史は，古代（第 I 部），近世（第 II 部），現代（第 III 部）の三つの時代に分けて展開されている。しかしこれは，いわゆる通史とはかなり違ったものである。実際，いくつかの注目すべき史実が取り上げられていないのみでなく，例えば中世など，或る時代全体が触れられずに終った例も少なくない。さらに上記の三部にしてもそれぞれが別個の著者によって独自の形で書かれており，互いに或る種の関連はもっているものの，それらは互いに独立のものと見ることさえできる。しかもこの構成は初めからかなり意識的に採られたものなので，まずこの間の事情について一言しておく。

本書の企画は，著者とその分担を含めて，「数学講座」の話が始まった 1968 年の時点で既に決定していた。本書を全体的な通史とせず，各部の内容構成も担当者の裁量に委(ゆだ)ねるという形は，三人の共著者の共通意見としてその時点で決定されたことである。そしてこの決定の裏には，学問としての数学史がまだいかに未開拓であり，またその実践がいかにむずかしいかということについて，三人に共通した認識があった。実をいうと，この同じ認識の下で，三部に共通なテーマとして例えば「無限」という問題を立て，そこに考察の対象をしぼるということも検討されたが，特に第 I 部の場合には「無限」が正面切っての問

題になりにくいという事情があり，これも必ずしも全体の方針とはならなかった。ただ第 II 部，第 III 部では結局この考えが全体の基調になっている。

このように本書は，各部の担当者がそれぞれの問題意識と方法とに従って構成した書物ではあるが，その反面，本書を一個の統一ある書物としてよい理由も当然のことながら存在する。上記の通り，学問としての数学史は若い未開拓の領域であり，特に数学の学問的形成を数学的見識と歴史学的方怯とを用いて論ずるという側面は，従来比較的重んじられていなかっただけに，これをいささかでも補いたいというのは，本書の著者たちに共通する根本的な願いであった。もとよりそのような仕事は一朝一夕にでき上るはずのものではなく，本書に見られる理想と現実の隔たりにしても，少なくとも私の担当した部分については自分でよくわかっている。しかしこうした理想に向っての努力こそ，本書を一貫する最も基本的な性格であり，更にこれを将来につなぐ要素でもある。三部独立の方針にしても，結局はこのような意味で意識的，積極的に採られたことなのである。もし本書が数学史のいくつかの面に新しい光を投げかけることができ，数学ないし数学史についての人びとの知見に何事かを加えることができるとすれば，われわれが初めに抱いた最小限の願いは満たされる。もし更にこれが何かの機縁となって，本書に記されたところを継承，超克し，学問としての数学史に本格的に取り組もうとする読者が現われるようならば，著者としてこれに過ぎた喜びはない。

それにしても，本書の完成が予定より大幅に遅れたことと，三部相互の問の連関が十二分に取れなかったこととは，編者というよりも世話役としての私にとって不本意なことであった。これには，私が最近までかなり長い間日本を離れていたという事情なども働いているのだが，いずれにしても最終的には私の非力の故として読者の寛恕を乞う

次第である多大の迷惑をかけた筑摩書房についても同様である

本書がともかくもこのように完成する迄には，直接間接に多くの方々の学恩を受けた。一々お名前は挙げないが，その方々への感謝の気持はつねにわれわれの中にある。また本書の企画から準備期間にかけては，当時筑摩書房におられた松田寿氏，吉崎洋一氏，次いで今日までは筑摩書房，梅田宗宏氏に非常にお世話になった。巻末の索引は梅田氏の努力によるものである。併せて謝意を表する次第である。

1974 年 12 月

村　田　　全

目　次

はしがき …… 1
第 1 章　数学史における 19-20 世紀 …… 6
1-1. 視点の設定——現代数学史へのアポロギア …… 6
1-2. 比較の対象としての古代ギリシャ数学 …… 12
1-3. 比較の対象としての近世ヨーロッパ数学 …… 18
1-4. 古代・近世の数学に対する近代・現代の数学 …… 27
第 2 章　19 世紀的近代数学——集合論以前における無限の問題—— 36
2-1. 19 世紀的な 19 世紀数学史 …… 36
2-2. 本章における問題点 …… 45
2-3. ガウスにおける数学の変貌 …… 47
2-4. 射影幾何学の形成 …… 55
2-5. 非ユークリッド幾何学の成立 …… 70
2-6. 関数概念と極限概念 …… 83
2-7. 関数論の成立と実関数論の登場 …… 104
(a)　関数論 …… 104
(b)　実関数論 …… 115
第 3 章　現代数学の基礎——集合論の建設と数学基礎論の形成—— 122
3-1. 集合と集合論 …… 122
3-2. カントル …… 126
3-3. デデキント …… 140
3-4. 公理的集合論とフランス経験主義 …… 149
3-5. 集合論の逆理 …… 157
3-6. 数学基礎論の誕生 …… 161
(a)　論理主義 …… 161

(b)　形式主義 …… 163
(c)　直観主義 …… 166
3-7. 形式主義の夢と現実 …… 170
3-8. 集合論の多様化 …… 180
3-9. 二三の歴史的展望 …… 191
第 4 章　20 世紀的現代数学 …… 199
4-1. ヒルベルトの「数学の問題」 …… 199
4-2. 古典解析学の進路 …… 203
(a)　点集合論 …… 203
(b)　ルベーグ積分論 …… 208
4-3. 新しい数学の勃興 …… 216
(a)　位相数学 …… 217
(b)　代数系の理論 …… 224
(c)　構造 …… 233
(d)　数理科学 …… 236
第 5 章　終章——いくつかの深い疑問について—— …… 240
参考文献 …… 250

第 1 章　数学史における 19—20 世紀

第 III 部[1] の目標は，19 世紀初頭から 20 世紀中葉にわたる数学の変遷を，無限に関連する問題の展開という局面を介して考察することである。ところで「現代」を「歴史」の対象にしようという場合には——特に現代史に限ったことでもないが——，まずその「歴史」自身の性格について，多少の吟味をしておく方がよいと思われる。この第 1 章は主としてそのためのものなので，第 2 章以下の読後に改めて読み直す方が適当な部分もある。

以下では便宜上，集合論の成立より前で，まだその影響を受けていない数学（時代的には 19 世紀数学の大部分とほぼ一致する）を近代数学と呼び，集合論の成立（を含めて，それ）以後の数学を現代数学と呼ぶことにする。もちろんここだけの呼び名で，しかもその間に明瞭な区別のつけにくい場合もあるけれども，ともかく前者を第 2 章で，後者を第 3 章以下で敢り扱う。

1-1．視点の設定——現代数学史へのアポロギア

歴史と現代との関連　最初に，歴史に対する現代の反映をどうするかという，やや哲学的な問題を取り上げる。私がこの「歴史」を書いている時点は他ならぬ現代だから，現代数学の知識や考え方は，私の理解を介して，どうしてもこの「歴史」に影響を与える。この影響をどう評価し，またこれにどう対処するか，これがその問題である。そしてこれは，単に現代史とか数学史とかというだけでなく，そもそも歴史とは何かという深刻な問題につながっている。

けれどもここでは，いろいろ考えはするものの，結局のところ至って常識的にこれを処理しようと思う。すなわち私は歴史に対する現代

1) 【編注】本書は，筑摩書房刊「数学講座」第 18 巻『数学史』の第 III 部だけを摘出したものである。以下本文中で I, II と表記されているのは，それぞれ『数学史』第 I 部ギリシア数学（伊東俊太郎），第 II 部近世の数学（原亨吉）を云う。

の反映ということを，一方では批判し警戒すべきこととしながら，また一方では強調し推進してよい面のあるものと見なし，何(いず)れにせよ良識に頼るほか致し方のない問題と観念するのである。

その問題を警戒すべきこととするのは，過去の数学的事件を論ずるのに，事態のその後の推移を知ってしまった者の見方を，あまり振り廻しすぎては困るからである。特に，過去の出来事の中から，広いようで狭い現代的現実に直結する部分だけを取り上げ，かつ事件の歴史的意義づけや価値判断を，余(あま)りに現代的な尺度に頼って行なうことには，修史の姿勢として確かに問題の余地がある。現に数学史の専門家の中には，ブルバキの数学史[1] をその方面から批判している人もある[2]。

しかしその反面，いくら注意しても，この現代という視点はつねに付いて廻る。これをすべて切捨てようというのはまず不可能であり，かつそれが修史の正道であるかということは更(さら)に問題である。実際ひたすら過去を再現することだけが歴史ではない。数学史を書くという仕事には，（本篇の現実についてでなく，理想として言うならば），数学的見識に支えられた主体性ある史眼が必要であり，修史とは，そのような主体性の下で，過去の記録や歴史書の検討を含めて，過去の事件を取捨選択し，そこに一つの小世界を描き出すことでなくてはならない。例(たと)えば，ある理論の形成を見ようとすれば，他ならぬその問題を取り上げるところにまず一つの決定的な主体性が現われる。しかもその場合，現代的知識によってその大局を掴(つか)んだ上で，「以後の発展」を極力忘れつつ，史実の再現を図(はか)るのは，むしろ数学史の正統な道だといってよい，現代的解釈に陥ることを恐れる余(あま)り，例(たと)えば 19 世紀数学の眼

1) N.Boubaki, *Elements d'histoire des mathématiqus* (1 éd. 1960 : 2 éd. 1969, Prais, Hermann)。村田全・清水達雄訳『ブルバキ　数学史』(1970, 東京図書)。なおフルバキは一群のフランスの数学者の共通の呼び名で，その活動は 1930 年代に始まり，メンバーを変えつつ，今なお活発に動いている。

2) 例えばフランスその他の西欧の数学史家に，意外に根強くこの種の批判があるように見える。ただし私は必ずしもこの意見に同調しない。

で事を運ぶというのでは，現代に書かれる歴史としてはかえって困るのである。

ところが，そのような数学的見識は，結局何らかの数学（恐らくは現代の数学）の実態に触れ，できればその創作活動のきびしさに少しでもかかわることによって育てられるものだから，それを実際に行なうことはまことにむずかしい。このことは歴史学的見識という点についても同様であって，然るべき歴史学的修練がそこに要求されよう。してみると数学史とは，数学としても歴史としても，所詮どこかで妥協せざるをえないものなのである

しかも問題は実はこれだけではない。すなわち，第一に，数学という学問が，人間の外的な経験に密着すると共に内的な思考につながるものであるため，人間の思考の型を大づかみに見るとき，どんなに奇矯卓抜な思考法も各時代に見出しうる面がある[1)]。そこで或る事柄の源泉もどこまでも遡っていける可能性が生じて，上で述べたような，歴史記述における主観と客観との混乱についても，いちがいに簡単に割り切れぬところがある。

またそれとは別に，しばらく歴史を書く立場から言うと，上記のようにそもそも或る事柄に言及するか否かという決定自体が，文字通り決定的な価値判断なのだから，歴史を書くという仕事の中から，著者の価値判断ないしそれを支える数学的見識を切り離すことはできない。従ってそれを読む方は，或る意味では著者の価値判断や数学観を一緒に読まされていることになる。ところがどんな数学史書も，或る時代現在において，上来述べてきたような運命を担って構想され，整理され，構成されてきたものなのだから，それらを参照したり批判したりという仕事までがそこに加わることになると，その全体は，主観と客

1) これは，ボホナー著，村田全訳『科学史における数学』（1970，みすず書房）の一つの重要なテーマであると思われる

観，事実と判断の幾重にもからみ合った複雑なものにならざるをえない。私が上で「何(いず)れにせよ，良識に頼るほか致し方のない問題と観念する」といったのは，このような事情をさすのである。

このような意味で，私は以下では，あえて自(みずか)らの視点を意識し，視野を限定した歴史を書こうと思う。これは私にしてみれば，上記の「致し方のない」状況を，（或(あ)る中途半端な数学的，歴史学的見識の下ながら，）むしろ積極的に逆用しようというつもりのことなのである。

現代史における歴史と現在　もっとも，今述べたようなことが現実に問題になるのは，現代と或(あ)る距離をおいた近代以前の数学の場合のことで，ここでいう現代数学を扱う段になると，歴史として書かれる対象と，これを書く主体との近すぎることの方がむしろ問題である。つまり昔のことは，上のように一応の文句をつけてはみるものの，ともかく時が篩(ふる)いをかけてくれているのだが，現代数学にはもちろんそれはない。そこでそれぞれが深い奥行きをもつ多くの分野を相手にしながら，結局，生(なま)のままの自分の判断を先立てることによって，一つの「歴史」を組み立てていかねばならない。これが現代史の宿命なのである。ところが言うまでもなく，現代数学の諸分野は今や一つの小宇宙であって，その一つにでも通暁するのは大変なことだから，それらを通覧し，その間の比重の軽重(けいちょう)を判断してから歴史を書こうというのでは，私にはとても手がつけられない。

しかしその反面，現代数学は数学史の中でも際立った意義を持っている。実際，やがて明らかにされるように，それは対象，方法，真理性，あるいは考え方や応用の仕方など，どの点から見ても，過去のいかなる数学とも根底的に違った処をもっており，しかも今では社会一般に対しても隠然たる影響力を及ぼすほどの，いわば「世紀の知恵」という感じのものにまでなっている。してみると，そのような事実の歴史的経緯や意義はどうしても明らかにされねばならない。そしてそ

のような場合ならば，その目的によって材料の選択や排列にいくらかの偏(かたよ)りが出来ても，それは或(あ)る程度まで許されるであろう。私はこのように考えて，初めてこの「歴史」の筆を取ることができるのである。

第 III 部への全体的視点　この第 III 部では近代および現代の数学について，個々の史実もさることながら，それらが全体として，古代，中世，近世などの数学と，どこがどんなふうに違い，またどんな点を共有しているか，などの点に深い関心を寄せる。そのためには，数学の対象，方法，あるいは数学の真理性の所在や意味などが注目されることになるが，ここでその焦点におかれるのが，いわゆる無限の概念である。

無限という概念は今日の数学では，無限大，無限小，無限遠点，無限集合などと，積極的な意味をもって理解されるのが普通である。しかしそれは元来，不定，無限定，あるいは無際限などという，言わば消極的否定というような意味をもつ概念であったといわれる。これが積極的否定に転ずるというか，あるいはむしろ意志的・主体的に肯定的な形で捉(とら)えられてくるところに，近代から現代にかけての数学の歩みがあるとさえ言える位である。そしてこの観点からすれば，近代数学と現代数学との差は，その積極化の程度の差，ないし或(あ)る種の質の差と見てよいであろう。

もちろん近代・現代の数学の全体から言えば，無限に関するこうした観点にしても，この数学の一面をしか捉えぬ或(あ)る限られたものであるかもしれない。しかしともかく近代以後の数学が過去のどの時代の数学とも本質的に違うところは，ここにも確かに見出される。特に本書のように，数学の対象，方法，真理性などを主たる関心事とする場合には，無限の問題はまことに本質的な論点であり，これによって近代・現代の数学の歩みを見ることは，むしろ一般の数学者の考えにも沿うはずだと思われる。

なお私はこの考察を通して，近代数学や現代数学，特にこの後者を，「『数学』という或る学問的枠組が先ずあって，それが単純に近代や現代まで成長してきたもの」というふうには考えていない。そうではなく，「数学」はしばしば根底的に変化してきたものであり，近代や現代においても，そこに深刻な変貌が生じたものと見て事を運んでいる。言いかえれば，人類の歴史を貫き，あるいは人類の運命などと独立に宇宙を貫くような或る絶対的な「数学一般」が（人間精神の中にせよ，人間の外にせよ），厳然として存在するというふうには，少くとも天降りには考えていない。それよりはむしろ，「合理的」と呼ばれる或るものの考え方，ないしはそれを触発する外的現実が，古代，中世，近世と時を経ていく内に次第に「数学」と呼ばれる一個の学問に結晶し，それが更に，必ずしも既成の経路に即してでなく未生の道を自ら開拓することによって，結局今日の「数学」になったのだし，ひいてはそこに「数学」の未来もまたあるのだ，というふうに考えて事を運ぼうとしている。これはいわば「数学への歴史」とでも呼ばれるべきものである[1)]。

もっとも，われわれはそのような数学の変貌と共に，その変貌の底を一貫している何者かにも注目せねばならない。変貌の幅を大きく見るだけに，そこを一貫するものも深く捉えうることを期するのである。不易と流行というのは古い言葉だが，「数学」という学問の中で，無限の問題をめぐって展開される不易不変の様相と，同じく流行流転の様相との交錯こそ，われわれの関心の中心にくる問題である。

このような視点が，数学の応用や，特にその社会的意義などを論ずるのに十分なものでないことは，実は初めからわかっている。しかしそれにはそれの場所が別にあるはずだから，私はそれは承知の上で話

1) 私は「数学への歴史」という見方を，その言葉と共に，下村寅太郎『科学史の哲学』(1941, 弘文堂）において学んだ

を進めていこうと思う。もちろんそれでも，われわれの視野に捉(とら)えられる範囲のことは，できるだけ拾い上げるつもりである。

このような方針で事を運ぶについて，論点を整理する意味から，まずしばらく過去の時代の出来事との関連について触れておく。これは現代の状況を描くための呼び水のつもりである。

1-2．比較の対象としての古代ギリシャ数学

ギリシャ数学における無限　古代ギリシャ数学が数学ないしは学問一般の歴史の上で演じた最大の役割は，論証的学問としての数学を築き上げたことである。またそれに関連して，そのような学問の成立のためには，固有の対象として，理想化された図形が意識的に構成される必要があり，そのためにはまた，或(あ)る種の無限過程への考慮が潜在的に働いていたと思われる。以上は第 I 部[1] で詳しく述べられていることである。

この節では，近代あるいは現代の数学との対比という見地から，無限に対する現代的考え方に古代において対応する事柄(ことがら)を，その有無をも含めて取り上げてみたい。いわば第 I 部で「これこれのことは無かった」という類(たぐ)いのことも検討してみようというわけである。

最初に取り上げたいのは，ギリシャ人達が，平面や空間における個々の図形については考えをめぐらしたけれども，それらの図形の置かれた舞台である無限の平面や無限の空間そのものについては，これをその数学の対象としなかったということである。例(たと)えば「平行線」の定義として，2 直線の交わらぬことが用いられているのは，その図形学の舞台が際限無く拡がっていることを暗示しているが，それにしても，そこにはまだ舞台自身への関心はない。言いかえれば，（無限の）空間全体の変換ということが問題になったり，無限遠点や無限遠直線など

1) 【編註】第 I 部は『数学史』第 I 部「ギリシア数学」（伊東俊太郎）を示す。

の対象（射影幾何学）が積極的に措定（そてい）されたりするという事態（III-2）[1]は，あくまで近世より後のものであって，ギリシャ時代には認められぬものである。

無限遠などというと，それと並んで微分積分学でいう無限大，あるいはそれと対（つい）をなす無限小のことなどが思い浮かぶ。これらは数学の対象というより，むしろ極限算という算法の一種であるが，ともかくこのような算法として古代で思い浮かぶのは，何よりもアルキメデスの残した一連の求積・求長などの問題である（II–序）[2]。

アルキメデスの業績は古代数学の精髄ともいうべきものの一つで，一般には帰謬法（きびゅうほう）によって最も厳密正確に取り扱われている。もちろん今日の記号的算法と違って幾何学的に処理されているため，手間のかかる割に適用範囲が限定されるという欠点はあるけれども，議論の正しさについては，今日でもほとんど間然（かんぜん）する処（ところ）のないものである。更（さら）にそれは近世の初頭において，やがて微分積分学に成長する若い学問の理論的推進力となり，同時にそれの目標ともなったことが知られている。しかもなお，それではそこに極限算法 lim——微分積分学の基本的算法——の源が確かにあるかというと，人々の意見は必ずしも一致しない。

例（たと）えばブルバキなどは，その固有の修史の姿勢のためにもせよ，アルキメデスの求積法と 17 世紀以後の解析学とは異質のものだと言い切っている[3]。ブルバキに言わせると，アルキメデスの場合，「限りなく近づく」というような発想は確かにあったと見られるが，それは新しいことを発見するための方便に止まっていて，それを学問的に確立し，あるいは積極的に利用するという姿勢は認められず，むしろそのような行き方を，いかに避けるかに腐心している様子が見えるという。

1) 【編註】第 III 部第 2 章，すなわち本書第 2 章を表す。以下同様。
2) 【編註】第 II 部「近世の数学」（原亨吉）「序章」を表す。
3) ブルバキ『数学史』，「微分積分学」の章参照。

ブルバキの言うほど「異質」かどうかは問題だと思うが[1)]，ともかくアルキメデスにおいてすら，極限論的無限算法が一つの学問的方法にまで成長しなかったことは確かであって，これもまた古人と 17 世紀以後とを区別する重要な一点たるを失わない。

集合論的な無限概念，ないしはそれを縦横に駆使して行なわれる現代数学の精神が，対象，方法あるいは真理性のどの面から見ても，ギリシャ数学の中に見出しえないことは，ほとんど言うまでもないであろう。

以上のように，ギリシャ数学は無限の概念ないしそれにまつわる事柄(ことがら)を，学問以前の混沌と見たというか，学問的対象として程度の低いものと見たというか，いずれにせよ，それを自己本来の学問的対象とはしなかった。すなわちそこでは有限的対象こそが真の学問的対象なのである。このことはギリシャ数学の消極的，否定的な特徴として，重要な論点の一つである。

数学的存在の図形による表現　ギリシャ的論証数学において，数学的対象が図形に仮託された理念的存在の形をとったことについては，第 I 部で詳細に説明されている。そこで，ここではもう少し低い次元の問題ながら，ギリシャ数学の有限的性格にまつわる心理的要素とでもいうようなことに触れておく。

数学の対象を，図形——たとえユークリッド式に理想化された非現実的図形であるにせよ——に限定し，また数学の方法を作図ということに限定して考えるとき，一般に作図できる事柄(ことがら)の方が，それのでき

1) 例えば 19 世紀の批判的数学の厳密性（III–2）などは，一面において，アルキメデスを頂点とするギリシャ的厳密主義への復帰と見られる。この場合，古代と 19 世紀との差は，一般的極限算法を推進しうる記号法の有無の問題になろう。もとよりこの有無は大問題で，その重要性を強調する点でブルバキの説は正しいと思うが，一方，現代の解析学の底にもある帰謬法的性格（III–2–6）などに注目するとき，古代の求積法と現代の解析学との同質性は，両者と 18 世紀解析学との異質性と共に，大いに強調されねばならない。（なお，II–序言を参照）。

ない事柄(ことがら)よりも優先するのは当然である。しかも作図可能ということは，大づかみに言って有限的な性質といえようし，これに対してその否定としての無限的なものは，どうしても作図可能の範囲から遠くなる。どうも漠然としたことを言うようだが，手っ取り早く言えば，例(たと)えば 2 直線が有限の範囲で交わる図は描けるけれども，限り無く延長してなお交わらぬ図は描けないとか，円の内接多角形の辺数を限り無く増加させていく過程は，図の上では実現できない，というようなことである。もちろん，通約不能量の発見にまつわる正 5 角形の作図 (I–3–1) もこの中に入る。通約不能量が一つの「数」として積極的に捉(とら)えられなかったことの原因の一つに，こうした心理的要素を数えてはいけないであろうか。

これらは数学にとって，さほど本質的なことではないかもしれない。しかし私は，この種の心理的要素もまた，（自(みずか)らの後日の発展など予想すべくもない或(あ)る過去の出来事を論ずる場合には）考慮されてよいと考えている。ギリシャ数学の無限の回避や，無限を内に秘めた通約不能量に対する処置などの背後にも，そのような要素はあったのではないか，と考えたい。（もちろん，この種の問題の本筋は，既に第 I 部第 3 章で十分にのべられたことで，特にギリシャ人がその数学の対象を，図形に仮託した理念的存在に限ったのは，非連続的な自然数の理論と通約不能量を含む連続量の理論とを，その対象によって止揚したものである）。

さてこのギリシャ数学に対して，今日の数学が無限者の取り扱いに比較的なじみやすいのには，（図形より遙(はる)かに非具体的な）記号という対象を駆使するという，これまた多分に心理的な事情も，なにがしかの力をかしているであろう。私はやがて近世以後の数学における記号法の意義を強調するはずで，その際の眼目は記号なるもののもつ象徴性ということであるが，その背後にこうした要素もありうることは，注意しておいてよいと思われる。

エレア派の残した問題　上のような心理的問題を離れて本筋に帰ると，ギリシャの論証的数学の形成におけるエレア派の哲学の意義ないし役割が第 1 部の中心問題であった。ところがそこでも示唆されている通り (I–3–3)，この古い問題の底には最終的解決を人に許さぬ何者かがあり，後世の「数学」の展開に対しても，それが一つの根本的契機として働いていると見える節がある[1)]。少くともそのような立場で歴史を吟味することは可能なのである。

実際，「一と多」の問題は，一元論と多元論，本体論と現象論などの哲学的神学的な大問題に関連するのは当然として，中世の数学や自然学における「無限」の問題に関連し[2)]，やがてライプニッツ，ボルツァーノなどを経て，新しい「一と多」の理論たる集合論の形成につながると見られる (III–3)[3)]。

一方，「運動」の問題は，より哲学的な詮議は別としても，事が作図の基本に関連しうるだけに (I–3–3)，特にきびしい吟味が行なわれたはずで，恐らくは点の「多者」としての図形ということに関しても，種々の考慮がめぐらされたに違いない。そして同じことは近世の微分積分学の形成に際しても，また現代のいくつかの理論の背後にも，等しく或るつながりをもっているように思われる。実際，位相，測度，ない

1) 「運動」や「多」の概念がいかに厄介な問題を含むかを見るには，例えば「時の流れ」——それは一応あるものとして——の中での「連続」的「運動」を，「多」くの「単位要素」に分解しようと，虚心に試みてみるとよい。もちろん逆に，「多」くの「要素」をいかに集めれば「連続」的「運動」になるかを考えてもよい。（映画のフィルムの各コマは，露出時間にせよ，コマとコマの間隔にせよ，時間であって，ここでいう「要素」ではない。）長さのある直線を長さのない点に分解すること，あるいは逆に，点から延長を生み出すこと，についても同じである。また数学的問題のみでなく，例えば物質の連続性 (II–4–4)，記憶の連続性（例：ベルグソン哲学），その他多くの哲学的難問がここに見出される。

2) P. Sergescu, *Coup d'œil sur les origines de science exacte moderne* (1951) は簡潔なよい参考書だが，そこでは当時の中心問題として「無限」「連続」「世界の体系」の三つがあげられている。

3) 【編註】『数学史』第 III 部第 3 章。則ち本書第 3 章のこと。

しそれらとの関連の下での集合の問題など――してみると現代数学のかなり多くの部分――は，たとえ数学の現状において無縁に見えるにしても，より深いその動機において，あの古いゼノンの問題と相通うものをもつものと思われるのである。

《万物は数である》について　今迄述べてきたことが，たとえ哲学的色彩の濃(こ)いものであるにもせよ，ともかく数学内部の問題を指向しているのに対して，ここになお一つ，いわばギリシャ数学が数学の外部に向ける関心を示す哲学的要素があるように思われる。それは，この数学の後世への重大な影響の一つ，すなわちピタゴラス学派の《万物は数である》という思想である。

もっとも，この標語的な言葉は，これをそのまま思想と呼ぶには余(あま)りに漠然としており，むしろ信念あるいは信仰箇条に類する格率と呼ぶべきかもしれない。またそれはやがてユークリッド幾何学の中に解消し，《万物は数》という格率自身その根拠を失うとも言える。しかしわれわれはしばらく，その言葉の背後にあるらしい「世界の理解」という意図に注目しようとする。勿論(もちろん)この場合にも，それが本当に力を発揮するのは，近世の発端から今日にかけて，それに対して行なわれた再三の新解釈を経(へ)た後のことであるかもしれない。しかしそれにしても，嘘から出たまこと，などとして片づけるには，事は余(あま)りに重大である。すなわちその思想は，やがて近世の西欧において数理的自然科学という形に結実し，今日もなお，より広い範囲における諸学の数学化の試み――新しい数理科学の思想――となって，強く言えば今後の世界の歴史にまで重大な影響を及ぼすようになっているからである。

もちろんこの種の「思想」がギリシャ以外の地に全く現われなかったとは言えない。特にその最初の形から見れば，それは数の神秘主義と危(あやう)くも境を接するものであって（例えば I–2–2），今では呪術になり下(さが)った周易などとも，さほど違ってはいなかったかもしれない。（周

易には，過去の事件を或(あ)る原理によって分類し，政治指針にしようとする面があった。）しかしそれにしても，このような「思想」と，論証法を伴なう合理的な理論的学問との結びつきは，歴史の中でおそらく唯一の事件であり，それが遂(つい)に近世的な数理的自然科学となったときには，もはや他にかけがえのない確固とした世界観となって定着したのである。

この点から見ると，ギリシャ数学において最も際立った要素は，最も合理的な理論数学の背後に，このような超合理的信仰箇条に近い《万物は数である》のような考えが秘(ひそ)かに働いていたことだ，と言えるのではないか。20 世紀の新しい数理科学の動きをこのようなことと結びつけるのは，こじつけのそしりをまぬかれないかもしれない。しかしともかくそのような新しい数理科学の思想の生れたのが，他ならぬこの西欧数学の伝統の中であったことは，その伝統の外に育ったわれわれとして，十分注意してよいことであろう。

1-3．比較の対象としての近世ヨーロッパ

無限論一般と近世数学　下村寅太郎氏はその著『無限論の形成と構造』(1944) において，「近世数学の基礎概念や問題の由来と必然性と」を理解する前提として，「尺度粗大」であるかもしれないが，「少くとも細部構造の洞察への予備考察」に役立つものという意図の下で，一つの無限論史を示された。私はこれ以下の考察の出発点におく。

下村氏は，無限は有限の単なる延長でないだけに，これを積極的に捉(とら)えるについては世界観の変革がなくてはならないとされる。そしてその変革のきっかけを，有限の超越たる神を持つキリスト教神学の中に見出し，特に無限的存在を認める側の姿勢としては，現に存在するものを見る或(ある)いは経験するという受け身の姿勢でなく，可能的・潜勢的にのみありうるものを，主観の意志によって積極的に認めようとする態度が必要であることを強調される。また数学は，必ずしも現にある

ものを論ずるのでなく，可能的・理念的な対象を公理論的に要請するというその本性のために，無限論一般の一つの雛型(ひながた)であると見て，数学的無限論を，無限論一般のあり方を探(さぐ)るための「手引き」として取り上げておられる。

われわれは数学史の分を守って，この種の問題に深入りすることはできないが，ともかく無限者が積極的に捉(とら)えられるのが近世以後の特徴的な出来事であり，しかもそこに或(あ)る種の意志的なものが常に認められることを，この書に学んだ重要な知見として守りたい。この場合，われわれに課せられた問題は，近世数学の歴史の中で，そのようなことの現われと見られる数学的事実を明らかにすること，並びに，そのことが数学におけるそれ程の転換を可能にした事情について，多少とも具体的な答えを与えることである。

無限者が数学の対象として何とか形を取り始めるのは，明確には 16-17 世紀から後のことで，その間の事情は第 II 部に極めて詳細的確に示されている通りである。ただわれわれは前節の場合と同じく，数学の対象や方法について，現代の問題との対比の形で，多少の言葉を添えてみたいと思う。

なお前節でも「数学の対象や方法」という言葉を用いたが，「方法」という問題が，（一般にスコラ哲学に対置される）学問の新しいあり方として自覚されるのは，まさに近世に始まることである。

解析学の形成における無限　近世数学の最大の事件は言うまでもなく解析学の成立である。その成り行きは第 II 部にある通り，まことに複雑多岐であるが，関心を無限の概念にしぼり，その間の事情を極めて大局的に眺めるとすれば，それはほぼ次のようになるであろう。

まず最初に，アルキメデス再興に始まる求積法の伝統において，カヴァリエリの不可分者の幾何学 (II–10) に代表的に見られるような，無数の無限小を集めるという形で，無限小や無限大を実体化する試みが

行なわれ，やがてそれが大きい成果を残して後に影響するという段階が注意される。これは当時の意味における解析法記号を用いて行なわれる発見的手続きであって（トリチェルリはその好例），そのかぎりでは，むしろ適切なものである。

しかしそれにしても，そこにゼノン以来おなじみの問題の余地があることもまた明らかである。すなわちそれらの無限小，無限大が実体として存在するという，いわゆる実無限の考えは，既にアリストテレスが（どうやらゼノンの逆理を念頭におきつつ）縦横に批判したところであり，論理的に極めて難点の多いものだからである（II–序）。

ゼノンの逆理ということになれば，求積法と並ぶ今一つの学問的伝統であった運動学についても，或(あ)る共通の事情が考えられる。すなわちこれは，ルネサンス以来の傾向として，例(たと)えば曲線の研究などに用いられたほか，最終的には求積法の伝統と一体化して，ニュートン力学の形成という大事件の中に流れ込むのだが，前節で触れたような「運動」に関する論理的障害は決して克服されているわけではない。してみると，この運動学もまた証明的方法ではなく，発見的すなわち「解析」的な方法の一つと見てよいであろう（運動学の伝統については，II–4, 6，特に 14, 19 などを参照のこと）。

上記の求積法や運動学に対しては，一般に，原理を顧(かえり)みない非厳密なものという批判的見方もよく行なわれる。しかしその半面，原理への吟味に弱点を残しながらの前進と言うことであれば，サボーの解釈の下でのユークリッドの公理系の形成が既にそうであり，また 20 世紀の数学にしても事情は結局同じであるように思われる。私はむしろこうした動きの中に，まず新しい事実の蓄積が行なわれ，次いでそれらをいくつかの仮定的前提の下で整理していくという，数学一般を通じてつねに見られる基本的性格が，ここにもやはり見出されるのだ，とすべきように思う。

さてこの段階のあと，人びとの動きは，これを吟味批判していくという方向と，原理への吟味はそのままにして，取りあえずその成果を更(さら)に集めようとする方向との二つに分かれる。これも一般的事実であろうと思うが，今考えている問題の場合は，時代の勢いとして，それらの方法は次第に代数計算的な形を取り始め（ニュートン，特にライプニッツ），結局，最後にはそれが極限算法という形に整理されることになる。極限算法による微分積分学の基礎づけを（おそらく）最初に明言したダランベールは，「前進せよ，そうすれば信念が生れてくる」というその有名な言葉によって，しばしば原理への批判を無視した人物と誤解されるようであるが，彼の批判的傾向[1] を思い合せるとき，私には上記のような見方の方が自然だと考えられる。

極限算法というこの最後の段階は，対象としての実無限者を消去し，代りに，或(あ)る値に限りなく近づくとか，限りなく大きな値を取るとかいう，いわゆる可能態の無限——アリストテレスの認めた方の無限——を，（ただし意志的に積極的に）用いることであって，これが 18 世紀以後における数学的無限論の大勢になっていくわけである。

以上のような意味において，私は次章では，ここで言う近代の解析学における無限の概念を，この可能態における無限（仮無限）に限定して取り扱うことにするが，それと共に，幾何学などの分野で既に無限の実体化が潜行していたことも注意しなければならない (III–2–4, 7)。

近世的空間概念の形成をめぐる無限　数学的無限論の様相が，近世においてギリシャ時代と違ってくるのについて，空間の無限性の問題は，或(あ)る意味では解析学の場合よりも更(さら)に根底的である。

実際，空間に関する問題は必ずしも（今日の意味での）数学の範囲に納(おさ)まるものではなく，むしろ哲学や神学その他，広く世界観のあり方

1) *Encyclopedié* の「序論」および「極限」その他の項目をはじめ，その多くの著作から看取される。

に直結するものであるが（例(たと)えばデカルトは空間を「延長的実体」と呼び，ニュートンはそれを「神の感官」と呼んでいる），それだけにその潜在的な影響もまた極めて深甚(しんじん)であった。

残念ながら，私にはこの問題に深入りするだけの力はないが，古代から中世を通じて，少くとも人間に認識しうる世界が，いくつかの天球に囲まれた有限的世界として表現されていたことだけは注意しておきたい。すなわち初めて地動説を説いたコペルニクスの宇宙観がなお有限的であり，また宇宙の有限性の枠を打破してその無限性を最初に主張したブルーノ[1] が，宗教裁判によって火刑に処せられたことは，人の知る通りである。しかしそういうことを言うなら，これについて教会側にも一応の言い分のあったことも言っておかねばならない。すなわち，空間の無限性を認めることは，その持っていた一つの秩序ある知識体系を根本的に改変することを意味し，しかも新しい体系がそれを補うだけのものになる迄には，少くともニュートン力学の完成を待つ必要があった，という状況だからである。

ただ何(いず)れにせよ，「空間」なるものが数学の対象になるまでには，このような段階があった。空間の数学的研究はこの段階の後に初めて日程に上るのである。実際，17 世紀における射影幾何学の芽生え（デザルグ，パスカル）を先駆とし，後は 19 世紀の事になるが，まず個々の図形でなく，無限に拡がった平面や空間そのものを，数学の対象とする行き方が生れてくる。また無限遠点という実無限的な対象が導入されてくる。リーマンの多様体の概念も同様で，これらは既に集合論の形成を刺激したものである。話が少し先走ったが，空間の無限性の問題は，近代数学にこうした奇与をするのである。

ところが空間の問題はこれだけで終るのではない。19 世紀のリーマン幾何学から 20 世紀のアインシュタインの一般相対論的宇宙論まで

1) ブルーノ著，清水純一訳『無限宇宙と諸世界について』（1967，現代思潮社）。

来ると，皮肉にも，われわれの宇宙空間のイメージは再び或(あ)る意味で有限的なものとして描き出されるようになる。これらの数学的理論のおのおのを，今日の流儀で「空間に関する数学的モデル」と考えれば，モデル・チェインジは今後も何回か起こっておかしくない。結局，空間の問題は，ここで触れることのできなかった時間の問題と共に，今もなお次の時代における数学的創造の種を宿しているという思いである。

なお，このような状況の進展の間，解析学の場合と同じく，記号的方法の使用ということが，これらの背後に大きい力を発揮していることもまた注意すべき点である。

記号法的数学の形成　上来しばしば記号的方法ということに触れたが，近世以後の数学におけるこの方法の意義は，普通に考えられているより遙(はる)かに重大であり，或(あ)る意味ではギリシャ数学における論証法の形成に対比されるようなことである。次にそのことと無限論との関連について述べる。

記号的方法の始まりは，15–16 世紀の西欧における 3 次，4 次の方程式解法の研究にある。もっとも，それは解（の候補）を見出すための単なる技法であり，学問的方法と言える程のものではなかった（カルダノの方程式理論など）。

これに比べると，今日われわれの前にある記号法は，まず（ユークリッド幾何学のやり方と比べるとわかるように）機能的であり，その上，論証法としても使える。しかもそれは単なる数の計算や証明の手段という以上に，それによって対象を定義し，概念を構成し，それらについて広義の計算，推論，証明などを遂行(すいこう)させてくれる「方法」でもある。近世以後，近代，現代にかけての数学的無限論の展開にしても，それが図形で直接に表現できるものでないだけに，こうした記号法の展開を別にしては考えられない。おれわれは次に，このような方法の成立の思想的背景について，なお少し触れてみたいと思う。

普遍学の理念　記号法の歴史において，まず忘れられぬ人物はデカルトである。すなわち今述べたような記号法的学問は，学問を「方法」という視点において統一しようとする彼の方法論の線上で大きく成長したのであり，しかも彼はこの方法論を，古典的数学の明証性を手本として自覚し，続いてその自覚の成果を，改めて数学に返したのである。

デカルトは，技術その他，当時「数学的」と呼ばれていたかなり広い範囲の学芸技術を取りまとめ，その上に方法論的に統一された一段と広汎な学問を建設することを企画した。普遍学または普遍数学 (*mathesis universalis*) と呼ばれるのは，この新しい学問のことである。例(たと)えばデカルトの解析幾何学——この呼び名は後世のものだが——にしても，数学的立場だけで言うと，学問としての代数学の自立とその幾何学への適用という性格のものなのだが，広く見れば，まさに上記の線上で進展したものである。そして古典的な幾何学的数学の方は，この新しい方法論の確立と共に，大勢的には次第に記号代数的数学へと転針変貌していく。（「大勢的には」という断り書きの意味は，第 2 章で思い当ることがあるであろう。）

もっとも，この新「数学」形成の功を，独(ひと)りデカルトにのみ帰するのは早計であるし，また普遍学の思想を上のように限定するのも早計である。というのは，何らかの統一的手段によって，或(あ)る広汎な学芸を掩(おお)おうという考えは，（例(たと)えば 13 世紀のルルスの法のように，）いわば当時の学問的時代精神として，特にスコラ哲学の中を流れていた様子であって，代数的手法の進歩はこれに大きな刺激を与えたものらしいからである。15 世紀のニコラウス・クザヌス（ブルーノを経てライプニッツに影響）は特に大切だが，してみるとデカルトはこの時代の波を，その波頭において捉(とら)えたとでもいうのであろうか。

デカルトにおいては，なお企画の域を出なかった普遍学の理念に，より明確な形を与えたのはライプニッツである。スコラ哲学からの離脱

をまず考えていたデカルトに対して，スコラの影響の下に育ち，むしろそれを自(みずか)らの中に採り入れようとしたライプニッツが，この寄与をしたというのは，学問の伝統なるものを考える場合，なかなか意味深長である。

ライプニッツの考え方の基調は，人間の思惟作用を要素に分解し，各要素を記号で表現あるいは象徴し，一連の思惟作用を記号的演算——そのいわゆる結合法 (Ars Combinatoria)——によって置き換えるというところにある。

ライプニッツの結合法の考えは，今もなお現代数学の根底に生きており，近頃では記号論理学や電子計算機の理論の源泉として引用されることが多い。しかしここではまず，数学的対象として，古典的数学の場合の図形とは全く別の存在論がそこに生じていることに注意しておく。すなわち，図形では表現できなかったような或(あ)る種の演算や関係，そのような「広い意味での対象」を記号によって象徴し，固定し，できれば記号そのものに対して演算を施すことによって，「対象」自身について何らかの結論を導こう，これがその方法の骨子である。もちろん数学的無限性の問題など，これを理論的に扱う道は，このような象徴的方法を措(お)いて他にまず考えられないことであり，近世数学が無限者を扱いえた背景として，この新しい方法を無視することはできない。

もっとも，この方法も行き過ぎては具合が悪い。18 世紀数学の批判の乏しさということが，時として記号に頼り過ぎる処にあったこと（例(たと)えばオイラー，III–2–6）は事実であって，これはガウスなどの批判を招いている。われわれの議論も，その点に対しては十分配慮する必要がある。

なお，上で「広い意味での対象」と呼んだものは，まず近世から（本書の意味での）近代にかけては，まだまだ「数」——ただしその意味は

ギリシャの場合より大幅に広くなっている——，「空間」，そしてせいぜい「関数」などの範囲に限定されている。しかしその範囲は現代に到って格段の飛躍を遂(と)げ，やがて現代数学における基本的対象の一つである数学的構造という形を志向するようになってくる。それは第 3 章以後の問題である。

再び《万物は数である》について　前にピタゴラス学派の思想ないしは信念として引用した《万物は数である》という格率も，近世において改めて重大な進展を見せる。あるいはむしろ，それはこの時代になって初めて古今東西を通じ真に初めて——一個の永続的影響力をもつ思想として定着した，と見る方がよいかもしれない。言うまでもなく，それは数理的自然科学の成立という成果を伴なった動きで，ギリシャ数学の伝統の再興の上に，東方の諸文化のもつ独特の学芸技法の刺激が加わり，ルネサンスを経て，ガリレイ，デカルト，ニュートンなどの中に発酵成長したものである。もしこれらの人の中にピタゴラスの上の言葉に代わるものを求めるとすれば，少し長いが，ガリレイの次のような意味の言葉がふさわしい。

> われわれの眼前にある宇宙というこの大きな書物には，哲学が書かれているが，それを読み解くためには，その書物を構成している言葉と文字を会得せねばならない。その言葉は数学であり，その文字は幾何学の図形である……。

もちろんこのような動きの背後には，近世初頭以来の物質文明の進歩——火薬，羅針盤，印刷術はその象徴とされる——があったことは確かであり，この種のことを無視して数学史を論ずることは，少くとも数学の二つの根の一方を切り捨てることになる。われわれもその点は弁(わきま)えているつもりだが，それにしても，そのような新しい事態への対処の仕方というか，そこに従来のものと原理的に違った新しい数学的方法——記号的方法——の生れていたことは，くれぐれも忘れてな

らないのである。このことはしばしば見失われがちであるから，ここでは特にこれを強調しておきたい。

なおガリレイの場合には，上の引用からもわかるように，その「数学」はなお幾何学の範囲に止まっている。しかし，17 世紀も後半以後になり，数理的自然科学がいよいよ本当に動き出す頃になると，「数学」は既に前記のような変貌を遂(と)げているのである。

さて以上のような面から見ると，例のピタゴラス学派の格率は，「自然的世界の根底には『数学』的法則が存在する」という形に限定凝結した感がある。これを，自然的世界がこうした性質を内在させているのだといえばそれまでであるが，それにしても，ギリシャ時代には，「運動」「変化」を論ずることが，理論的数学と異質なものですらあったことを考え併せると，この変貌のなみなみならぬ意義が推測されるであろう。

しかしここには更(さら)に注目すべきことがある。それはこの時代以後，数学化されるのが自然のみではなくなることである。例(たと)えば確率論なども，この時代に「数学」の周辺で取り上げられ，特に 18 世紀から今日にかけて本格的に数学化されてくる。またまた先走ったことを言うようだが，この理論は，今日，社会科学や人文科学などへの数学の適用に際して，まことに重大な役割を果たすことになる。というよりも，この確率論の応用をその一部に含む今日のいわゆる数理科学こそ，「数学」的法則を，自然的世界の外にまで求めようとする試みとして，現代における一つの重大な「哲学」的契機をなすもののように思われる。もちろんここでもまた，そのことは「数学」の変貌を伴ないながら起こっている。これも忘れてはならないことの一つである (III–4–3d)。

1-4．古代・近世の数学に対する近代・現代の数学

19–20 世紀の数学のことは，本来この第 III 部全体を通じて論ずべき

ことだが，ここでは上の二節と対照する意味で，まず概観的なことを述べる。

近代・現代における数学の変貌　19 世紀的な近代数学の中に，ギリシャや 17 世紀に見られた程の画期的な変貌があったか，という問いに対して，もし極めて大局的な見方をすれば，消極的な答も可能かもしれない。すなわち 17 世紀か 19 世紀の終る頃までの歴史は，異質な断絶や飛躍を持つ歴史というよりも，むしろ一筋の連続的な流れと見られぬわけではないからである[1)]。

特に数学的無限の問題について言えば，極限算法の性格が次第に明確化されたという点に，この時代の大きな特色が見出されるとだけ考えるならば，ここに歴史の飛躍なしと見ることにも，一応の根拠は認められる。あるいはむしろその明確化が，いわば極限算法の有限的把握を目標とする形で遂行（すいこう）されたという意味で，これを古代ギリシャへの復帰と見ることすら，十分考えられるところである。（この場合，記号法の問題や数学の応用の問題など，非常に重要な要素が捨象（しゃしょう）されていることは言う迄もない。）

ところが 20 世紀になると，事情は確かに違ってくる。近い出来事は大きく見えがちだという点を勘定（かんじょう）に入れても，集合論の用意した無限論的存在概念を駆使して，その上に公理論的に展開されている現代数学は，過去のどの時代の数学とも確かに異質だと言い切ることができるのである。

しかもこれに伴なって——歴史というものはしばしばそうなりがちだが—— その展開の線を後（うしろ）へたぐってみると，それらの変貌の前兆は既に 19 世紀数学の中に歴然と存在していたことがわかってくる。勿論（もちろん）

1) その期間は，ギリシャにおける前 6 世紀（タレス，ピタゴラス）から前 3 世紀（ユークリッド，アルキメデス）までや，アラビアにおける 8 世紀（アル・ファザリ，ハルン・アル・ラシッド）から 12 世紀（ウマル・ハイヤミ）までなどと，ほぼ同じ長さである。

ここで，歴史の連続性を強調するか，個々の事件における断絶性を強調するかは，論者の立場もからんで微妙な問題になるが，第 2 章以下ではまずそれらの史実を出来るだけ忠実に示すことをこそ考えねばならない。実を言うと，私自身の傾向は，歴史全体に対して大局的・連続的な見方を取りがちなのだが，特に現代数学の無限論の性格に関する限り，カントルの創造力と，それを数学的軌道にのせたデデキントの識見とを，それぞれ独立に高く評価する方向に傾いている。

三たび《万物は数である》について　ところで 19–20 世紀の数学について特に考慮すべき要素は，実はもっと深い処にあると思われる。しかも無限の問題は必ずしも直接にではないにせよ，その要素と決して無縁ではないので，次にこの点について一瞥(いちべつ)しておこう。それは言わば，《万物は数である》という例の格率の今日における現われ，というような問題である。

19–20 世紀という時代を人類史上のどのような時代として捉(とら)えるかという問題は，もとより本書などの視野を遙(はる)かに越えたことではあるが，現在，地球上で異常な迄に進展しつつある科学文明を，諸民族に対するその大規模な浸透の面も含めて，現代という時代の大きな特徴と見ることは，決して無理なことではない。この科学文明は 18 世紀頃から急速に進展を始め，一方で 18 世紀後半から 19 世紀初めにかけての第一次産業革命ないし資本主義の勃興という事件を伴なうと共に，他方では大衆教育の普及と相俟(あいま)って，今や深刻な影響力を今日の世界に揮(ふる)い始めている。しかも科学文明はその形成の過程を問わずに成果だけを問題にする限り，一旦(いったん)覚えてしまえば誰にでも一通りのことができるという，まことに普遍的な性格をもっている。そこでその影響は，その文明の生みの親である西欧世界のみに止まらず，広く人類一般の上に及ぼされて，言わば現在の人類に課せられた一個の運命のような様相さえ呈しつつある。

さてそこでわれわれが注目したいのは，今日の数学が，潜在的にもせよ，この重大な変革の中心近くに位置することである。実を言うと，今日，数学と哲学とが，ギリシャ時代や 17 世紀前後の西欧に見られたような密接な関係にあるとは必ずしも思われない，しかし例(たと)えば 17 世紀の数学が，（ガリレイ，デカルト，パスカル，ニュートン，ライプニッツなどの仕事に端的に現われているように）その変貌の過程を介しつつ，その時代の中で或(あ)る重大な意義を持ったのと似て，今日の数学もまた，新しい世界の動きの中で或(あ)る根本的な変貌を蒙(こうむ)りながら，同時に世界に対してさまざまの働きかけをしている近世以来の科学技術の進歩の中での数学の役割や，現代における電子計算機の意義などは，すぐにも思いつく例であろう。しかし私には，それらの事実やそれに直結する「数学」的要素とは別に，もう少し根本的なことがあるように思われる。すなわちそうした動き全体の底に働く一種の意図あるいは動機として，或(あ)る広い意味における「数学」が実は世界を捉(とら)える本質的な道の一つだというような理解が，人びとの間に暗黙のうちに働いているように思われるのである。例のピタゴラスの格率に即して言えば，これは現代が試みつつある一つの大きな「哲学」ではないか，という思いでさえある。

このようなことについては，今日なお十分の吟味を経ているとは思えないし，またこの場所がそれにふさわしいものでもない。しかし少くとも，私がここで近代あるいは現代の数学を，古代や近世の数学と或(あ)る程度まで異質なものとして特記しようという裏には，こうした配慮も働いている。もとより無限の問題がこれらを論ずる上での最も適切な道だなどとは言わないが，それもまたこうした動きと無縁でないという点は以下で示したいことの一つである

数学的存在　数学の対象たる数学的存在は，古代，中世，ルネサンス，17 世紀，17–18 世紀，19 世紀と進むにつれて，図形の形に託され

た幾何学的存在から，記号で象徴された数，量，関数などの，より抽象的な存在へと次第に移行していく。しかもそれが機能的な記号法に支えられている点が大切なことは既に何度も述べた。

これが更(さら)に現代数学になると，それらのもろもろの対象の間に成立する一段と抽象的な関係，演算，作用などが，新たに数学的存在と見なされるようになってくる。言わば「働き」が「もの」になり変り，それを相手とする考察が新しい角度から始められるのである。この新しい対象こそ，ブルバキのいわゆる数学的構造であるが，数学的存在の世界におけるこのような変貌の中で，無限集合の概念，特にそれを自由に駆使するという考え方が果した役割は，まことに決定的なのである。

数学の方法　このような対象の変化と共に，それを処理すべき数学的方法もまた変化せざるを得ない。すなわち図形に対する幾何学的方法や，数，量，関数などの，言わば数量的側面に重点のある記号的方法を経て，現代数学において見られるのは，いわゆる新しい公理主義的な考え方と，それを展開するための，より抽象的な記号法である。

形の上から見ると，今日の公理主義は，

いくつかの基本用語を無定義のまま用いること

それらの基本用語の間に成り立ついくつかの基本的関係を公理として明記すること

の二つの大方針の上に立っている。

それらの公理は，別段，絶対的な真理を示すというものではなく，単にその成立を仮定するというだけの意味であり，そこに展開される仮定法的理論の出発点をなしている。

また無定義のまま用いられる術語の意味・内容は，もしこれを根ほり葉ほり問いただすとすれば，無限背進に陥(おちい)らざるをえなくなるわけだが，ここでは一種の符牒(ふちょう)として，不問のまま通用させることになっている。すなわちその内容は公理によって内在的に規定されるだけで，

公理の規定する範囲内で，そこには解釈の自由度があるのである。しかもこの解釈の自由度は，それぞれの解釈に応ずる「応用数学」を用意してくれるものであり，この点に現代の新しい型の応用数学のもつ大きな可能性の源(みなもと)がある。更(さら)にこのような解釈の自由性は，本来，対象を記号によって象徴するところに生じるものであり，そこでこの公理主義的方法を実際に運用するに当っては，記号計算的な方法——そこには記号論理学も含まれてよい——が，本質的に力を発揮するわけである。

数学的真理　以上の議論はまた，数学的真理の性格にまつわる変化にも関係してくる。実際，ギリシャ時代の初めには（サボーの所説が示すような）一種の仮定法的性格があったにしても，その後は，比較的近い時代——恐らく 19 世紀の途中——まで，数学の公理は，哲学的考察の下ですら，絶対的真理の表明という意味にとられていた。（その考え方が，キリスト教的権威の下にあった中世以後の時代思潮とどのような関連をもつか，というような問題もあるが，ここでこれに立ち入ることはできない。）しかしいずれにしても，数学をこのような意味での絶対的真理を扱う学問とし，あるいはむしろ，数学を，絶対的真理を扱うことのできる学問が存在することの重要な証拠として用いるというのが，大きく言えば，或(あ)る時代までの西欧哲学の一つの基調であった。すなわちこの場合，数学は単なる技術的学問ではなく，学問全体の脈絡(みゃくらく)の中で見逃すことのできない重大な意義を担(にな)うものだったわけである。しかも実をいうと，この事実は恐らく西欧的学問の伝統の中にのみ見出されることであり，ここには西欧精神史および西欧数学史に共通する極めて重要な特色があるのである。

ところがこうした意味での公理は，19 世紀の途中における非ユークリッド幾何学の誕生などをきっかけとして後退する。この新しい幾何学が，学問一般に与えた最も大きな意義はここにあるわけだが，とも

かくこの前後から，公理というものは，理論の仮説的前提という意味に変り始めてくる。そして数学の真理性は，絶対的真理たる公理から導き出される結論の中にあるのではなく，公理という名の前提から得られる結論を，それらの前提を書き添えた形の体系——簡単に言えば仮定法的推論体系——の中に見出されることになる。しかもこれは，当時の理論物理学にも同様に見られる傾向なのである[1)]。

もちろんこうなっても，そのような仮定法的推論体系自身の真理性という点には，依然として哲学的要素を含んだ問題が残る。しかしそれにしても，それで哲学——特に西欧的理論哲学——における数学の特徴ある立場に根本的な変化が生じたことにはならない。ただ問題点が，より基本的な所へと移動していることは言うまでもないであろう（これについてはなお第 5 章を参照。）。

数学の応用　数学の他の学問への応用ということについても，既に触れたように，公理主義的方法は重大な意義をもっている。というのは，仮定法的な公理体系は，多くの場合，或(あ)る現実を説明するためにその現実の中から抽象されるものであり，そこに展開される数学的理論は，全体として，そこで注目されている現実についての一種の数学的モデルになっているからである。

この見地からすれば，ユークリッド幾何学にしても，われわれの経験的現実を理念の上で割り切って見せた一つの数学的モデルに他ならない。実際，現実には幅のない線はなく，従(したが)って測定による内角の和が正 2 直角になる三角形もないから，現実に密着しすぎると事は却(かえ)って混乱する。理念的モデルであるこの幾何学を介してこそ，初めて現実の底にあるらしい単純明快かつ実際的な「真理」が得られるのである。しかも他方，それはありうべき唯一の幾何学というわけではなく，目的に応じて別の「幾何学」もまた存在しうる。例(たと)えば大抵の鉄道地図は，

1) この傾向は，特にマクスウェル (1831–1879) 以後に著しいと言われる。

ユークリッドの意味での現実の表現にはなっていないが，路線——駅のつながり具合——を知るモデルとしてならば，むしろ有効である。（なおこれは，広義の「点」のつながり具合の研究たる位相数学 (III–4–3a) の，ただし少々卑近すぎる例になっている。）

なおこの意味で，数学はつねに経験的現実と理念的真実とをつなぐ重大な輪であるが，その輪の存在を見出し，これを人間の知識体系の中に位置づけた点に，西欧哲学の伝統の，他に比較を見ない大きな意義があるのである。

そのようなモデルの中で，理論の展開はもちろん純数学的に行なわれるわけだが——というのは，それが一つの公理論の形をしているから——，数学本来の役割は実はここまでで，その結果が，当面の現実に対して本当に適合するかどうかは，もはや理論数学の問題ではない。それは，その現実自体を探究する個々の科学と，その科学と数学との触れあいを論ずる数理科学との二つが，共に責任を分かち合うべき問題なのである。

しかしそういうこと以上に，この新しい公理的理論が，基本用語の解釈に自由度があるという事実を介して，それぞれの解釈に応ずる種々の現実的事態に共通な理論的モデルとなりうるという点は，今日の数理科学を考えていく上で更（さら）に重大である。観点を逆にして言えば，これは一つの理論が幾通りもの応用分野を持つということであり，その背後には，この世界には同一の「言葉」で語られうる——従（したが）って或（あ）る種の理論的「構造」を共有する——多くの現実があるということにもなるであろう。ただしこの場合，「言葉」なり「公理」なりの選択に，事の本質がかかっていることは，言うまでもない。上の路線のモデルを例にして言えば，これはまた何人かの人の知人関係を示すモデルにもなりうるから，そのつながり具合のもつ本来の性質は，そのまま上の二つの現実に共通の性質でもある，というようなことである。

ともかくこうしたことのある上に，数学的対象が前記のように拡大しているため，数学の応用範囲は格段に広くなり，従来の自然科学の方面だけに止まらないで，社会科学や人文科学一般などの中にまで広く浸透をはじめている。そしてこれこそ今日の数理科学がもつ大きな学問的意義なのである。

以上をまとめていうと，こうした形での現代数学は，単に「数，量，関数などに関する学問」というだけに止まらず，むしろ「合理的思考一般を，それによって展開するための一種の象徴的言語」というような役割をもつものであることがわかってくる。そしてわれわれの次章以下での仕事は，18 世紀までの数学がこのような形に変貌していく経路を，無限論に関する歴史という断面に即しながら，できるだけ史実に忠実に描いていくことに他ならない。

第 2 章　19 世紀的近代数学

——集合論以前における無限の問題——

本章の主題は 19 世紀数学の発展の全貌ではなく，ここで言う近代数学，すなわち集合論の影響を受ける以前の 19 世紀数学である。またその主な対象も，大なり小なり無限に関連する問題に限られている。

言うまでもないことだが，「19 世紀」とは，世紀という人為的な目印しによって，たまたま「20 世紀」の直前に置かれた或(あ)る期間に過ぎない。そこでまず問題になるのは，「19 世紀数学」にせよ「近代数学」にせよ，そのような名で呼ぶに値するだけの固有の実体があるか，という疑問である。これに対してわれわれは，17–18 世紀までの「数学」や集合論以後の「数学」とは，いささか質を異にする「数学」がそこに現われていること，並びにその差異は，特に無限の概念をめぐって顕著に捉(とら)えられること，などを示さねばならない。

2-1．19 世紀的な 19 世紀数学史

19 世紀における「数学」の概念　今日でも数学は「数，量，関数，図形，空間などに関して研究する学問」というような形で説明されることが多い。これはもちろん間違いではないが，それにしてもこの説明は，18 世紀の終り頃からせいぜい 20 世紀初期にかけての数学，しかも特にいわゆる純粋数学について，最もよく当てはまるものである。

実際，18 世紀も若い頃まで，あるいはもう少し後になっても，「数学」といえばしばしば幾何学のことであり[1)]，しかもギリシャ的な意味での「数と図形」はあっても「空間」はまだ真に数学の対象にはなっ

1) フランス語の “Géométrie” は，17 世紀頃までは，今日でいえば「幾何」というより「数学」というのに近い意味であった。さらに “Géomètre” は，20 世紀になっても，「幾何学者」ではなく「大数学者」の意味に使われている例が少くない。その用例は例えばポアンカレやブルバキにもある。

ていない。また「数」の方も，実数はまだ理論的に実体化されていないから，結局，今日ならば実数やベクトルなどによって表現される広義の「量」の概念も，ひいては「関数」の概念も，強く言えば，すべてはまだ誕生以前の状態にある。その反面，18 世紀も終り近くなると，数理的自然科学の成功の結果というのか，理論物理学の或(あ)る部分と数学とは一体になっていて，自然科学と独立のものとしての純粋数学という考え方はまだ稀薄であるというよりも，近代的な意味での数論，代数，幾何，解析からなる「純粋数学」という概念自身が，むしろ 19 世紀に確立するものなのである。

批判的傾向と創造的傾向　こうしてみると 18 世紀の途中までは，冒頭に掲げた「数学」の定義はまだいくらか新しすぎると言わざるをえない。量，関数，空間などの概念が数学の中で自覚的に把握されるまでには，まず 17 世紀において数学の方法や対象に関する根底的な変化があり，続いて 18 世紀において当時の新数学の奔放なまでの展開があり，その上に更(さら)に批判的・反省的な要素が加わる必要があった。純粋数学の確立およびそれと応用数学との分離というのもその一つの結果であるが，ともかく先の定義が確立するのは 19 世紀以後の出来事なのである。

もっとも，19 世紀以後の数学に加わったのは，必ずしも批判や反省の要素ばかりではない。そこにはまた，数学の対象や方法の原理的拡大とでもいうような創造的要素も加わってくる。そしてこのことは，上の批判的要素と相俟(あいま)って，遂(つい)には，純粋数学として確立したはずの数論，代数，幾何，解析という分類の解体をさえ迫るに至る。すなわち数学とはもはや「数，量，関数，図形，空間など」の学問というに止まらず，むしろ「合理的な思考の文法あるいは規範」とか，「新しい型の分析と総合の方法」というような説明の方が当てはまらないようになってくる。しかしこれはもはや 19 世紀の数学ではなく，すでに 20

世紀も第 2 四半期以後のことである。そして無限の概念は，このような変化の根底にある一つの重要な契機と見ることができる。これらは，少くとも私には，歴史の現実に即した自然な見方なので，本章第 2 節以下の議論も，この基本線の上に組み立てていこうと思うのである。

19 世紀における応用数学　今迄述べた純粋数学の面を離れて，いわゆる応用数学の面に眼を移した場合でも，19 世紀はそれ以前の数学に比べて，かなり顕著な特色を持っている。その一つは，既に上で触れた通り，それが純粋数学から切り離されていくという点であるが，内容的に見ても，例(たと)えば 19 世紀中期の，物理学にも寄与の大きい数学者ヤコビ (1804–1851) やハミルトン (1805-1865)，そして特に数理的物理学者マクスウェル (1831-1879) などの仕事の前後から，自然現象への数学の適用には，今日の数理科学を思わせるような，多分に仮説的・規約的な性格が目立ってくる。つまり自然を数学的に模写しようというよりも，むしろ自然に向って数学的構築物を押しつけ，その理論的帰結を自然の中に求めようという傾向が強くなるのである[1)]。

しかしそうは言うものの，20 世紀の数理科学が，数学の原理的な変貌を踏まえた上で，人文科学や社会科学に属する或(あ)る領域に対して新しい適用を開拓するという動きは，19 世紀にはまだ起こってこない。そしてこのことの根底には，直ちに無限の概念が作用しているとは言わないまでも，純粋数学の考え方における上記の変化が大きく作用していることを認めぬわけにはいかない。

以上のようなわけで，われわれは 19 世紀的近代数学が，数，量，関数，図形，空間などに関する学問と呼ばれるにふさわしい内容を持つ固有の数学であることを，これも一つの作業仮説としてでよいから，認め

1) ヤコビ，ハミルトンについては解析力学を，またマクスウェルについては電磁場の理論を，ここではそれぞれ頭においている。電磁場の伝播およびその速度 c が，次元解析という手段によって推定された話は有名である。この方面のことについては，広重徹『物理学史（上，下）』（1968，培風館）などを参照されたい。

ようと思う。してみると，今後の問題は，それ以前の数学がこの数学に変化していく有様(ありさま)を確かめることであり，それはやがて，後者が更(さら)に現代数学へと脱皮する有様(ありさま)を確かめる仕事につながる。

19 世紀における数学史研究　ことのついでに言うと，学問らしい数学史研究が初めて現われるのも，（モンテユクラ[1] という例外を除くと）ほぼ 19 世紀後半以後のことである。してみると，いわゆる数学史なるものは，何よりも 19 世紀的数学の内容を基準にして構成された歴史ではないかという疑いの余地もありうるであろう。すなわちわれわれが今日持っている「数学史」のイメージには，初めからこれだけの先入観が作用しているかもしれないのである。もちろん今のところ，これはあくまで単なる示唆(しさ)であり，歴史というものを慎重に批判的に見るための自戒の資に止まるが，一方，ブルバキの修史の姿勢をめぐる論議（第 1 章第 1 節）などには，このような観点からする吟味があってもよいと思われる。つまり私はブルバキの歴史を，20 世紀の数学が独自の修史の姿勢を打出した最初の大きな一歩と見ているのである。

19 世紀数学と現代日本の数学　以上のこととは別に，日本語を母国語とするわれわれにとっては，江戸時代末から明治時代にかけて当時の人々が接した西欧数学およびその歴史が，これまた 19 世紀的なものであったことも注意すべきである。というのは，西欧数学についてのそのような第一印象は，一方で，数や図形に関する日本の伝統的な学芸（和算）の性格のせいもあってか，また他方では，当時の西欧文化受容の姿勢一般のせいもあってか，その後のわが国での数学観——自然科学や科学技術の手段としての技術的学問——の形成に，かなり重大な影響を与えたと思われるからである。もちろんそこには当時移入された西欧数学の性格そのものも考慮すべきであり，他方，その後は，

1) J. E. Montucla, *Histoire des Mathematiques* (Paris, 1799-1802), 全 4 巻。1960 復刊

西欧精神史における数学の意義についての認識が次第に生じてきた事情も考慮すべきであるが，ともかくこれらのことは，結局，今日のわれわれにまで有形無形の影響を及ぼしている可能性がある。この意味でこれらのことは，今日のわれわれにとって決して不急無縁の事とは言えないであろう[1)]。

二三の 19 世紀数学史像　19 世紀的近代数学なるものの実態がそれなりに掴(つか)まれてきたのには，20 世紀数学がそれを消化した上で，更(さら)に独自の世界を築いてきたことが作用していると思われる。言いかえれば，20 世紀もほぼ 4 分の 3 を過ぎた最近になって，19 世紀数学に対しても或(あ)る距離をもって接しうるだけの余裕ある足場ができたのであろう。上記のブルバキの『数学史』は，その典型的な一例である。

これに反して，19 世紀から余(あま)り遠くない時点で，かつその世紀に活躍した人びとの手で書かれた「19 世紀数学史」は，われわれに大いに参考になる半面，なおいろいろな偏(かたよ)りをもっていることも否定できない。以下にその二三の例を挙げる。

まず，最も早い時期にまとめられたものの例として，アメリカの解析学者ピアポントが 1904 年に発表した歴史概観[2)] がある。これは特に古典的数学に関してよくまとめられており，19 世紀数学の特徴としてそこに挙げられたものは，今見ても妥当な線だと思われる。すなわち彼は 19 世紀数学の広さ，多彩さ，進歩の速さなどの外面的特徴を指摘すると共に，解析学で特に見られる批判的精神，射影幾何学や代

---

1) これについては，日本科学史学会編，清水達雄・村田全責任編集『日本科学技術史大系　第 12 巻　数理科学』（1969，第一法規出版）所載の拙稿（6，10，15 章）を参照されたい。

2) J. Pierpont, “The History of Mathematics in the nineteenth century”, *American Mathematical Monthly*, vol. XI (1904)。これは同年 9 月に行なわれた講演の記録で，内容は次の項目に従って述べられている：関数論，代数関数論，保型関数論，微分方程式論，群論，集合論，実関数論と批判的傾向，整数論と代数的数，射影幾何学，微分幾何学，その他の幾何学・非ユークリッド幾何学。

数学で見られる理想元 (ideal element)[1] の導入，数学の古典的諸分野を貫く一般的方法の開拓（例えば，非ユークリッド幾何学，群論，保型関数論など，多くの分野間の関連性）などを挙げ，更に，より具体的な事柄として，複素数の体系的かつ普遍的な使用，群論の勃興，そして特に非ユークリッド幾何学の成立などのことを記録している。

ところがその半面，余儀ないことではあるが，この『歴史』の内容は多分に 19 世紀的な数学概念を反映したもので，例えば集合論はカントルの創った興味ある理論という程度にしか扱われておらず，これに対するデデキントの寄与に至っては一言もされていない。要するにこの『歴史』自身が，今となってはまさに歴史の一こまなのである。

もちろんこのような言い方はピアポントに対していささか苛酷であり，それこそ過去の歴史を現代の立場から扱い過ぎるとの批判を受けることであろう。しかしここで，その 4 年前の 1900 年にパリで開催された第 2 回国際数学者会議で，ヒルベルトが行なった講演『数学の問題について[2]』を見ると，事情は少し違ってくる。というのは，「数学」はそこでは，より現代的な方向を向いており，いわば後の烏が先になっているからである。もっとも，正直なところ，これはヒルベルトの歴史観の問題ではなく，むしろその数学的識見が以後の数学への指針となったとすべきことであろう。すなわちこれは歴史の一こまが現実に「歴史」を創り出すということの際立った例であり，見方を変えていうと，このような講演がなされ，それが後に影響したと思われるところに，20 世紀的数学を 19 世紀的数学から切り離さざるをえなくなる一つの理由があるのである。この講演のことは第 4 章で触れる。

クラインの『19 世紀数学史』　一流の 19 世紀数学者の書いた同時代史として，クラインの『19 世紀数学史講義[3]』は最も有名である。も

1) 射影幾何学における理想元（無限遠要素）については III–2–4 で述べる。
2) 一松信訳・解説『ヒルベルト　数学の問題』（1969，共立出版）は，これについて極めて優れた展望を与えてくれる。
3) F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jarhhun-*

ちろんこの本はピアポントの『歴史』よりも遙(はる)かに個性的かつ専門的で，しかもその個性がこの本の本領でもあるのだが，それだけにその視野には，20 世紀的な視野と明瞭に違うところが認められる。少し先走った話になる上，（私自身がもてあましている）この巨大な労作を余(あま)りに軽率に扱う恐れもあるが，次にその点について少し述べておく。

この本で扱われる数学の対象には，数，量，関数，空間などの古典的対象の他に，それからの現代的拡大の傾向を示す要素が既に現われている。これはこの時代の数学的方法の拡大深化にも関係のあることで，特に群論が上記の古典的対象の間の内的関連性を示し始めている。もっと具体的な説明は後で触れるが，数論，代数，幾何，解析などの諸分野が，一面で独立の領域を作りながら，それと共に既に解体再編成される兆(きざし)を見せているのである。クライン自身がこうした方法の開拓者ないし創造者の一人であって，その点からいうと，この本は 19 世紀的数学を 20 世紀的数学に，また 19 世紀的数学史を 20 世紀的数学史に，それぞれつなぐような意味をすら持つと言えよう。

しかしその反面，ここにもまた或(あ)る時代的制約が存在する。すなわち数学の主たる対象は，ここではやはり数，量，空間，関数であり，あるいはせいぜいその間の群論的関係の程度であって，数学の対象を意識的にかつ自由に拡大創造することになれた現代数学との間には，なおかなりの違いがある。

この違いの源(みなもと)として第一に考えられるのは，彼が公理的方法を嫌ったということと，無限集合なるものを数学的存在として容認していな

---

dert, Bd. I (1926), Bd. II (1927)，第 1 巻は第一次大戦前後に行なわれた講義をもとにして 1918 年頃迄に書かれたもので，8 章からなる，第 1 章「ガウス」から始まり，以下，幾何学，代数学，解析学，力学，数理物理学などの，フランス，ドイツ，イギリスなどにおける展開，「リーマン，ワイエルシュトラスの複素変数関数論」（第 6 章）などを経て，著者の重要な業績である「群論と関数論，特に保型関数」（第 8 章）に終る。また第 II 巻（全 3 章）は「不変式論の基礎概念とその数理物理学への浸透」というテーマで，第 2 章では特殊相対性理論が取り上げられている。第 II 巻は著者の没後に弟子たちの手で整理出版されたものである。

かったこととであろう。現代数学における対象の拡大創造の姿勢を支える存在論は，数学的無限論としての集合論であり，同じく方法論は公理的方法であって，この点で現代数学はそれ以前の数学と決定的に違っている。むしろ両者の違いは，「数学」の概念そのものの根本的な差に基づくものと考えてよい。そしてそのような眼で見るとき，クラインの本の中で，無限集合を一個の数学的存在と認める道を拓(ひら)いたカントルの仕事に，ほとんど言及されていないのは不思議ではない[1)]。そればかりではない。この方面でカントルの仕事と並ぶ重要な側面として，無限集合を数学の中で取り扱う具体的な道を示し，数学に新しい進路を与えたデデキントの仕事——それはまた公理論的方法であった——や，あるいは無限集合と論理との関連を衝(つ)いて，この方面から新しい数学に対する有力な武器—— 記号論理学——を提供したフレーゲ達の仕事などについては，そこでは全く一言もされていない[2)]。これは一つの意味深い事実である。

その他の「19 世紀数学史」　クラインの『19 世紀数学史講義』は，当然のことながら，後に続く数学史書の 19 世紀の部分に対して，有力な基準になっている。

例(たと)えばストルイクの『数学の歴史[3)]』(1948) は，小冊子ながら 19 世紀のために全体の約 3 分の 1 のページをさいており（全 8 章の中の第 8 章，全 27 節），今世紀の前半に書かれた『数学史』の中では，正面から 19 世紀を取り上げた数少い例である。第 8 章の構成や見方には，(著者の社会科学的関心と共に，) クラインの影響がかなり認められるが，

1) カントルの理論は，ワイエルシュトラスをほとんど唯一の例外として，クロネッカー以下，当時のドイツ数学の長老たちに容れられなかった。
2) 集合論に関しては，カントルのことだけが第 1 巻で二個所ぐらい，ほんの数行にわたって触れられている。
3) D. J. Struik. *A Concise History of Mathematics* (1948)，岡邦雄・水津彦雄訳『数学の歴史』(1957，みすず書房)。ストルイクはオランダの微分幾何学者，マサチューセッツ大学に移り，そこの数学史研究の中心として活躍している。

さすがに集合論に関するカントル，デデキントの仕事は取り上げられている（第 15 節）。しかしやはり全数学を基礎づける存在論としての意義をそこに見出すという姿勢はないようである[1)]。この本はヒルベルトの「数学の問題」を最後のしめくくりとしており，従(したが)ってそこでは 20 世紀数学への新しい道が示唆(しさ)されていて，数学史書として一個の見識ある構成をもっている。しかもなお，上記のような意味から言うと，19 世紀的 19 世紀数学史という感はまぬかれないと思われる。もとより優れた書物であることを重々承知の上でのことだが，一つの史実として冷静に述べておく。この本に限らず，同様の傾向の書物は一般に少くない。

ここで日本の書物についても触れておこう。高木貞治『近世数学史談』（1933；1971 年新版，共立出版）は，「歴史」というよりも，ガウス，アーベル，ガロアなどの業績を中心に，見識ある数学眼で 19 世紀前半の数学を展望した独特の優れた「史談」であり，内容的に必ずしもクラインの影響下にあるわけではない。しかしここにも，クラインの『講義義』から「多くの示唆(しさ)を得たこと」が明記されている。

一方，日本数学会編『岩波数学辞典』の「19 世紀の数学」の項[2)] にも，間接ながら，クラインの影響はあるように思われる。

それに比べると，彌永(いやなが)昌吉『現代数学の基礎概念（上）』（1944，弘文堂）は，上巻に関する限り，19 世紀の解析学がむしろ主題になっている書物だが，すでに上記のような 19 世紀的雰囲気を持っていない。この場合も，その最も重要な要素は著者の数学的かつ歴史的な見識に違いないが，それにしても，その背後の数学的時代精神の違いは考慮

1) これについて，デデキントの無理数論の内容には触れておりながら，現代から見て，より大きな意義を担うはずの「*Was sind und was sollen die Zahlen?*（数とは何か，また何であるべきか）」(1888) の内容には触れていないことが注目される。

2) この項の最初の原稿は高木貞治氏の筆になると聞く。細かくいうと，その第 2 版で多少の筆が加えられているが，それは筆者（村田）の試案に編集委員——おそらく彌永昌吉氏——の検討を経たものである。一つの「歴史」として記しておく。

に入れてよいであろう。ついでながら，これは当時において，世界的に見ても独特の価値をもった書物であったと思われるが，その下巻が今もなお出ていないことは，まことに残念である。

× × ×

私は以上で自分の非力を顧(かえり)みることなく，多くの 19 世紀数学史について種々勝手なことを述べた。しかし言うまでもなく，これは批評を目的としたものではない。むしろこの後で私の書くことは，それらの歴史に多くを負うているのであって，私はそれらを，自分が影響を受けたものとして記録するかたわら，その影響に対する一種の自己反省をも併せ示そうとしたのである。

2-2．本章における問題点

現代数学は言うまでもないが，近代数学自身も一つの混沌である[1)]。しかしわれわれはともかくもこれを整理しなくてはならない。

いろいろな視点　近代数学は時代区分の上からは，

1）ガウス，コーシー，アーベル，ガロアなどの活躍に始まる前半期

2）リーマン，ワイエルシュトラスなどを中心とする後半期

の二つに大別される[2)]。年代的にはカントルやデデキントは当然この

1) 『岩波数学辞典』の「19 世紀の数学」の項には，次のような記述がある。

「19 世紀の終りに至って，数学の研究は極めて多岐にわたり，分科の下に分科を生じ，隔絶した部門との間に意想外の交渉を生じ，その間の関係は複雑で，数学の全体を達観することはほとんど不可能となった。このような事情の下において，1898 年 F. Meyer の首唱により，Göttingen，ベルリン，ウィーンの学士院の後援の下に，数学百科全書の編纂が企てられ，20 年余の歳月を経てようやく完成を見るに至った。それは 19 世紀の数学の鳥瞰図というべきものである。……」

なお 20 世紀のブルバキの『数学原論』(1939–) は，これを統一せんとする一つの試みであったが，発刊以来三十余年を経た今日 (1974) から見ると，この『原論」自身が一つの新しい混沌のように見えなくもない。

2) 『岩波数学辞典』では，これを「勃興期（初めの 30 年），中継期（次の 20 年），隆

後半期に入るが，われわれは既に述べたように，これを第 3 章にまわしている。

また，特に無限の問題を中心とする観点から部門別にこれを見ると，

1′）数論・代数学における無限の問題

2′）幾何学における無限の問題

3′）解析学における無限の問題

などの区別が考えられ，他方，同じ観点から傾向別にこれを見ると，

1″）批判的傾向

2″）創造的傾向

の二つが区別されよう。

ここに批判的傾向というのは，拡張されていく数概念の吟味，非ユークリッド幾何学に見られるような空間概念ないし幾何学自体への根本的批判，極限算法への吟味から実数概念への吟味などの動きを指すが，これらの多くに共通な要素として，特に世紀後半においては

数学を自然数の理論の上に再構成しようとする動き

という性格が顕著である。なお，集合論の形成後には，これはさらに，集合概念の上に数学を構成しようという動きに発展する。

一方，創造的傾向というのは，（その最大の問題である集合論は後にまわすとして，）数概念の拡張，非ユークリッド幾何学の形成，新しい代数学の発足など，あるいは無限の問題に直接に関連することとして，空間論，特に射影幾何学における無限遠要素の導入，関数論における無限遠点の導入などを指す。

実をいうと，この最後の点は，これを更（さら）に広く解すれば，「未だ限定されぬもの」という意味での「無限者」が，数学の対象として限定され，確定されていくということまでをも包含しうるかもしれない。もとより，無限の問題をこのように広く解すると，数学の展開の大部分はこ

盛期（後半の 50 年）」に分けている。

の解釈の下に包含されてしまう可能性があり，それではせっかく話題を「無限」にしぼった意味が薄れてしまう。しかし数概念の拡張を始めとして，群論の形成に始まる抽象代数学の芽生え（III–2–4，III–4–3b）や，リーマン幾何学，リーマン面などに始まる多様体論——現代的幾何学の主要題目——の芽生え (III–2–5, 7a) などのことを考えると，これもまた軽々に見過ごすことのできない見方かと思われる。

以下の節は，上記のようなことを念頭におきながら組立てられたものである。ただし以上の論点のうち，自然数論の基礎をなす数学的帰納法の問題は，カントル，デデキントの仕事との関係上，第 3 章にまわしている。

無限定を限定すること　上で触れた広義の「無限」論の見方は，すでにギリシャ数学の歴史においても認められることに注意しておく。すなわち紀元前 6 世紀頃のミレトス学派の哲学者アナクシマンドロスは，変化に満ちたこの世界の原質として，「ト・アペイロン（無定形，無限定）」という不定形の実体を導入したといわれる。これに対してエレア派は，学問の本質的対象をそのような「動くもの，変化するもの」の中に求める傾向を批判し，論理と存在との一体化が期待されるような不動不変の実体[1)]を，学問の真の対象として措定しようとしたと見られる。これは第 I 部で論じられた Á. サボーの説の重要な契機であるが，この見方の上に上記の広義の「無限」論を持ち込むことが，もし許されるならば，ユークリッドの公理論的数学の形成それ自身が，実は「無定形，無限定」を理念的な意味で定形化し限定して，そこに一個の数学的存在の世界を拓（ひら）くことだったのだ，ということも言えるであろう。

2-3．ガウスにおける数学の変貌

1) 論理と存在との一体化ということの内容は，集合論に関連して第 3 章で触れる。

近世数学の発端　C. F. ガウス (1777-1855) はドイツの人，19 世紀以後の近世数学を発足させた巨大な数学者で，アルキメデス，ニュートンと共に，世界の三大数学者と呼ばれることがある。

数学における 18 世紀と 19 世紀との区別は，ガウスを境として見るとき最も明瞭である。あるいはそう言うより，その変貌はこの人の力に負うところが大きい，という方が正しいであろう。大局的に見ると，この変貌も，古代ギリシャや 17 世紀に現われた変貌ほど根底的ではないかもしれない。しかしそれにしても，ピアポント，クラインその他の筆によって示されている 19 世紀的数学の性格は，そのほとんどがガウスの中に現われている上，いくつかの問題についでは恐ろしいまでに時代を超えている[1)]。ガウスを他の二人の巨人と並べるのは，決して理由のないことではない。

試みに，あえてこの三人の特徴を比べてみると[2)]，理論の厳密性を重んじた点では，ガウスはアルキメデスと共に，ニュートンを超えているかもしれない。しかしその分だけ，ニュートンの数学的自然解釈の構想力は他を超えているのであろう。少くとも自然界への数学的切り込みの深さからいうと，ガウスもこの二人には何歩かをゆずろう。これに対してガウスで特に注目されるのは，数の世界への探究の深さである。これは恐らくガウスの独(ひと)り舞台であり，彼はこれによって，19 世紀以後の数学に数論化の傾向が生ずる源因の一つとなり，その他，数学の進路を大きく動かすことになったのである。

ガウスにおける創造と批判　ガウスは数の世界の奥深く秘められた内的なつながりを，数多く探り当てた人である。その最大の業績は近代的な整数論の建設であるが，整数に関するこの理論——それ自体極

1) 高木貞治『近世数学史談』（初版 1933，共立出版）の第 11 節に，「ガウスノ整数論ヲ吾々ハ百年後ニ至ツテ漸ク消化シ終ラント**シツツアル**ノデアル」という言葉が見える（太字は村田）。

2) もっとも，こういう比較は，本来，時代の相違を考慮せねばならず，そうなれば，こんな比較自体が実は意味を失なう。

めて深いもの——が，実はその範囲だけで終っていないところに，その創造力の大きさがあり，ひいてはその影響力の源もある。

実際，ガウスは整数論の場合をはじめとして，級数論その他の解析学的問題から，理論物理学，実験・観測等の数値計算に到るまで，つねに数計算を理論と結びつけている。それもただの計算ではないことはもちろん，計算に理論を応用する位のことでもない。むしろ人間ばなれのする程の厖大（ぼうだい）な計算のデータの上に，奔放な天才的飛躍をもって，数の世界の内奥に隠された或（あ）る脈絡を探ったのである。自然科学への寄与の場合も，ほぼこれと同様の線で事が運ばれているようである。ガウスは哲学者ではなかったかもしれないが，その志向の底には，やはり，世界の根底には数学的真理が存在する，という信念のようなものを持ちつづけていたのであろう[1)]。

ガウスの批判的傾向——それはしばしばガウス式厳格主義と呼ばれる——もまた，その仕事の中心が数の世界であったことと無縁ではあるまい。というのは，具体的数値を土台として帰納的に推測された事実については，当然，検証が必要だが，相手が数値に関することだけに，それは厭でも「厳格」にならざるをえなかったからである。それに幾何学と違って，数値は本来いくらでも厳密化しうる対象であったことも作用していよう。こうして結局，創造力と批判的精神はガウスにおいて，表裏一体の形を取ることになる。彼はいわば，電磁気学におけるファラデーの発見力とマクスウェルの理論的構想力とを，数学の世界で一身に体現したような人物なのである。

以上のようなことを，複素数に関する話題の中から二三を選んで，簡単に示してみよう。ただしガウスの本領が最も発揮されている整数論

1) ガウスが弟子シューマッハーに宛てた手紙の中に，ヘーゲルその他の当時の哲学者が，一知半解の自然哲学を展開していることに対する憤りを示すものがある。しかし彼がカントの空間論に親しみ，これと対決する姿勢をもっていたことはよく知られている。（例えば近藤洋逸『新幾何学思想史』第 4 章参照）。

については，本書の中心問題との直接的関連が乏しい上，極めて専門的話題になって私の手に負えないので，残念ながらほとんど触れることはできない。

複素数をめぐる脈絡（1）方程式論　近代数学において複素数の演じた役割りはまことに大きい。この「数」は長らく ‘imaginary’（虚の，または，仮想の）と呼ばれてきたわけだが，これは実は確固たる数学的実在として，数学の諸分野において重要な対象であり，むしろ，それら諸分野をつなぐ太いきずなである。このことは（整数論を持ち出さないという制約の下であっても，）ガウスの確立した方程式の基本定理や，彼が時代に先行して開拓していた（複素変数の）関数論などを見れば，容易にわかることである。

ガウスの学位論文（1799 年公開，書かれたのは 1797 年で当時ガウスは 20 歳）は方程式論の基本定理の証明である。これは，

> 「複素数を係数とする（n 次）代数方程式は，複素数の範囲で必ず根をもつ。」

ことを主張するもので，ガウスはそのとき，方程式の虚部と実部とのグラフの交点を用いて，これを証明している（今日の眼で見れば，これはトポロジイ的考察の発端である。）

ところがこの定理でおもしろいのは，ガウスがその証明を後で三回もやっていることである。これは証明に不備があったためではなく，この一つの事実がいろいろの方面から攻められることを示したもので，例（たと）えば第三回目 (1816) の証明では，複素関数に関する複素積分が使われている。すなわち代数学と解析学とのつながりである。また第四回目 (1850) には，第一回のと同じ方針の下で，ただし複素数を公然と用いた証明が行なわれている。実はこの最後の行き方には 18 世紀以来ダランベールを筆頭とする何人かの先駆者があるが，複素数を真正の数学的対象として把握し，これを正確な数学的方法で用いたのはガウ

スが最初である。18 世紀における複素数の使用は，実数について確認された世界へ，遮二無二，複素数を形式的に投入するような傾きがあって，発見的手段としてはともかく，数学的厳正さにおいては欠けるところがあったのである。

ともかくここで注意すべきは，こういうことの行なわれるたびに，数学の諸分野の間のつながりが目に見えてくることである。そしてまた，それと共に複素数の数学的存在としての地位も次第に固まっていったといってよい。

もっとも，ガウスは実際には早い時期から複素数を正確に把んでいたことが，その手紙や日記からわかっている。すなわち彼は，実数が直線上の点で表現されるのに対し，複素数は平面上の点で表現されること（いわゆるガウス平面）を十二分に承知しており，そのことを公表したのは 1831 年のことだが[1]，現に上の基本定理の第一回目の証明の場合でも，その配慮ははっきり見えているのである。

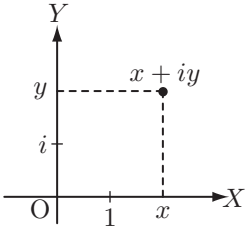


図 2-1　ガウス平面

複素数をめぐる脈絡（2）関数論・楕円関数論・整数論　しかしもっと驚くべきことは，1811 年のベッセル宛の手紙の中で，ガウスが複素関数の積分が多価性をもちうるということについて，正確な知識を伝えていることである。これは関数論 (III–2–7) の基本について完全な理解がないとできないことだが，普通に関数論の父といわれるコーシー (同処) がそれについての論文を発表する 1825 年より，14 年も前の出来事なのである。

関数論というと，それの一つの重要な発端となった楕円関数論につ

1) ただし，このとき示されたのは複素整数の表現であった。なお複素数の幾何学的表現については，ガウス以前にもウェッセル (1798)，アルガン (1806) などの先駆者があったが，それが広く用いられるようになったのには，ガウスの影響が大きい。（ブルバキ『数学史』「複素数・角の計量」の章を参照。

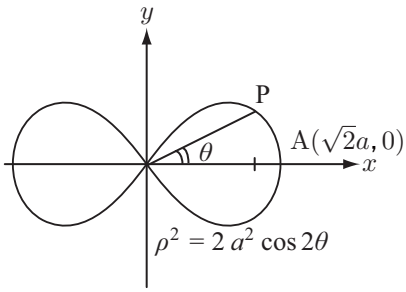


図 2-2　レムニスケート

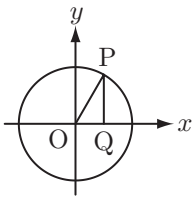
いても触れておく必要がある。楕円関数というのは，三角関数（または円関数）の一種の拡張で，その特徴は，三角関数が $2n\pi$ という唯一の周期を持つのに対し，二通りの，いわゆる二重周期を持つところにあるのだが，ガウスはこれに関する研究を開拓するに当り，これと整数論との間に深いつながりを見出している。すなわち彼は『整数論講義』(1801) の中で，その一つの成果として，円周の n 等分，すなわち方程式 $x^n - 1 = 0$ の根をめぐり，方程式の次数 n と，（定規とコンパスによる）円周 n 等分の作図可能性との関係を，まず整数論的に解明した（有名な正 17 角形の作図はその一例），そしてそれにつづいて，レムニスケートの求長，等分問題を考え，そこから，楕円関数という鉱脈を掘り当てた上，更（さら）に関数論へと発掘の手を進めたのであった[1)]。

しかもこれは，その整数論研究が招来した影響のほんの一つの面なのである。

最後に注意したいのは，ガウスが『整数論講義』の中で，或（あ）る性質を共有する 2 次形式 $ax^2 + bxy + cy^2$，（a, b, c は整数）の全体や，（1 つ

---

1) 三角関数は円関数とも呼ばれる。それはその幾何学的定義が円と関連するからで，



実際，半径 1 の円に弧度法を用いると，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}} = x$ ならば，$\overline{\mathrm{PQ}} = \sin x$；または
$\overline{\mathrm{PQ}} = y$ ならば，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}} = \sin^{-1} y$ となる。ここで

$$\sin^{-1} y = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

がなりたつが，ガウスはこれからの類推によって，の研究に手をつけた。これがレムニスケートの求長問題であるが，その背後には三角関数の拡張という目標があり，これが機縁となって楕円関数論の開拓が始まるのである。これについては，高木貞治『近世数学史談』を参照。

の n に対する）1 の n 乗根の全体などが，整数に関する或(あ)る集合と算法の上で共通点をもつことを，意識的に用いている事実である。

同講義の中心課題は実は整数のもつ 2 次関係の研究なのだが，上のことは今日の群論の考え方（III–4–3b；特に可換群に関すること）が，既にそこで用いられていることを示している。更(さら)に，先に述べた楕円関数の周期と整数の或(あ)る性質との間にも，これと同様の関係があるのだが，ガウスはそのことも知っていただろうと思われている[1)]。

以上述べたことは，元来はガウスの眼力の鋭さの片鱗を示すものであるが，あえてわれわれの主題と結びつけるならば，これらはまた，未だ形をもたざる無限定の対象に，一つの形を与えて数学的対象に化するという，前節で触れた「無限」論の一種と言えなくもない。ただここまで言っていると，われわれの対象はそれこそ無限に拡大するばかりだから，以後はあまりこうしたことに触れないでおく。

ガウスにおける無限の問題　ガウスの仕事の中での普通の意味における無限の問題として，ここでは次の三つの点を注意したい。

その第一は，元(もと)をただせば彼の厳格主義に由来することで，無限級数その他，無限算法の安易な使用を戒めたこと，第二は一種の無限大という意味での空間の問題，第三はその曲面論に見られる無限小の問題である。

第一の問題は，ガウスの仕事の中で特に重要なこととは言えないが，後世への影響を考えると無視できないものである。実際，無限級数や無限積を，収束に関する配慮なしに無暗(むやみ)に「計算」すると，いろいろな矛盾や間違った結果が出てくるが，18 世紀にはその辺の吟味は十分ではなかった。19 世紀になって，人びとは初めて収束発散の問題に慎重になってくる。しかしガウスは，恐らくその計算力に基づく内観によってであろう，そのような危険をうまく避けていた[2)]。

1) ブルバキ『数学史』「線型および複線型代数学」の章参照。
2) 同じようなことは，ニュートンその他の 17 世紀の大数学者にも当てはまる。もっ

このことについて，ガウスは弟子のシューマッハーに，「数学における無限というのは，所詮（しょせん），言いまわしの問題 (façon de parler) で，本当は，限りなく大きくなる有限，或（ある）いは，限りなく小さくなる有限が問題なのだ」ということを書き送っている。この考え方は，19 世紀的近代数学の批判的傾向に直接間接に影響したと見られる。

このような点を除くと，ガウスは，今日言われるような意味での数学の基礎の問題に手を触れた様子はない。しかし数論を中心として創造力と批判力とを兼ね備えたその活動は，やがて近代数学が数論化の性格を強め，数学の数論的基礎づけという動きを生ずるについて，その重大な原因の一つになったと言えよう。

なおこの辺のことに関連して，ガウスは記号の無分別な使用を警告し，数学は記号の運用で考えるものではなく，内容的に，むしろ帰納的に考えるべきものだということを強調している。これは，一見われわれが今迄強調してきた記号法の意義ということと背反するように見えるが，必ずしもそうではない。発見的方法として，ガウスのいう帰納法の意味は大いに評価せねばならないが，記号法にも，やがて触れるような発見的，示唆（しさ）的な意義があり，それと共に，後者には事柄（ことがら）を整理し，次の発展を期するという意味もある。ガウスの警告は，記号の無分別な使用についてであって，よい記号法は帰納的，内容的考察をも支えうるはずのものなのである。

第一の問題が長くなったが，次に第二の空間の問題というのは，実際には非ユークリッド幾何学の建設という大問題である。また第三の曲面論は，形の上では例の 2 次形式の研究につながるものだが，それと共に，彼の陸地測量の経験とも関連し，また曲面の曲率をどう定義

とも，この場合には，対象となっていた関数が素性のよいもの（いわゆる解析関数）であったことが大いに作用していよう。要するに，関数概念が数学的存在として確立され，その意味が次第に拡張されるにつれて，その存在性に関する吟味が進むのである。

するかに関する深い思索にも関連している。（ガウス的数学の内的脈絡の深さ！）これらは改めて次節におい’て取り上げよう。

2-4. 射影幾何学の形成

空間の数学化　近世数学において，単に数学あるいは自然科学の問題としてのみでなく，深く知識哲学の根底にまで影響した事件というと，まず非ユークリッド幾何学の成立を挙げねばなるまい。しかしその前に論ずべきこととして射影幾何学の形成という問題がある。

これらの二つの歴史は実はユークリッド幾何学の形成された時代にまで遡（さかのぼ）りうることで，しかも近世以後，そこにはまず空間概念の数学化という大問題があった。すなわち 17 世紀においてすら，「空間」は延長的実体（デカルト）とか，神の感官（ニュートン）などと呼ばれていたのであり，これが数学的存在として（しかも幾通りにも）規定されるという事態こそ，この方面の問題にとって最初にして最大の飛躍だったのである。

それらの歴史にはまた当然，無限の問題がからんでいる。しかも数学史あるいは幾何学史の問題として見る場合にも，それぞれが共に見逃しがたい意義をもっていることは言うまでもない。そこで本節ではまず射影幾何学の形成について述べよう[1)]。

エコール・ポリテクニクの伝統　18 世紀から 19 世紀初頭にかけて，数学の中心はフランスにあった。18 世紀後半の数学を代表する「三人の L」，すなわちラグランジュ (1736–1813)，ラプラス (1749–1827)，ルジャンドル (1752–1833) もそうだが，特にエコール・ポリテクニク（高等工芸学校，理工科大学校などと訳される）の創立は，後世への影響からいって見逃すことができない。これはフランス革命の前後に，内外多

1) 寺坂英孝『射影幾何学の基礎』(1947，共立出版)，同『幾何とその構造』(『数学講座』第 9 巻，筑摩書房，1971)，その他を参照されたい。

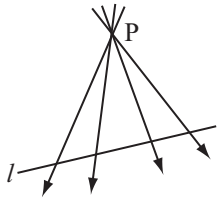
事であった当時のフランスの国家的要請として，技術者の養成のために開かれた学校である。（この辺からそろそろ近代的国家が学問の世界にも顔を出す。もちろん明治初期の日本のことも連想されてよい。）

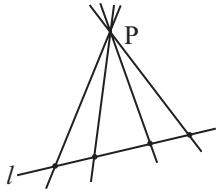
エコール・ポリテクニクはナポレオンの強力な援助の下に，優れた数学者であり指導者でもあったモンジュ (1746–1818) を実質的な中心として創立され (1794)，（同年創立の）エコール・ノルマル・シュペリゥール（高等師範学校）と共に，今日まで幾多の俊秀を生んだ学校である。近代数学における幾何学の伝統はここに始まるといってよい。事実，モンジュは特に画法幾何学の創始者として有名である。

もっとも，この幾何学の伝統は，19 世紀の前半の途中から次第にドイツあるいはイギリスに移り始め，世紀の後半には，すっかりドイツにお株を奪われてしまうことになる。現に射影幾何学の形成は正（まさ）にその形通りに進行しているのである。更（さら）にこれが非ユークリッド幾何学の問題になると，舞台は完全にフランスを離れ，かえって当時における後進的地域で開花する。非ユークリッド幾何学のように，伝統への根底的反逆を必要とした仕事になると，むしろ伝統は束縛として働くとすべきかもしれない。ただし，ここでもまた巨人ガウスの影響が隠然として作用していることは注意せねばならない。なおフランス数学がこの時代以後しばらく，やや硬直化するのは，コーシー以後の解析学をも含めて一般に見られる事実である。

射影幾何学の前史　大まかに言えば，平面射影幾何学とは，射影と切断という二つの基本作図によって描かれる図形について，長さや角の大きさなどの計量的要素が介入しない性質を調べるものである。この際特に「二直線は必ず交わる」こと（平行性の欠如）が要請されており，そこから多くの理論的特徴が現われてくる。特にその発展途上で導入された変換という考え方は，幾何学のみでなく数学全体の近代化に大きな寄与をすることになる。また，上の二つの作図公準において，

1 点 P を，P 外の直線 l 上のいくつかの点（点列）と結んで，いくつかの直線（線束）を引くこと —— **射影**	1 直線 l を，l 外の点 P 上のいくつかの直線（線束）と交わらせて，いくつかの点（点列）を作ること —— **切断**





点の役割と直線の役割とが互いに入れかわっていることを，後のために注意しておく。

この幾何学は画法幾何学の理論化に発するものであり，これが近代画法幾何学の創始者たるモンジュの影響下に生れたのは偶然ではない。

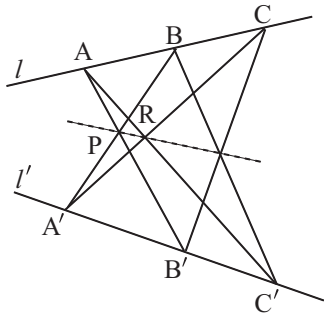


図 2-3　パッポスの定理
2 直線 l, l' 上にそれぞれ 3 点をとり，図のように結ぶと，交点 P，Q，R は一直線上にならぶ.

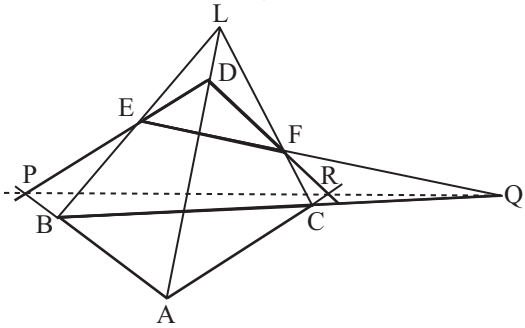
こうした射影幾何的な定理は，古代にもその例がないわけではないが（例：パッポスの定理），本当に射影幾何といえるものは，17 世紀中葉のデザルグとパスカルの仕事から始まる (II–9)。次に二三の重要な定理をあげておく。（次頁）

ところが 17 世紀後半から 18 世紀にかけては，いわば微分積分学の世紀であり，従(したが)って幾何学でも，それに関連の深い解析幾何学が全盛であって，上記のような，いわゆる総合幾何学はしばらく顧(かえり)みられなかった。しかし解析幾何学はというと，その原理はともかく，それが実際に力を発揮するのは代数学が有力に使える範囲，すなわち 2 次曲線の辺りが中心であり，それ以外はせいぜい微分積分学の応用問題の

デザルグの定理　および　**その逆**

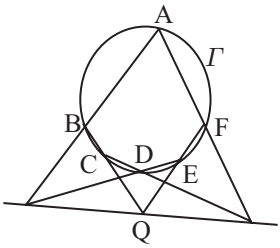
ΔABC と ΔDEF の対応頂点を結ぶ直線 AD，BE，CF が，1 点 L で交わるならば，各対応辺の交点（AB，DE の交点 P；BC，EF の交点 Q；CA，FD の交点 R）は 1 直線上にある

ΔABC と ΔDEF の対応する辺の交点 P，Q，R が，1 直線 l 上にならぶならば，各対応頂点を結ぶ直線は 1 点で交わる。



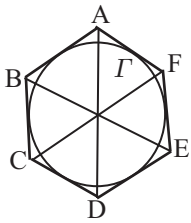
パスカルの定理

円錐曲線 Γ に内接する 6 辺形 ABCDEF の，対面する辺の交点（AB，DE の交点 P；BC，EF の交点 Q；CD，FA の交点 R）は 1 直線上にある。



ブリアンションの定理

円錐曲線 Γ に外接する 6 辺形 ABCDEF の，対面する頂点を結ぶ対角線 AD，BE，CF は一点で交わる。



ようなことになってしまう。モンジュをはじめ，その後継者たちは特にこの点を衝(つ)いて，ここに本来の幾何学的直観を駆使する分野，すなわち新しい総合幾何学を拓(ひら)こうとしたわけである。

双対原理　まず1806年, モンジュの弟子であるブリアンション (1785–1864) が，パスカルの定理を証明した際，前のページでパスカルの定理と並べて掲げた定理を発見した。

パスカルの定理とブリアンションの定理の場合も，「直線」と「点」を入れ替えてなお適当に解読すると，両定理が互いに入れ替ることに注意しておく。実際，例(たと)えば Γ に内接する 6 辺形とは，頂「点」が Γ の上にある 6 辺形（あるいは 6 点形）のことであり，外接する 6 辺形とは，辺という「直線」が Γ の上にある（すなわち接する）6 辺形（あるいは 6 線形）のことである。

以上あげたような, 左右一組の作図公準や定理は, 互いに双対の関係にあると言われる。今日の射影幾何学では，公理や定義が，この関係に合うように組立てられており，一般に一つの定理が導かれると，その双対に当る定理もまた直ちに導かれる。というのは，証明もまた互いに双対の関係をみたすように書けるからである。ブリアンションは格別このことを一般的に意識したわけではなかったようだが，ともかく彼がパスカルの定理の証明に際して自分の定理を得たのは，偶然ではなかったわけである。

今述べた一般的事実は，今日，（射影幾何学の）双対原理（または双対定理）と呼ばれる。「原理」といっても，上で簡単に説明したような「証明」を与えることのできる事実である。けれどもまた，これは射影幾何学「の中の」定理ではなく，射影幾何学の理論そのもの「についての」定理であって，次章で説明する「メタ定理」 (III–3–6b) の最も簡単かつ典型的な例の一つである。

近代的な射影幾何学はまずこの双対原理の発見をめぐって展開され

る。しかし多くの重大な発見の場合と同じく，これもまた一朝一夕に整った形で見出されたものではなく，そこにはいろいろな先取権争いや，後から見ると，まどろこしいような曲折に満ちた歩みが見られる。しかしわれわれにとっては，そのようなことの詳細よりも，この動きの中から無限概念について新しい見方が生じてくることの方が一層大切であろう。そしてこの場合もまた，無限者の数学化は，まず図形の指し示す彼方(かなた)に洞察され，最終的には記号的方法による整備によって数学的存在と化せられていく点が，特にわれわれの注目を惹(ひ)く。

無限遠点の導入　射影幾何学の形成について第一に挙げるべき名はポンスレ (1788–1867) である。彼もまたモンジュの弟子だが，ナポレオンのロシア遠征に従軍してそこで捕虜となり，虜囚としての生活の間 (1813–14) に，射影幾何学の基本を組立てたことで有名である。

実はこの時期のポンスレの考えは解析幾何学的であり，その輪廓は晩年に改めて公表されている (1862–1864)。しかし釈放されてパリに帰ってからの彼は，むしろ総合幾何学の立場をとった。ただそれを強化するために，あえて解析幾何学の長所である一般論のできる所を採り入れ，それによってその議論を進めようとしたのであった。（これもまた伝統の力か。）

ポンスレが解析幾何学の方法に触発された第一の点は，その幾何学体系の中に《数学的関係恒存の原理》および《連続性の原理》を導入したことである。

《数学的関係恒存の原理》というのは，例(たと)えば図形の上では相交(あいまじ)わらぬ円と直線であっても，方程式の問題として解けば（虚根ではあるが）解が得られるが，この場合に「無限遠虚円点」という仮想の要素を導入してその欠を補い，それによって，隠された幾何学的関係を探ろうという原理である。

《連続性の原理》もこれと同じで，本来は数学的表現の「連続」性

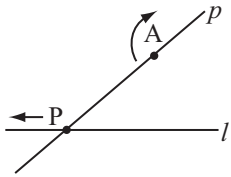


図 2–4

に関することであるが，後のために現代的な形で説明しておく。定直線 l と l 外の 1 点 A とが与えられたとき，A を通る直線 p を A のまわりで回転すると，l と p の交点 P は，l 上を (右から左へ) 走る。しかし回転は連続的に行なわれるにもかかわらず，P の方は，p が l と平行になる一瞬に消滅し，「連続性」はそこで失われてしまう。後者の「連続性」を救うため，ここに理想点として「無限遠点」を導入し，隠された多くの幾何学的関係を，これによって探ろうというのがこの原理の精神と言ってよい。これらは近世の「意志的」な見方 (III–1–3) の一例である。

このような「無限遠点」，あるいはむしろ「理想元」の導入は，たとえ仮想のものにもせよ，そこに何かしら実在的な無限者を想定させるものであり，大きく言えばゼノン・アリストテレス以来の禁断の地に一歩踏み込んだことになるであろう。しかしそれは，当時，解析学で吟味され始めていた極限論的無限算法に比べても，遙(はる)かに問題の多いものであった。現にコーシーなどはこのような考えに反対している[1)]。しかしポンスレは，この原理——まだ必ずしも解りやすい表現ではなかった——に基づいて，円錐曲線論を射影幾何学的に整備し，この方面から双対原理に，少くともその或(あ)る局面に，近づいたものらしい。

双対原理への接近・同次座標　この双対原理の発見の先取権をめぐって，ポンスレと，これもモンジュの弟子であるジェルゴンヌ (1771–1859) との間に論争が生じた (1826 以後)。もっとも，これは 18 世紀後半からあった総合幾何学対解析幾何学の論争の引継ぎでもあって，ジェルゴンヌは，解析幾何学こそ双対原理のつねに成立することを示すものだといい，ポンスレは，それは極と極線の関係から自分が総合幾何学

1) もっとも，コーシーは実無限存在せずという意見を強く述べていた人で，この反対はその方からのものである。コーシーの実無限への批判は *Sept Leçons de Physique Générale* (1885) などにある。

的に見出したものだといった。

ここで解析幾何学と総合幾何学との対立というのは，幾何学の対象を「計測 (mesure)」ないし「拡がり (étendue)」に限る解析的か，それ以外になお「形」などの本質的属性を認める——総合的——か，というような問題であって，「空間」の問題と意識的に対決する姿勢は，まだ必ずしも明確ではない。また双対原理といっても対象は限られており，実際のところ，この節の初めに説明したようなその全貌は掴(つか)まれていない。現にこの論争の間にもドイツのプリュッカー (1801–68) が，(ポンスレと逆に) 総合幾何学から解析幾何学に転向し，同次座標というものを導入して，点と直線との双対性に新しい視点を与えている。

同次座標の考えに対して重大な意義をもったのは，フランスのシャール (M，Chasles，1793–1880) による非調和比の不変性の発見である。これはこの時代でのフランス数学の伝統の最後の華であるように思われる。すなわちこの後の理論の展開はむしろドイツで行なわれるのである。

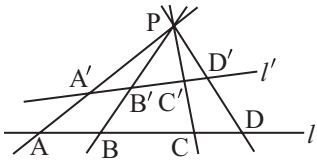


図 2–5

直線 l 上の点列 ABCD に対し，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}} : \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$$

をこの点列の非調和比という。l 外の点 P からこの 4 点を射影して線束を作り，これを別の直線 l' で切断して点列 A′B′C′D′ を得るとき，この点列の非調和比の値は元の値と変らない。今日ではこのことを，「4 点の非調和比は，射影と切断による図形の移動 (射影変換) に関して不変である」という。この不変性が，射影変換の舞台たる射影座標の目盛として役立つのである。

同次座標とは，普通の直交座標 (x, y) を $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$ の，あるいは (x, y, z) によって置き換えたもので，これによると例えば直線の方程式

$$ax + by + c = 0$$

は，

$$a\frac{x}{t} + b\frac{y}{t} + c = 0$$

経て，x, y, x に関する 1 次同次式

$$ax + by + ct = 0 \tag{1}$$

となる。ところが (1) において，$(a,\, b,\, c)$ の値を定め $(x,\, y,\, z)$ の値を変化させると，一つの直線上を「点」が移動するのに対し，もし $(x,\, y,\, z)$ を固定して $(a,\, b,\, c)$ の方を動かすと，これは，点 $(x,\, y,\, z)$ の周囲を「直線」が回ることを示してくれる。してみると「点」と「直線」の対応は，何を「定数」とし何を「変数」とするかに翻訳されることとなって，双対原理にはまた一つの新しい視野が開ける。特にプリュッカーが「点」と「直線」との同等的関係に基づいて，点の集合としての図形の他に，直線の集合としての平面あるいは空間という考えを示唆(しさ)しているのは，後のカントルの集合論における考え方の展開を思い併せるとき，なかなか興味深いことである。

ところでプリュッカーの新しい座標のもう一つの大切な点は，それによると，先に仮想の要素として導入された「無限遠点」に，一つの(記号の意味で)具体的な表現が与えられる点にある。というのは，$(x,\, y,\, z)$ という「点」が，実は $(\frac{x}{0}, \frac{y}{0})$ という「無限遠点」に対応するからである。

この辺まで来ると，たとえ個人個人の意識の中にはまだ生れていないにせよ，幾何学とはユークリッドただ一つではなく，ある人為的解釈をもって数学化されうるものだ，というような考え方の可能性が，時代の中にすでに醸成されつつあるように思われる。もっとも，これは今のところ筆者の推定に止まる[1)]。

1) シャールの『幾何学史』(*Aperçu historique sur l'origine et le développement des methodes en géometrie*)（初版 1837，第 2 版 1875）は，この時代までの幾何学史として非常に参考になる。それはシャールが単なる歴史家でなく，前記のよう

ともかくプリュッカーはやがて同じ考えによって 3 次元射影幾何学の双対原理を述べ，次いでこの種の座標に虚数を導入することによって，「無限遠—虚円点」のたぐいをも同じように処理する。こうして円，楕円，放物線，双曲線という円錐曲線には，これらの無限遠点を中心とする極めて透明な関連性が—— たとえ一種の人工的擬制であるにせよ——見出されるようになるのである。すなわち，先には「何かしら実在的な無限者」に過ぎなかったものが，今や或(あ)る明確な記号的表現をもち，記号的算法の自由な適用をも受けることになる。

今にして思うと，これは，数学というこの独特の世界のあり方を象徴する典型的な事件の一つだったのではないか。ここに数学を独特の世界と呼ぶのは，これが経験的現実に即しながら，しかもなお現実を超えた一種架空の世界であることを指す。主観と客観との交錯する地平にある世界といってもよい。あるいはむしろ現実を超えることによって，却(かえ)って現実の或(あ)る局面を，より明瞭に描いてくれる世界だという方がよい。ユークリッド的図形がそうであり，数自体が既にそうなのである (III-1)。しかも今の場合，この透明さが，例によって記号的表現を介して初めて獲得されている点は注意すべきである。

けれどもこれでもまだ双対原理はその全貌を現わしたとは言えない。例(たと)えば先に例示した左右の並べ書きは，まさに双対原理の持つ優れた意味での形式性を見せてくれるものだが，それはまだ文献の上には現われてこない。これはその後，ドイツのフォン・シュタウトの射影幾何学公理化などの仕事をへて，次第に形をなしてくるもので，われわれが上の並べ書きについて述べたような，双対原理のメタ定理としての性格は，なお十分に意識されていたかどうかわらない。誰が双対原理の真の発見者か，それは微分積分学の場合と同じように，恐らく誰にも言えないことなのである。

に幾何学の進展に実際に寄与した人だったからであろう。しかしこの書にも，上のような意識はまだないように思う。

しかも双対原理のメタ定理としての本当の意義は，20 世紀のメタ数学（または証明論）の誕生によって，初めて十全の姿を現わしたと言えるようにさえ思われる。これについては第 3 章で改めて触れるであろう。

1 次変換と線型代数　プリュッカーの研究は解析幾何学の手法によって進められたが，当時ドイツでは反解析幾何学的な行き方の方が盛んで（シュタイナー等），プリュッカーの仕事はむしろイギリスのケーリーなどに影響する。

ケーリーは代教学の専門家だったため，プリュッカーが余（あま）り使わなかった行列式を武器として，n 次元空間における射影幾何学を創（はじ）め（1840 年代），続いで 1 次変換（または線型変換）に行列の記法を導入し (1858)，結局，今日の線型代数学の先駆者（せんくしゃ）の一人になった。

実は近代・現代の数学に対して双対原理より遙（はる）かに影響の大きいのは，（非調和比に関して触れた）射影変換の考えである。この考えの形成も誰に始まるとは言いにくいが，ともかく射影変換は解析幾何学の手法の下では，1 次有理式（後出の式 (4)）で表わされることが分り，更（さら）に射影幾何学の対象はこの変換によって不変なもの（例：非調和比）であることや，この変換が個々の図形の移動変化というより平面上の点全体の移動変形であり，あるいは逆に，座標系自身の移動変形（座標変換）と見うることなどが分ってくる。（平面ないし空間の全体の対象化！）

もちろん今日，変換の考えは射影変換に限られてはいない。他方，射影変換にも種々の特殊ケースがある。例（たと）えばユークリッド平面で，図形を正方向（時計の針の反対方向）に角 ϑ だけ回す操作はその特殊ケースの一つで，

$$\begin{cases} x' = (\cos\vartheta)x - (\sin\vartheta)y \\ y' = (\sin\vartheta)x + (\cos\vartheta)y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad (2)$$

と表わされる。なお右の A，すなわち変換式の係数の表は，この 1 次変換の行列と呼ばれる。

行列の理論は A のような数の表を数の拡張であるかのごとくに扱い，そこに一種の四則算法を導入して，連立 1 次方程式や座標変換などを取り扱うところから始まるのだが，今はその歴史には立ち入らない。ただし次の項で述べるように，プリュッカーの弟子であったクラインは，或(あ)る範囲に属する変換全体のもつ性質——変換群——に注目して，幾何学の分類を行なったのである。

いずれにしても，ここまで来たとき，空間が既に座標という実数の組の集まりで置き換えられ，その全体の変換というような対応（写像）が数学の対象になりつつあることは注目に値する（空間の数学化とその全体的把握）。

イギリス数学の勃興　実はイギリスの数学は，ニュートン以来の反ライプニッツ主義が祟って，19 世紀初めまでは全く振わなかった。しかし電子計算機の先駆者の一人として名高いバベッジ（1792–1871）などが，ライプニッツ受容を旗印しにしてケンブリッジに「解析協会（Analytical Society）」を創立した頃（1815）から，特に代数学の方面で独自の領域の開拓が始まってくる。ド・モルガンやブールの論理代数（今日の記号論理学の源の一つ）や，上記の線型代数学の開拓はその例であり，ケーリーはシルヴェスターと共に後者における代表的人物なのである。なお，線型代数学というのは，上記の行列あるいはベクトルに関する理論で，簡単に言えば正比例の理論の延長に当ることと言ってもよい。ただしもちろん初等的な理論に終始するものではなく，しかも数学にはこれと共通の理論構造をもつ分野が少くないため，今日では線型代数を一つの重要な典型として，線型数学という大きな部門が出来ている[1)]。

もっとも，線型代数は別に「解析協会」の専売ではなく，早熟の天

1) 線型微分方程式，線型作用素，線型空間，線型位相空間などの理論数学や，線型計画法などの応用数学は，この部門に属するか，あるいはその中で論じうる側面をもっている。

才として有名なアイルランドの W. R. ハミルトンの四元数論 (1843 以後) ——ここにもライプニッツの思想が影を落している——や，ドイツのグラスマンの『延長量論 (Ausdehnungslehre)』(1844) などの巨大な先駆的業績があり，またその前には，それらに等しく影響したヤコビの解析力学 (n 次元一般化座標の使用) などの業績もあった。また反対に，英国学派はアメリカにおける数学の振興に大きな影響を与え，その結果，初期のアメリカ数学もまたこの方面の仕事から事を始めている (ギブス，パースなど)。そして実はこれこそ現代のアメリカ数の輝かしい伝統の始まりなのである。

変換群　クライン (1849–1925) はドイツの人，プリュッカーの下に直線幾何学を学び，またクレプシュの下に非ユークリッド幾何学を学び，さらに友人リーの影響下に，ケーリーの考えや，変換群に関するラグランジュの知見を学んで，最後はガウス以来の伝統あるゲッチンゲンの教授となった，第 1 回国際数学者会議がローマに開かれたとき，その議長をつとめたのも彼である。

変換群というのは，或(あ)る型の座標変換の全体に対して与えられた名前である。例(たと)えば，射影変換の特殊ケースとしての

$$(T)\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad \left(\text{ただし } A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 1\right) \quad (3)$$

なる型の変換は，ユークリッド平面の平行移動および回転を示すもので，先に挙げた変換 (2) はその一例であるが，その全体には一つの顕著な特性がある。すなわち

(o)　T の他に同じ型の変換

$$(T')\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_1'x + b_1'y + c_1' \end{cases} \quad \left(\text{ただし } A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1' & b_1' \end{vmatrix} = 1\right) \quad (3)$$

をとり，変換 T, T' を引続いて行なうと，それもまた同じ型の変換

になる。（これを変換の結合と呼び，$T'T$ で表わす）[1]。

(i)　$T''(T'T) = (T''T')T$（結合法則）

(ii)　任意の T について，$T_0T = TT_0 = T$ となる T_0 が存在する[2]。（単位元の存在）

(iii)　この T_0 と任意の T とについて，$T^{-1}T = T = TT^{-1} = T_0$ となる T^{-1} が存在する[2]。（逆元の存在）

一般に或(あ)る型の変換——(3) はその一例——の全体が，その任意の二つの結合の結果がまた同じ型の変換になる他，(i)—(iii) の性質をもつとき，その全体を変換群と呼ぶ。

エルランゲンのプログラム　クラインはこの変換群の考えによって，当時知られていたあらゆる「幾何学」を，当時の最も広義の幾何学である射影幾何学を中心に統一的に整理分類し，更(さら)に，ありうべき新しい幾何学の可能性をも示唆(しさ)した。彼はこれをエルランゲン大学の就任講演 (1872) の形で発表したので，今日それをエルランゲンのプログラム（Erlanger Programm）と呼ぶ。

クラインの考えは，幾何学の対象とは何かという問題に始まり，彼はこの問いに，各変換群によって変化しない対象がそれであると答える。例(たと)えばユークリッド幾何学の対象は，変換 (3)（ユークリッド変換）の下で不変な性質，平行，合同，長さ，角，面積などであり，また射影幾何学の対象は，射影変換

$$\begin{cases} x' = \dfrac{ax + by + c}{Ax + By + C} \\ y' = \dfrac{a'x + b'y + c'}{A'x + B'y + C'} \end{cases} \tag{4}$$

1) T' の右辺の x, y に，T の右辺を代入すると，$T'T$ の形は T と同じ性質の式になることが示される。

2) 今考えている例の場合，T_0 の形は $x' = x, y' = y$ となる。係数の行列でいえば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。一般の T に対する T^{-1} の形はやや複雑になるが，簡単な計算によって求められる。

の下で不変な対象，例(たと)えば直線，円錐曲線非調和比などである[1)]。

このように種々の変換群を求め，その下で不変な対象を，その変換群に属する幾何学と呼ぶことにすると，変換群の研究によって幾何学の分類あるいは発見ができるであろう。これがエルランゲンのプログラムの趣旨である。

もっとも，その後このプログラムの支配圏の中に属さない幾何学が構成された結果，そこに与えられたもののみが「幾何学」であるとは言えなくなったが，ここに登場した群の概念[2)] は，やがてデデキントなどの手で，より抽象的に取り扱われ，ついに現代代数学への突破口を開く結果になる。ただし晩年のクラインは抽象群の考えには懐疑的であった。これも一つの時代相であろう。

なおここで現われたような，或(あ)る変化の下での不変性という問題は，それこそ古来の学問の対象だといえばそれまでだが，この時代に特に意識的に取り上げられてくる晩年のクラインの同僚であったヒルベルト (III–3, 4) の最初の業績である不変式論（代数学と幾何学との境界領域，クラインの仕事の直接の継承）などはその例だが，それと共に物理学などの学界において，この少し前から，エネルギー（という非直観的対象）の不滅性不変性が盛んに論じられているのもおもしろい。

リー群のこと　本題からは多少はずれるが，ここで一言触れておきたいのは，クラインの若い頃からの友人で，その考え方にも影響したと思われるリー (1842–99) のことである。リーはノルウェーの人，当時，代数の方面で研究されていた有限集合の変換群（ガロアの方程式論がその代表的な例）と，同じく幾何学的な無数の変換（先の式 (3)，(4) はその例）の全体たる変換群との結びつきを，おそらく最初に自覚し，変換の連続群の概念を構成した。エルランゲンのプログラムの考えはこ

1) 平行，合同，長さ，角，面積などは，射影幾何学ではもはや不変な性質ではない。
2) 変換群の概念は，ここで述べたこと以上に，薄命熱血の天才ガロア (1811–32) の方程式論の中で最も重大な役割を果す (III–4–3b)。ここには現代数学（あえて現代代数学とはいわない）に対する最大の源泉の一つがある。

れに触発されたものと言われている。リーはその概念を解析学（特に微分方程式論）や微分幾何学に用いるという卓抜な考えを推進し，やがてそれらの分野に大きな成果を収めたが，その仕事の価値は生前には必ずしも十分には認められなかった。しかしその考えは，弟子エンゲルを経で，カルタンやワイルの手でリー群[1] と呼ばれる形に整理され，今日の数学でも最も重要な概念の一つになっている（第 4 章 3b）。

2-5．非ユークリッド幾何学の成立

非ユークリッド幾何学の前史　非ユークリッド幾何学の歴史の前に，空間の数学化が既に時代の雰囲気の中に醸成されていたことは前節で少し触れた。しかし差当(さしあた)って非ユークリッド幾何学の発端となったものは，ユークリッド幾何学の第 5 公準

> 一つの直線と二つの直線とが交わり，同じ側の内角の和を二直角より小さくするならば，この二直線は限りなく延長されると，二直角より小さい角のある側において交わること

に関連することである。すなわちこの公準が他の 4 つの公準 (I–3–3) の簡明さと対照的に，いかにも分りにくい形をしていること，これが問題の発端である。いったいこの「公理」は他の公理から導き出せる定理ではないのか，これがまず考えられたことである。そして実はユークリッドの『原論』自身についても，人びとはこのことを証明しようとして果さず，余儀なくこれを公準の最後においたのではないか，という推測すらあるほどなのである。

第 5 公準を他の公準（および公理）から導き出そうという試みは，5 世紀のプロクロスに既にあったと見られる。それは，その著書の中でこの公準と同値な種々の命題が吟味されているからである。

---

1) 多様体の一種で，群の演算が局所的に解析関数（次節）として表現されたもの。詳しくは，ブルバキ『数学原論　多様体』の「歴史覚え書き」参照（杉浦光夫氏の訳がある）。

ところでユークリッドの公理の本来の意義については，これを真理というより討論の前提であったとするサボーの説があり（第 I 部），私自身これを支持するものだが，その説とは別の事実として，古代末期以後において，『原論』の公理は次第に原理あるいは自明の真理と認められていた。そこにはキリスト教的権威の確立に見られるような，或(あ)る絶対者の確立という世間一般の風潮も作用しているのかもしれないが，ともかく 17–18 世紀以後，ユークリッドの公理がもう一度人びとの関心を惹(ひ)き始めた時には，それはあくまで真理としてであり，ユークリッド幾何学の体系は，超経験的な真理の一例とさえ見られていた。あるいはむしろ，それは，この世の中に超経験的な真理なるものの存在することの，最も重要な証拠だったと言う方がよいであろう。

カントの空間論はまさにこうした考えに立って，ユークリッド幾何学が天与（ア・プリオリ）の真理であることを哲学的に基礎づけ，ないしは正当化せんとする試みであった。ところがそれが機縁となって，空間あるいは幾何学に対する数学的研究が活発となり[1)]，結局，カントの空間論自身を含めてユークリッド幾何学の真理性自体がゆすぶられ，ひいては数学的真理なるもののあり方にまで深刻な反省が促されるに到る，これは歴史によく見られる皮肉な事態の一つである。もっとも，それは皮肉であるとしても，極めて深長な意味を秘めた皮肉だったと言わざるをえない。というのは，非ユークリッド幾何学の建設は，この線上において，いよいよ日程に上ってくるからである。

非ユークリッド幾何学の誕生　第 5 公準に対する吟味は，18 世紀前半の学僧サッケーリの頃から，意識的に帰謬法(きびゅうほう)の形で進められ始める。すなわち，第 5 公準の否定にあたる仮定を立て，これを他の公準，公

1) 近藤洋逸『新幾何学思想史』（1966，三一書房）第 4 章参照。なおこの本は戦時中に書かれた『幾何学思想史』（出版は戦後；1946）の改訂版であり，仮に著者の言われるように，「今となってはなお論じ残されたいくつかの点もある」にしても，極めて示唆(しさ)に富んだ著作である。本節の記述はこれに負う所が少くない。

理と共に出発点において推論を進めて，そこに何らかの論理的矛盾を導こう，そうすれば，第 5 公準の正しいことは間接に確かめられるであろう——これがその筋書きである。

しかし予期に反して，そのような矛盾はなかなか生じてくれなかった。その試みを進めれば進めるだけ，そこには，少くとも論理的につじつまの合う体系が姿を現わしてきたのである。そしてこれが結局は非ユークリッド幾何学の誕生につながるのだが，それにしても事そこに到る迄には，古くは二千年来のユークリッド幾何学の伝統，近くはカントの空間論からの束縛を断ち切る必要があった。「心そこにあらざれば視れども見えず」で，ここには，単に数学史上の一事件という以上に，広く革命的転回点における学問一般に通ずる要素があると思われる。

ガウスの影響　この転換に際しても，ガウスの影響は極めて大きい。彼が幾何学の基礎について考察を始めたのは，1792 年（ガウス 15 歳）以来のことであり，1816 年には新しい幾何学の大綱は既に創り上げられていたと言われている。しかもこのガウスにしてなお，1805 年あるいはむしろ 1813 年頃まで，その狐疑逡巡は続いていたらしい。

ただガウスは，彼のいわゆる「無知の輩（やから）の騒ぎ」を恐れて，最後までこの大発見に関して口をつぐんでしまう。そういう騒ぎを恐れぬ大胆な態度は，伝統の束縛のほとんど見られぬ風土で，より若い二人の人物の中に初めて現われてくる。ただしそのいずれの場合にも，ガウスの潜在的影響の認められることは意味深長である。

ロバチェフキー　ロバチェフスキー (1793–1856) はロシアの人，カザン大学で学んだとき，若い頃のガウスを教えたことのあるバルテルス教授を始め，優れた何人かのドイツ人の教授に接した。間接ながらガウスの影響がここにある。ロバチェフスキーは 1815 年頃から平行線公準の問題に関心を持ち始めたらしいが，1829 年に到（いた）って，「1 直線 l

の外にある 1 点を通って，l に平行な無数の平行線が引ける」ことを仮定し幾何学を，「仮想幾何学」という名の下に創っている。ここに注意すべきは，彼もまた第一にカントの空間論に親しみ，第二にその議論の展開を物理学と結びつけて進めたことである。実はこの二つの事は，ガウスにも，またすぐ後で述べるボヤイにも当てはまるのだが，ともかくロバチェフスキーはこの新しい幾何学が学問に及ぼすであろう影響を深く意識していた。

彼は後年，その思想をロシア語 (1835–1838)，ドイツ語 (1840)，およびフランス語とロシア語 (1855) で，より体系的に展開した．ガウスはこのドイツ語の本でその真価を認め，賞讃の手紙を送るのだが，公けには依然として沈黙を守ってしまう．結局，ロバチェフスキーはさして世間に認められず，晩年はカザン大学の学長として，むしろ自分の研究生活は不幸だったと嘆じたと言われている。

ロバチェフスキー幾何学　今日のいわゆるロバチェフスキー幾何学への寄与については，ガウス，ロバチェフスキー，ボヤイがそれぞれ或(あ)る部分を共有し，而また或(あ)る部分を持ち寄る形になるのだが，後の記述に必要な範囲でその大要に触れておこう。

ユークリッド幾何学の平行線公理は，「直線 l と l 外の 1 点 P とに対し，P を通って l に平行な直線は唯一である」ことと同値になる。従(したが)ってこれを否定するとなると，

(1)　P を通って l に平行な直線は 2 本以上ある

(2)　P を通って l に平行な直線は存在しない

の二つが論理的に可能である。しかし (2) の方は，「直線が無限に延びる」という性質と両立しないことが知られているので，結局，そこでは，ユークリッドの第 5 公準を仮定 (1) で置きかえ，そこに他のユークリッドの公準，公理を加えた処から出発するわけである。

この幾何学では（後でモデルを用いて簡単に触れるように），空間自体

が「ゆがみ」を持っており，ただしそれは一定の「曲率」を持つことになる。またそれと共に,「三角形」の「内角」の和は 2 直角より小となり，かつ「角」の大きさは,「三角形」の辺が大きくなるにつれて小さくなるという奇妙な結果が得られる。ロバチェフスキーは，ガウスより更(さら)に前進して，この幾何学を当時として最も体系的に仕上げたのであった。

もっとも，彼の考察はつねに物理学と関連して進められていて，例(たと)えば空間の「歪み」は力の概念と結びつけて考えられている。すなわちこの段階では，幾何学はなお自然の正確な模写たるべきものであり，今日のように，一つの幾何学体系は一つの仮説的な数学モデルであるという認識はない。この点ではガウスもまた同様である。考えてみると，ここにもまた二千年来の思想的伝統が働いているわけで，20 世紀的に人びとが幾何学を一つの仮定的体系と見るようになるまでには，まずこのような経験論的信念と密着した追及が必要だったのであろう。言いかえれば，単一の自然的世界像を期待するこのような強固な信念の下でこそ，人はユークリッドの公理の真理性，ひいては数学的公理の真理性に関する長い先入観から解放されえたのであろう。

ボヤイ父子　ハンガリーのボヤイ父子の場合は，ロバチェフスキーとほとんど同時に，かつほとんど同じ結果に到達していたのだが，彼らに対して運命は一段と苛酷だったように見える。

ロバチェフスキーと同じ幾何学を創り上げたのは，子の方のヤーノシュ・ボヤイ (1802–1860) であるが，その父ファルカッシュ・ボヤイ (1775–1856) は若い頃ゲッチンゲン大学に学び，ガウスと親交のあった人で，幾何学の基礎についてガウスとしばしば議論を交わしていた。この人は平行線公理の証明を度々試み，つねに微妙な所でつまずいていたため，そのむずかしさを厭というほど知っていた。彼はこの問題を「自分の生涯を破壊したもの」とまで呼んでいる。従(したが)ってこの父は

自分の息子がこれに触れることを固く戒めたのだったが，結局，息子はその道に入り込み，そして父親の長年の大望は，ロバチェフスキーや友人ガウスばかりか，息子のヤーノシュによって，決定的に打ちくだかれたのであった。

まことに偶然だが，ヤーノシュもまたその幾何学（彼はこれを絶対幾何学と呼ぶ）を 1823 年に獲得したといっている。父はなかなかその幾何学の意義を認なかったようだが，ともかくその理論は，1829 年発行（という名儀だが，実際には 1832 年刊行）の父の著書に，「試論」という標題を付けた付録として公表された。

この際，父は，それまでの自分の試みの場合と同様，これをガウスに送ってその意見を求めたが，ガウスの反応はロバチェフスキーの場合と同様であった。これは若い気負い立ったヤーノシュにとって，かなりの打撃であったらしい。

ヤーノシュの考え方が他の二人より優れている点は，幾何学の公理の仮説性がより明確に意識され，従(したが)って公理系の整合性論理的につじつまが合うかという問題について，当時として最もはっきりした態度を取っていたことであろう。しかもなおヤーノシュは，空間は唯一であるという先入観を捨て去ることができなかった。そしてその整合性に関する吟味には，物理学的な考慮——それは例によってその思想を展開する原動力でもあったものなのだが—— が混入して透明な立場を妨げたため，晩年は自分の創り上げた体系に自信を失ってしまった。ロバチェフスキーとの先取権の問題もあった上，何よりも人びとの認めてくれないことへのあせりもあったのであろう。先に，ロバチェフスキーの不幸よりも一段と大きい不幸といったのは，この父子における上のような事情を指すのである。

なお，ロバチェフスキーやボヤイの仕事がやがて一般に普及したについては，そこにガウスの潜在的な権威の裏付けが大きく働いたとさ

れている。

リーマン　19 世紀的近代数学の始まりを告げる人物がガウスであるとすれば，その中期を代表し，現代数学を予告するだけの数学を，その指導精神と共に打建てたのはリーマン (1826–1866) である[1)]。この人の解析学の方面における奇与については次節以下で述べるが，非ユークリッド幾何学においても，その全貌を示したのは彼である。

リーマンのこの方面の仕事もまたガウスの影響が著しい。またカントの影響を含め，「空間」の概念に関して，一段と深い物理的・哲学的思索もそこに見られる。更(さら)に幾何学の公理が「仮説」であるという意識も，この人の仕事の中で初めて明確に現われてくる。

ガウス以降ここまでを顧(かえり)みると，近代的空間論の形成は，決して数学内部だけの問題ではなく，そこには物理学との関連を含めて，深い哲学的思索の積み重ねがあることが注意される。これはわれわれの現代数学の今後の問題として——それは必ずしも物理学の問題に限るわけではないが——十分考えるべきことであるように思われる。

ここで少し脇道に入るようだが，当時の学界の状況について触れておく。恐らくフランスのエコール・ポリテクニクなどが一つの手本となってのことであろうが，動向としては既に 18 世紀後半ごろから，あちこちの大学で数学が重んじられるようになり，かつそれが職業としてなりたつ時代に入ってくる（ウェーバー『職業としての学問について』, 1919）。

ところでここにドイツの大学では，私講師 (Privatdozent) という制度

1) 彌永昌吉氏「空間概念の拡張」（『科学』，1957 年 8 月号–1958 年 1 月号）には，その意義として，(1) 公理主義の思想，(2) 位相幾何学と位相空間論，(3) 関数空間，(4) 微分幾何学の対象としての種々の空間，(5) 理論物理学へ応用される空間，の五つが挙げられている。これらの内容については，或(あ)る程度，後半で触れる機会があるであろう。なお彌永氏のこの論文は，同じく「現代代数学の形成」（同誌，1960 年 1 月号–1960 年 7 月号），「位相的代数的方法」（同誌，1962 年 1 月号，1962 年 7 月号）と共に，以下の記述に際して大いに参考にした。

があり，必ずしも安定した地位でないにもかかわらず，大学に職を求めるには，まずこれを得る必要がある。しかもそれには，まず就職資格論文と試験講演とにパスすることが要求されているのである。リーマンはこの資格論文や試験講演に先立ち，すでに学位論文（1851，関数論の問題；後述）の段階でガウスの注目をひいていたが，就職資格論文（1854，三角級数の問題；後述）と並んで，試験講演として「幾何学の基礎をなす仮説について」論じた。これは 20 ページ余（あま）りの小冊子として後に公刊されたが，そこには老年のガウスを感激させるほどの内容が盛られていた。

リーマン幾何学　リーマンの空間論はガウスの曲面論に直接の影響を受けているので，まずガウスの曲面論について簡単に触れてみよう。

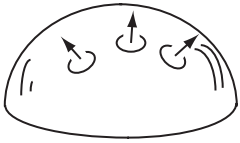


図 2–6

曲面の曲率は，例（たと）えばその面に法線を立て，その法線の方向の変化を調べるという方針で求められる。しかしこれは，その曲面のおかれた空間を予想してのことであり，その意味で，曲率をその曲面に内在する性質として捉（とら）えたものとは言い難い。他方，その曲面上での二点間の「距離」——いわゆる測地線の長さ——の決まり方の側から，その曲面の曲率を求めるということになると，例えばその曲面上に密着している生物にでも，その曲率を見出しうる途がありそうに思われる（地球という球面上に住むわれわれの問題として考えうること）。ガウスの曲面論はこの考え方を数学的に正確に実現したもので，その際，無限小の距離とでもいうべきもの——測地線の微分——ds が，（或（あ）る特定の座標 u, v を用いて）

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

という 2 次形式——ガウスのお得意だった 2 次関係の一つ——で表現される。この E，F，G が，曲面のおかれた空間への考慮なしに，その曲面に固有な性質だけで得られるものであり，この意味で，こうし

て定義される曲率は，この曲面の内在的性質として捉えられるものと言える。

リーマンの考え方は，この考え方をより一般に用いるものである。彼の場合，幾何学の基礎に関する考察は，その先人たちの場合のように，平行線公理の問題だけに視野を限定していない。リーマンのいう「空間」とは，上の 2 次形式を一般化した或(あ)る規則でしばられるところの，仮説的な「点」——実は n 個の数の順序ある対の集まりと見なされたものである (空間の点集合化)，そしてこの「空間」がどのような「ゆがみ」を持つかは，この空間内の 2「点」間に措定される仮説的な「距離」の与え方に関連して決まることになる。具体的にいうと，それは，ガウスの式に似た

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

という形で与えられる。例えば 3 次元ユークリッド空間は，この式で

$$n = 3 : i = j \text{ のとき} \quad g_{ij} = 1; i \neq j \text{ のとき} \quad g_{ij} = 0$$

としたものに他ならない。

言うまでもなく，n 次元の「点」の集まりとして「空間」を定義し，そこに仮定的な「距離」を与えることによって，その空間の曲率を内在的に定義し，ユークリッド空間をその特殊な場合として取り扱うというのは，まさに幾何学の公理を仮説として取り扱っていることである。しかもそれが意識的に行なわれていることは，その記述によって十分に確かめられる。そしてこれこそ 20 世紀数学が「空間」に対処する態度であり，しかもここに提示された対象たるや，現代数学の最も重要な対象である多様体 (Mannigfaltigkeit) の原型なのである (第 4 章第 3a 節)。リーマンはこれらのことを，半世紀後に生れた相対性理論の空間論を思わせるような物理的考察を介在させながら，しかも純数学的な理論として組立てている。

多様体というのは，例えば風船を平らな紙で貼るように，球面を局所的小平面の集まり（多者，集合）と見なすなど，一般に曲面を局所的にユークリッド平面の集合と見立てる種類のことで，リーマン空間（次項）はもとより，リーマン面（第 2 章第 7 節），関数空間（第 4 章第 2a 節）などもその例に属する。彼のこの考えの背後には数や量に関する深い思索が潜んでおり，特に彼のいう量一般の考えには，今日の位相数学（トポロジイ）の内容が先取りされていたものと推測されていて，ラッセルはこれを，「空間的図形を量の集まりと見なす」という考え方の哲学的根拠づけのためのものと呼んでいる[1)]。してみると，前節で触れた空間の数学化が最も意識的に行なわれたのも，このリーマンが最初であると言えるように見える。

さてリーマンの考えによると，ロバチェフスキー・ボヤイの幾何学は負の曲率を持つ場合，ユークリッド幾何学は曲率 0 の場合として分類できる。もっともこれらのことは前から注意されていたことだが，リーマンはさらに，前には捨てられていた仮定「平行線が一本も引けない」という場合も，正の曲率を持つ場合としてその視野に採り入れる。先にも触れたように，この仮定は，「直線が無限に長い」という条件と両立しないのだが，リーマンは，「直線」すなわち測地線が，その「世界」の中では限界なく延びているが，全体として無限ではないという可能性を認めることによって，ここにも新しい「幾何学」のありうることを示したのである。

今述べたような可能性は一見まことに考えにくいことだが，リーマンはそれをこう説明する。「例（たと）えば円周あるいは球面上に閉じこめられた生物を考えると，その世界はどこまで行っても無際限であるけれ

1) B. Russell, *Esays on the foundations of geometry* (1901). なおリーマンの多様体の考えの背後には，同時代の物理学の傾向であった近接作用の考え——力は遠隔作用として働くのでなく，電磁場などに典型的に見られるように，作用点に近接した処に働いて漸次他に及ぶという考え——が影を落していよう。もちろんリーマン自身もその考え方に積極的に寄与している。

ども，その全体は有限であり，上記の「距離」の定義の下では，3 次元以上の「空間」においても，このようなことが可能なのである！」無際限と無限との区別は，従来も哲学などでしばしば論じられてきたことであるが，数学的に明確この二つを区別して，上記のような大きい成果を収めたのは，恐らくリーマンが最初であろう。

なお，この「平行線の引けない幾何学」も，もちろん非ユークリッド幾何学の一種であって，これは狭義のリーマン幾何学と呼ばれる。ここでは例(たと)えば「三角形」の内角の和は 2 直角より大きくなるが，もちろんユークリッド幾何学の場合と同じ形の定理も種々なりたつことが知られている。3 辺の相等(あいひと)しい三角形の合同定理などは後者の例である。

非ユークリッド幾何学のモデル　非ユークリッド幾何学の体系は以上のようにして次第に整い，特にリーマンの理論が出てからは，次第に数学界に浸透していくことになったが，こうなると，いったいどの「幾何学」が「正しい」のか，という問題が生じてくる。しかしここでまず考えるべきことは，「正しい」というのが，経験的世界への適合性をいうのか，数学内部での「真理性」を，それが何を意味するかを含めて，問題にするのかという区別であろう。

前者については，既にガウスが，大規模な三角測量によってそれを判定しようとしたことがあったが，その結果は，誤差範囲の問題のために決定的な答にはならなかった。後にアインシュタインが，その相対性理論のための理論的舞台として，（広義の）リーマン幾何学（を，更(さら)にやや修整したもの）が好都合であることを示したのは，既に述べた通りである。もっとも，この空間論にもいろいろ問題があって（統一場の理論など），これを現在すでに終結したものだということはできない。

一方，仮説的体系としての数学の内部で，どの幾何学が「正しい」かと言う問いは数学の真理性の性格に直結する性質のものである。しかしこれに対して先(ま)ず得られ答は，ユークリッ幾何学が「正しい」限

り，ロバチェフスキー，リーマンなどの非ユークリッド幾何学も「正しい」とせざるをえぬという，いささか奇妙なものであった。というのは，ユークリッド幾何学体系の中に，非ユークリッド幾何学のモデルが作られたためである。

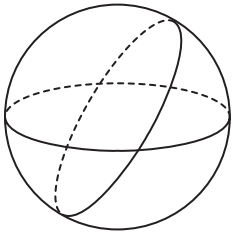


図 2-7

既に気付かれた方があると思うが，狭義のリーマン幾何学は，われわれ地球上の生物の実行できる「幾何学」と似た所がある。実際，われわれの引く直線を，地球上の測地線だとすると，これは地心を通る平面で地球を切るときの切口（大円）となり，この場合，例えば赤道（という名の「直線」）外の一点を通って赤道に平行な「直線」（実は大円；赤道以外の等緯度線は「直線」にはならない）は存在しないからである。ただこの例だと，「直線」は必ず地球上の 2 点で交わって具合が悪いが，この点を修正すると，ここにユークリッド幾何学の中に，狭義のリーマン幾何学のモデルが作られる。

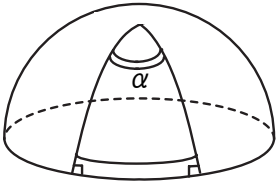


図 2-8

いま，北半球の球面を仮に「平面」と呼び，大円の内で北半球に属する部分を「直線」と呼ぶこととする。ただし「直線」と赤道——これはいわば「平面」の果てを示す限界である——との交わりは（地下でつながっているとでもして）同一の「点」と見なす。また 2「直線」間の「角」とは，両者の交点で球面に引いた接線の間の（普通どおりの）角だとする。こうすると，例（たと）えば赤道に極めて近い「直線」と，2 本の子午線なる「直線」とで囲まれた「三角形」の内角の和は，図のように，ほぼ α だけ 2 直角より大きくなることが見られよう。

さてこのとき，こういう仮説的な概念の下で，ユークリッド幾何学の公理，公準は，平行線公準を除いて，すべて成立することが確かめ

られる（このことを確かめる仕事はユークリッド的立体幾何学として行なわれる。）そこで，もしこの狭義のリーマン幾何学の体系が矛盾を内在するものであるとすれば，（例(たと)えば，或(あ)る三角形の内角の和が 190° であり，かつ同時に 200° であるというような事態が起っているとすれば），その矛盾は当然このモデルの中にも持ちこまれるはずである。しかしそれを普通どおりに読み直してみると，それはユークリッド的立体幾何学の中での作業ばかりであって，してみると，それはユークリッド的立体幾何学の中に矛盾が現われていることを意味する。すなわちこれは，リーマン幾何学の中に矛盾があると仮定すると，ユークリッド幾何学の中にも矛盾があるはずだという事態である。そこでこのことの対偶を取ると，もしユークリッド幾何学が，（その中に矛盾を内在させていないという意味で）「正しい」ならば，リーマン幾何学の方も同じ意味で「正しい」と言わざるをえないことになる。

同様のモデルはロバチェフスキー幾何学の場合にも作られている。

ここまでくると，それではユークリッド幾何学自体は本当に矛盾を含まないかという処へ，問題は追いつめられてきたわけだが，これはもはや 20 世紀初頭のヒルベルトの幾何学基礎論の問題になる。しかも，そこでもまた，問題は一応片づいたかに見えるのだが，その底には，一段と深い数学自体の無矛盾性の問題が横たわっていて，今日の数学基礎論の発端につながってくる。——というよりも，正直にいうと，これは今ではいささか投げ出された形だといってよいほどの深刻な問題でさえある。このこと，ないしこれを「投げ出された」といってよいかどうかの問題は，次章の大きな主題である。

なお最後に付け加えるが，非ユークリッド幾何学の形成が，公理的数学における重大な一歩であったという意識は，無意識の内に人びとの中に生れつつあったにせよ，自覚された形としては 20 世紀になっ

て初めて確立されたもののようである。ラッセルの初期の著作[1] などは，その最も早い方の例であろう。

2-6．関数概念と極限概念

19 世紀的近代数学における無限概念の問題に関連して，われわれは今まで主に幾何学の方面を見てきたが，近代数学の中でこの問題が一番重きを占めるのは，何といっても解析学の方面である。多くの場合，それらは数学の根本につながる事柄（ことがら）であり，ひいては現代数学での多くの深い問題の源にもなっている。われわれはこの節で，主として世紀の前半に対応するものとして，関数概念の形成を中心に話を進める。

関数概念に関する前史　今日の実数概念，関数概念に古代においてそれぞれ対応するのは，比ならびに比例である。しかしこの比較は，あくまで今日の既得の概念によって過去を解釈しての話であり，両者の間にはかなり重大な相違がある。特に比が（いわば意識以前の）「演算」であり，比例が（4 つの量の間の）「関係」であったのに対し，実数，演算，関係等が今では集合概念を介して，一個の「もの」——数学的存在——として扱われている点は，くれぐれも勘定に入れねばならない。ただいずれにしても，このことは，現代の「数学的存在」の本性につながる最も基本的な問題の一つなのである。

近代的な関数概念の形成は 17 世紀以後のことと言ってよい。それについてまず挙げるべきことは，デカルトにおける量の同次性の主張と機能的な記号法の成立との二つである。

量の同次性の主張というのは，手っ取り早く言えば，どんな量も（面積であれ体積であれ重さであれ）すべて線分の長さで置きかえてよいと

1) B. Russell, *Essay on the foundations of geometry* (1901), *The Principles of mathematics*, vol. 1 (1903) など。（前者はラッセル自身が後に必ずしも採らなかったものだが）。

いう考えのことで，関数を縦横の座標をもつグラフの形で表現する場合には，これがその基本原理になる[1)]。ユークリッド幾何学ではこうした同一視はできない。

一方，記号法のことは既に何回も触れた通りだが，この場合には，古代数学がまだ的確かつ機能的に表現しきれずにいた比や比例を，記号的象徴の形で対象として固定し，そこに明快な機能性を与えた点に，その重大な役割を認めねばならない。もっとも，このような事実は，今日，後からの知恵として意識されることに違いない。しかしいずれにせよ，この後の関数概念の重大な展開が，このデカルト，そしてやがて記号法の成立に深い思索を残したライプニッツの影響下に生じていることは，極めて示唆的な事実である。

今日の関数 (function) 概念の芽生えの形で，functio という術語を導入したのはライプニッツである (1673 頃)。これは初めは幾何学的な対象で，曲線上の一点 P に対して定まる幾何学的量，例えば接線 PT，法線 PH，接線影 QT，法線影 QH などの (P から座標軸までの) 長さを示した (1673)。横座標，縦座標，座標などの術語も，元来はこの考えの線上で生れたものである (1673)。

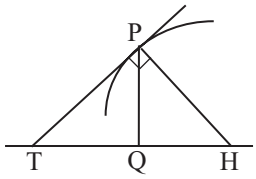


図 2–9

幾何学的な量である functio は，その後次第に「解析的」すなわち記号代数的な形に移っていく (ライプニッツとヨハン・ベルヌイとの文通)。すなわち上記の諸量の間の「関係」の方が functio と呼ばれ始め (1694)，変量 x の関数とは x の式のことである，という考えが生れてくる (1698)。

なおニュートンはこれより少し前，「流れ (fluent)」という運動学的な形で，やはり関数概念の原型を捉えている。ただしこれを記号化す

1) この「線分の長さ」を抽象的な数学的存在に改めたものが「実数」であり，ひとたび実数概念が成立すると，(普通の意味での)「量」は，実数に対して然るべき単位を付与したものとして理解される。

るのに際して，ニュートンにも多少の工夫はあるが，ライプニッツの方が遙(はる)かに徹底的かつ系統的で，さしものニュートンもこの方面では後世への影響は小さい。ニュートンの場合，後世に対する影響は何よりもその力学体系の建設である.

オイラーにおける関数概念　18 世紀前半における関数概念を，それなりに明確に定義したのはオイラーである。彼はその著『無限解析序説 (*Introductio in analysin infinitorum*)』(1748) の中で，関数を次のように定義している：

> 一つの変数の関数とは，その変数といくつかの定数とから作られる解析的な式 (expressio analytica) のことである。

オイラーの場合には，実は「解析的な式」という肝心の言葉の説明が欠けている。しかしそこに挙げられた例($ax+b$, $\sqrt{a^2-4z}$, c^2 その他)や，彼による関数の分類などによって，その大体の輪廓は把(つか)むことができる。すなわち彼のいう関数は，代数的関数 (多項式，有理式，代数方程式の根たる無理式など) と超越的関数 (対数関数，指数関数，三角関数などの介在する式) とに分けられるものなのである。

オイラーはまた

> x の任意の関数は直線または曲線を表わすが，逆に任意の曲線は関数によって表わされる。
>
> 曲線がただ一つの関数によって表現されるとき，その曲線を連続的曲線 (curvæcontinuæ) と言い，そうでないとき，不連続的曲線または混合的曲線 (curvædiscontinuæseu mixtæ) という

などの考えを述べている。どんな曲線も関数であるという言い方は，幾何学から記号的代数への重点の移動を示す意味で注目に値する。

もっとも，オイラーの場合には，実際上，まだそれほど広範囲の「曲線」は考えられていない。上記の諸関数のグラフ，ないしそのつなぎ合せなどがその大体であって，要するに今日の (複素数の関数としての)

解析関数（次節）ないしそのつなぎ合せの範囲内のことと思えばよい。そしてこれは，当時の数学解析の大きな目標が自然現象の解明にあったことと，恐らく無縁ではあるまい。というのは（すぐ下で少し触れるように）極めて大雑把に見ると，普通の自然現象はだいたい解析関数，ないしそのつなぎ合せの範囲で書けるものだからである。

オイラーの場合，「不連続的関数」といっても，上記の通り，それはあくまで式による表現の問題である。例（たと）えば

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{のとき} \quad y = x \\ x < 0 & \text{のとき} \quad y = -x \end{cases}$$

という関数などは，（今日の意味ではもちろん連続関数であるが，）その表現に二つの式が用いられているため，「不連続的関数」なのである。

「連続」ということは無限の問題と深い関連をもつものであり，自然，あるいは自然と人間精神との接触点における一つの本質的属性と見られる（「自然は飛躍せず」，『物質と記憶』）。そしてオイラーの立てた連続・不連続の区別に関しても，一つの解釈がありうるように思われる。すなわち自然現象を表現する数式は，必ず純粋単一の形に書けるはずだが，そこから逸脱しうる唯一の場合として，その表現形式の「不連続」性が認められる，と考えるのである。仮にオイラーにおける関数概念の背後に，このような考えが潜んでいたと見るならば，一見，技巧的なその関数概念は，同時に当時における一つの自然観にもつながるように見うるのではないか。これを史実の問題として実証する事は容易ではないが，一つの仮説ないし問題として指摘しておく。

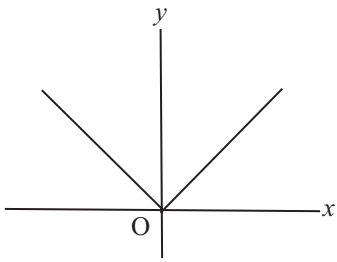


図 2-10

ここで上に述べたことの補足の意味で付け加えると，図 2–10 の曲線にしても，光線の反射などの自然現象に対応するも

のと見られぬものではない。$y = x$，$y = -x$ などは，(x，y を複素数と考えれば) 共に解析関数なので，解析関数をつないだ曲線の一種になっている。しかもこの二つの関数を一個の解析関数にまとめることはできない。解析関数だけだと，図 2–10 のような「とがり」の表現ができないのである。

「無限解析」と発見的方法　オイラーにおいて，もう一つ注意すべきことは，彼が，関数はすべて無限級数の形で書ける (ただし冪(べき)指数として自然数以外のものも許す)，と考えていたらしいことである。もちろん理論的根拠をもってのことではないのだが，彼は無限級数表示や無限乗積表示を巧妙に形式的に用い，多くの新しい事実を発見した。例(たと)えば，従来，実数についてのみ知られていた関係式

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

の z に虚数 iv を「形式的に」代入し，その結果を，別に知れていた $\sin v$，$\cos v$ の展開と比べて

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v$$

を導いたのは，その最も成功した例である。

ただしこのような「代入」は，当然そのまま承認されるべきことではなく，その結果が透明であり，示唆(しさ)的であればあるだけ，その理論的裏付けが求められねばならない。そしてそれは実際，19 世紀の批判的雰囲気の下で，一つの重大な課題となり，やがてコーシー以後の関数論の成果によって答えられることになる。

ところで 18 世紀数学は，このような行き方などのため，理論的裏付けを欠いたものとして，やや低く評価されることが少くない。次にこのことについて少し付け加えておく。

元来，解析 (analysis) とは，或(あ)る結果を前提した上，遡(さかのぼ)ってその結果の成立を支える条件を探すという，一種の発見的方法の意味を持って

いる。3 世紀のパッボス（デカルトにも影響）の著書に既にそのことがあるが，特に 16 世紀以後オイラーの時代までには，方程式の研究やデカルトその他の影響の下で，「解析的発見」は当時新興の記号代数で行なわれる形になっていた。

オイラーは，ライプニッツと親交のあったベルヌイ一族の弟子だから，その「無限解析」にしても，記号的無限算法の許された代数を用いてする一種の発見的方法，というような面があったのではないか。ガウスなどはこのような記号法をまずいと言うわけだが，それにしても，もし上の推測が当っているとするならば，いちがいに理論的裏付けの不足のみによって，これを低く評価することは問題なのではあるまいか。多少視野を拡げて言えば，有限的法則を，限定されぬ対象という広い意味での「無限」にまで拡大し，そこに或（あ）る隠された法則性を発見するというのは，近世以来の数学における一つの際立った方法であり，オイラーの場合なども，この時代におけるその成功例と思われるからである。それにしても，このことといい，先の自然と「不連続」関数との間に推測される問題といい，記号の示唆（しさ）するところに導かれて，発見の過程を進めていくという行き方ということになると，それはいかにもライプニッツ的思想圏の出来事らしいことではないか。

「全く任意の関数」ということ　オイラーの時代の出来事で，関数概念のその後の展開に大きな意義をもったのは，「全く任意の関数」という概念である。これが現われたきっかけは，両端の固定された弦の振動に関する波動方程式，すなわち時刻 t，弦の方向の座標 x，および t と x の関数としての振幅 y に関する偏微分方程式

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \quad (c：定数) \tag{1}$$

を解く問題であった。

この問題を定式化したダランベールは，その一般解が

$$y = f(x+ct) + g(x-ct) \ f,\ g \text{ は「全く任意の関数」}, c \text{ は定数} \tag{2}$$

であることを確かめ，さらに弦の両端が固定されていることから，

$$y = f(x+ct) + f(x-ct) \tag{3}$$

という結果を導いた。この f はダランベールによれば,「全く任意」とはいうものの，代数的または超越的方程式（オイラーのいわゆる連続的関数）として「解析的に」表わされるべきものであった (1747)。

一方オイラーはこれに対して，$t=0$ のときの f が自由な形の「曲線」でよいことを主張し，ここに大きな論争が生じた。もっとも，両者とも f が「全く任意の関数」であるという点は認めていたのだが，その解釈に違いがあり，かつそれは関数概念の本質にもつながるものだったわけである。

ところがこの論争の間に，ヨハン・ベルヌイの子ダニエル・ベルヌイは，それが弦の振動の問題であるという物理的条件を適用することにより，y をいくつかの基本波に分解できるとして，

$$\begin{aligned} f(x) =& a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \\ &+ \cdots + a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \cdots \quad (l \text{ は弦の長さ}) \end{aligned} \tag{4}$$

と書き，これを (1) の最も一般的な解であると主張した (1750)。オイラー，ダランベールあるいはラグランジュなどは,「全く任意の関数」をこのように限定することについて，数学的な立場からこの考え方を斥けたが，これはやがてフーリエの仕事 (1807) の中に再生し，その仕事の吟味という過程を介して，以後の解析学ないし数学一般の動向に，大きな影響を与えることになる。

フーリエ級数　フーリエ (1768-1830) は，フランス学士院の懸賞に応じた熱伝導に関する論文（1807 年; 改訂の上，1822 年に『熱の解析的理論』として公刊）の中で，上記のベルヌイの考え方を取り上げ，ただしこの度(たび)はこれに数学的検証を与えようとした。すなわち，

区間 $(-\pi,\,\pi)$ で定義された任意の有界関数[1] $f(x)$ は，つねに

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

ただし　$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx$，$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$　(2)

として表示できる

ことを示そうとしたのである。

実際，項別積分の一船的公式

$$\int_{-n}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}s_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\infty}s_n(x)dx\right) \tag{3}$$

が，もし (1) に対して成り立つものとすれば，

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi a_0\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nxdx=\pi a_n\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nxdx=\pi b_n\end{cases} \tag{4}$$

となって，(2) が得られる[2]。言いかえれば，$f(x)$ がどんな有界関数であれ，(3) の成立と (4) の積分の可能性とを認めれば係数 (2) は確定

---

1) 定義域が $(-\pi,\,\pi)$ であることは本質的なことではなく，適宜修正して，例えば $(-\infty,\,\infty)$ に移すこともできる。また有界とは，定数 M があって，この区間内でつねに $|f(x)|<M$ となることをいう。

2) 微分積分学の計算問題にある公式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nxdx=0;$$

$m=n$ のとき，

$$\int_{-x}^{x}\cos mx\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0$$

などがここで使われる。

し，ひいては (1) が一意的に得られるという次第である。(1) を $f(x)$ のフーリエ級数という。例(たと)えば関数

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -x & (-\pi \leq x < 0) \end{cases} \tag{5}$$

のフーリエ級数を (1)，(2) によって求めると[1)]，

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\cdots\right).$$

ところがここにいろいろの問題が起こる。すなわち (5) は，オイラーの意味では，単一の式で表現されない「不連続」的関数だったのに，それがこのように単一の式で表わせることになると，関数の表現の「連続」性に関するオイラー流の区別は，もはや保持できなくなる。また従来考えられなかった（すなわちグラフに切れ目のある）今日の意味での不連続関数の中にも，フーリエ級数で表わせるものが出てくる[2)]。例(たと)えば

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0) \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

のフーリエ級数は，簡単な計算によって次のようになる。

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\cdots\right).$$

一方，積分はそのころ主として微分法の逆（原始関数）として求められていたが，(5) や (6) の積分はその流儀では求めにくいため，面積の

---

1) (5) により，例えば

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{x} xdx\right) = \pi.$$

2) 考え方によると，その時代において，これは「自然は飛躍するか」という問いを含みうるものであったかもしれない。その場合この例などは，解析学が数理的自然科学から自立する機縁になったものの一つと見られよう。

意味での積分（定積分）ないしその拡張が要求されるに至る。

また一方，無限級数の「和」とは何かという問題——級数の収束性の吟味——がここには欠けていて，やがてコーシーがこの点を衝いてくる。また (3) のような項別微分が一般には必ずしも可能でないことをアーベルが指摘して (1826)，コーシーの吟味でもなお足りないという事態も生じてくる。

実をいうと，フーリエの関数概念はまだ多分にオイラー的な段階のもので，「任意の関数」とはいっても，有限個の点で滑らかさを失う程度の曲線であり，その上に (3) の成立を黙認したからこそ，(1)，(2) の「証明」もできたのであった。しかし事態がここまで来ると，(1)，(2) の証明は，新しい関数概念と積分概念の下で，(3) の成立を吟味しながら，改めて考え直さねばならなくなる。そして実際，それは当時から今日に至るまで，解析学の一つの重要な分野として，種々の発展を遂(と)げているのだが，ここではその方の問題に立入ることはできない[1)]。

それよりもわれわれにとって大切なのは，それが関数や積分などの概念の吟味あるいは拡張をうながし，以後の解析学全体，あるいはむしろ数学一般の動向にまで，大きな影響を与えたことである。実際カントルの集合論や，20 世紀のルベーグの積分論なども，その影響の下にあるといえるのだが，さしあたって，次に述べるコーシーによる解析学の合理化の一歩も，これと切り離して考えられることではない。

コーシーと微分積分学の合理化　フーリエ級数の理論が解析学の上に種々な問題を投げかけたころ，正(まさ)にこれに応ずる形で，解析学上の諸概念を明確にし，その上に微分積分学の体系を広くかつ合理的に整備したのはコーシー (1789–1857) である。その批判的精神はまことに徹底的で，多少の細かい不備を別にすると，今日の微分積分学の体系は大体において，その『解析教程 (*Cour d'Analyse*)』（1821，1968 版あり）』，

1) T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration* (1970, Wisconsin) 参照。

『微分積分学綱要 (*Résumé des Leçons sur Calcul infinitésimal*)』 (1823) の中にまとめられているといってよい。コーシーはこのような吟味を，フーリエの仕事を知る前 (1814 頃) から考えていたようだが，その仕事を知った 1818 年以後，一段と自分の仕事に確信を深めたらしい。

前に述べたように，オイラーは『無限解析序説』 (1748) において，関数 (あるいは解析的式)，無限小，極限などを特に定義することなく，また実数について確かめられれた無限級数，無限乗積に複素数を代入することなども，特に理論的吟味をしないですませていた。これに対しては，その当時にもダランベールが批判的で，極限と導関数の二つが「無限小解析」の基礎であることを述べ[1])，またコーシーの直前にも，ラグランジュが『解析的関数論』の序で同様のことを述べている。しかしコーシーの仕事は更(さら)に徹底した形で行われる。

コーシーは『解析教程』において，まず「変数」，「定数」，「極限値」(変数が限りなく近づく値——次項参照——) を定義し，これらを全体の基礎として，「無限小」，「関数」，（現代的意味での）「連続」，「無限級数の和」などを順次定義する。

例(たと)えば，「種々の変数の間に，その中の一つに或(あ)る値を与えたとき，それによって他の変数の値がすべて決まるような関係があれば」初めのものを「独立変数」と呼び，他の変数を，その独立変数の「関数」と呼ぶ。また「連続」とは，無限小の変数 i に対する関数値の差 $f(x+i)-f(x)$ が無限小であること，「無限小」とは，0 を極限値とする変数のこと，「無限級数の和」とは，今日と同じように，部分和の極限として，それぞれ定義される。「発散する級数が和を持たないことも，ここで初めて明言される。これらは当時まで，種々の擬似哲学的要素が混入して，必ずしも明快でなかったものである。

また『微分積分学綱要』においては，「導関数」，「定積分」（近似和

1) 例えば *Encyclopedie* (1751–1765) の「微分法」「極限」などの項を参照。

の極限[1]) が定義され，微分積分学の体系が，「平均値の定理」を経て，「微分積分学の基本定理」を中心としてまとめられる上で，コーシーの体系が今日のものとほとんど変らないといったのはこのことである[2]。

ここで念のために付け加えると，今日の微分積分学の体系[3] は，極限概念の基礎の上に，微分法，積分法，及びこの両者を結びつける基本定理（面積の拡張に当る定積分と，微分法の逆演算である原始関数を求める演算とが，実質的には同一であるとする定理[4]) の三つからなっており，特に基本定理の証明を中心とするその理論構成の中核的位置は平均値の定理が占めている。

このような理論構成を創り上げたのがコーシーであって，彼は連続関数に対して定積分が存在することを（多少の不備はあったにせよ）初めて証明している。証明自身もさることながら，このような極限値の「存在」を証明するということ自体が，数学の新しい動向を示すものである。すなわち，解析学の対象が，経験的対象の世界から独立したからこそ，その存在が真に数学の問題になってくるわけで，解析学はすでに現実そのままの模写ではなく，現実に対する一つの理想化モデルになっており，従(したが)って現実的対象の場合とは違った配慮が余儀なくされているのである。この点はギリシャ数学の場合にも，現代数学の

1) $f(x)$ が区間 $[x_0, X]$ で定義されているとき，区間に任意に有限個の分点をもうけ

$$(x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = X)，和 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_i)(x_{k+1} - x_k)$$

を作る。分点のとり方をどこまでも細かくするとき，和が一定の極陥値に近づく場合，その値を $f(x)$ の定積分 $\displaystyle\int_{x_0}^{\pi} f(x)dx$ と呼ぶ

2) 細かく言うと，無限級数の取り扱いでは，一様収束に関する吟味（p. 90 の式 (3) の成立の十分条件でもある）が落ちており，また定積分の存在について，一様連続に関する吟味が落ちている。その他にも小さいきずはないわけでないが，大綱において上記の通りなのである。

3) これに関する明快な説明が，吉田洋一『微分積分学序説』（1949，培風館）の中にある。

4) 正確にいうと，連続関数の場合についての話である。なお III–4–2 参照。

場合にも，つねに見出される「数学」の根本的性格の一つである。

コーシーにおける関数概念　コーシーは「関数」の定義に，オイラーと違って，「解析的な式で表わされる」というような条件は付けず，変数間の関係（今日の言葉で言えば対応）として，至極単純に規定している。これは注目すべき点である。というのは，この定義が，やがて関数なるものを，個々の x の値に対して y の値を定める一種の規則——いわゆる点関数——として捉(とら)える機運を開いたからである。実際，その結果として，それまで暗黙の内に考えられていた幾何学的イメージや，具体的な式による表現などの，いわば有機的な全体像というようなものは，関数概念から一旦(いったん)切り離されることになる。

もっとも，そのように述べはしたものの，コーシー自身は，なお意識の底で，単一の式による表現という態のものを考えていたらしい。そのことは彼の記述の端(はし)ばしから認められる。関数を点関数として，いわば原子論的に把握するという現代の考え方は，正しくはこの次の段階のものである。他方，上で有機的全体像と呼んだ事は，これまた数学的に純化されて，複素数に関する解析関数という形にまとめられていく。このことの発端もまた，（沈黙せるガウスは別として）コーシーにあるのだが，これは次節の問題にしよう。

コーシーの極限概念　今まで極限概念については特に触れなかったが，ここで概観的に触れておこう。ダランベールがこれを微分積分学の基礎と見たことは前に触れたが，以後幾つかの試論を経(へ)た後，コーシーがこれに理論的根拠を与えた。彼は『解析教程』において，「変数の次々に取る値が一定の値に近づいていき，その差が任意に与えられた量より小さくなるならば，その定まった値は，初めの変数の極限であるという」として極限を定義している。また『微分積分学綱要』では（平均値の定理，定積分の存在定理の証明で，）今日の ε-δ 論法（記号も ε, δ）を用いている（ただし記号でなく言葉の上だけなら，ラグランジュの

『解析的関数論』(1797) にも，この論法の骨子は既に述べられている)。

フーリエ級数の収束についても，ここで初めてかなり深い吟味が行なわれる。若き日のコーシーが無限級数の収束についての論文を発表したとき，それを聞いた老大家ラプラスが，帰宅後に門を閉ざして，その大著『天体力学』に出ている無限級数の収束発散を吟味したという有名な話がある。

実はコーシーの解析学合理化は，それまで運動学的な傾向を強く持っていた解析学を，アルキメデスに代表される古代ギリシャ数学に復帰させたという面を持つように思われる。すなわちギリシャ数学の理論化が，運動概念を消去し，事を有限的論法の範囲に引戻して，対話討論を思わせる形にまとめられて進行したのと似て，この度の合理化もそれと似た進み方をしているのである。ε-δ 論法は，この意味では極限算法の有限化——ε, δ はつねに有限の値——であり，かつ新しい対話討論の論法であると見られる。

ε-δ 論法が今日のようなはっきりした形を取るのは，ラグランジュ，コーシーから約半世紀後のワイエルシュトラスからであるが，ここではそれらをまとめて，その有限的かつ対話討論的な性格について触れておこう。

一例として，変数 x が定数 a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 l に収束する，ということの定義を考える。これは ε-δ 方式によると次のように述べられる。

> 任意に与えられた正数 ε に対し，或(あ)る正数 δ が定められて，$0<|x-a|<\delta$ なるいかなる x に対しても[1]，$|f(x)-l|<\varepsilon$ となるようにできるとき，$f(x)$ の $x=a$ における極限値は l であると呼ぶ。記号では $\lim_{x\to a} f(x)=l$ である。

1) $\lim f(x)=1$ という場合，$f(a)$ の値は問題外とされる。$0<|x-a|$ は $x=\alpha$ を除外するための条件である。なお脚註 2) を参照。

これを有限的というのは，ε，δ および普通の論理的な言葉づかいの他に，何ら無限概念が表に出ていないことを指す。またこれを対話的論法というのは次の理由による。いま或(あ)る特定の $f(x)$ について，$x=a$ におけるその極限値が l であることを疑う立場の人，甲がいるとする。甲は，$f(x)$ の値がどこまで実際に l に近づきうるかを試すつもりで，一つの正数 ε を持ち出す。これに対して $\lim_{x\to a} f(x)=l$ を主張しようとする乙は，x が或(あ)る程度まで a に近づくとき，関数値はつねに $l\pm\varepsilon$ の範囲内に止まる状態を示さねばならない。（さもなければ，すなわち x と a との差の絶対値 (>0) がいかに小さいところにも，$f(x)$ の 4 値が $l\pm\varepsilon$ の外にはみ出す点があるならば，$f(x)$ の極限値は 1 でないことになって，乙は論争に敗れる。）そこで乙は正数 δ を具体的に求めて，「その ε に対しては，x の動く範囲を $a-\delta<x<a+\delta$（ただし $x\neq a$）とすればよい」と答える。甲がいかなる $\varepsilon(>0)$ を持ち出しても，乙がそれに応じてつねにこのような δ を示すことができれば，そのとき $\lim_{x\to a} f(x)=l$ は確定して乙は論争に勝つことになる。

もっとも，このような定義あるいは論法は，対話法の一種というよりも，極限（あるいは連続[1]）ということの本質——少くともその一側面——を量的に示そうとする試みが，必ず行きつくべきものなのかもしれない。実際，アルキメデスの論法の中にもこれに近いものがあり，特にパスカルが積分を定義するのに用いた論法には，ε，δ などの記号を用いて整理すると，上記のものとほとんど変らなくなるものがある[2]。ラグランジュのことは上で触れた。

しかしその半面，過去の成果を記号を用いて整理することは，当時

1) $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは，ε-δ 式に言うと，任意の正数 ε に対し，或(あ)る正数 δ が定まって，$|x-\alpha|<\delta$ なる各 x に対して，$|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$ となるようにできることである。

2) D. T. Whiteside, “Patterns of the Mathematical thought in the later seventeenth century”, *Archives for History of Exact Science.* vol. 1 (1961)

の人びとを悩ませたもやもやを，その時代以後少しずつ行なわれた概念の明確化や一般化の成果の上に立って，ぬぐい去ってしまう恐れがある。そういう点から言うと，コーシーが微分積分学の最も基本的な部分を取り扱うに当って，ε, δ などの記号を持出して事を運んだことは，一つの格段の進歩とすべきであろう。

なお ε-δ 論法は，新しい知識を生む力を欠くとして，時に非生産的との批判を受けるが，これはいささか見当違いであろう。証明は本来，発見や推測の後に来るものであり，それが発見的方法を兼ねぬことは欠陥ではない。しかもこの場合，対象が理念的存在であるだけに証明は不可欠なのである。

ともかく，生産的だが論理的な弱みも数多く宿していた 17 世紀以来の微分積分学は，この辺りからいよいよ本格的な理論化の段階に入る。しかしそれと共に，「x が動く」，「$f(x)$ が動く」という，いわゆる動的な雰囲気は，この学問の中で薄れていくことにも注意してよい。上ではこれを古典ギリシャの論法への復帰と呼んだのである。

なお早速断っておくが，このようなギリシャ復帰の様相だけがコーシーの仕事の本領なのではない。このような整理事業の背後には，特に数理物理学の方面で，18 世紀以来の厖大（ぼうだい）な事実の蓄積があった。本書では主題の立て方のせいで，この方面の事柄（ことがら）に言及する機会が余（あま）りないが，オイラー，ダランベール，ラグランジュ，あるいはガウス，後のリーマン，そしてコーシーなど，この人たちの自然に対する数学的洞察の深さにはまことに驚くべきものがある。

こうした状況の底には近代社会からの要請が当然働いていたのだろうが，それにしても資本主義社会からの要請とか，近代国家形成の影響というだけでは説明のつかぬ何物か——例（たと）えば適度の伝統，適度の精神的自由，適度の生活の余裕などといったものがあるように思われる。というのは，今考えている時代の進歩の大部分は，近代資本主義

が或(あ)る水準に達する少し前，近代国家の成立にしてもまだそこまで十分には手の廻りかねる頃のことであり，それらの社会的条件の整備されたその後においては，かえってこれほどまでの進歩が見られるかどうか，という面があるからである。いちがいに社会的影響を否定するという意味ではなく，一つの考慮すべき要素として指摘しておく。

なお，こうした過去の蓄積を踏まえた精神と生活の自由ということは，古代ギリシャ数学の場合にも，同様に見出されることである。

コーシーと微分方程式論　微分方程式の歴史については今まで触れなかったが，言うまでもなく，これは微分積分学を生み，かつこれを推進した一つの大きな原動力である[1)]。

簡単にいうと, 微分方程式とは未知の関数 $y = f(x)$ を, $x,\ f(x),\ f'(x)$, あるいは $f''(x)$ 以下の n 次導関数などの間になりたつ関係式によって, 決定しようとするものである[2)]。17 世紀前後のガリレイ，ニュートン，ホイヘンス等の力学に関する仕事はまさにこの方面の最初の成果であり，ライプニッツなどの曲線に関する仕事にもその例は見出される。さらに 18 世紀に入ると，ベルヌイ一族，オイラー，ラグランジュなどの手によって，種々の特定の微分方程式が解かれた。

この間, 特に初めのうちは, 積分を用いて直接にそれを解く方法が主な問題であったが，やがて関数の級数展開による解法，すなわち $f(x)$ を形式的に無限級数の形で書いて，それを与えられた微分方程式に代入し，その級数を項別に微分して[3)]，その係数を求める方法などが考案された。しかし全般的に言うと，線型微分方程式などの特殊な場合を除いて，現在でも例(たと)えば代数方程式論 (III–4–3b) のような統一的な理論は出来ていない。特に偏微分方程式[1)] の理論は現代の数学の最も

1) ブルバキの『数学史』には，これについてのまとまった記述はまだない。(『数学原論』のそれに当る部分もまだ書かれていない。)
2) その式に未知関数の n 次導関数までが現われるものを，n 階の微分方程式と呼ぶ。
3) 項別積分（p. 90 以下）の場合と同様の問題がここにも生じる。
1) $f(x), f(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ に関して 1 次式であるものを線型（常）微分方程式と

新しい方向に関連する問題の一つである。

ところでこの微分方程式の理論において，代数学の基本定理（ガウス；p. 50）に相当するような仕事，すなわち微分方程式の解の存在の問題に初めて手をつけたのもコーシーである (1820)。次に 1 階の微分方程式についてその証明の大体の方針を示す。

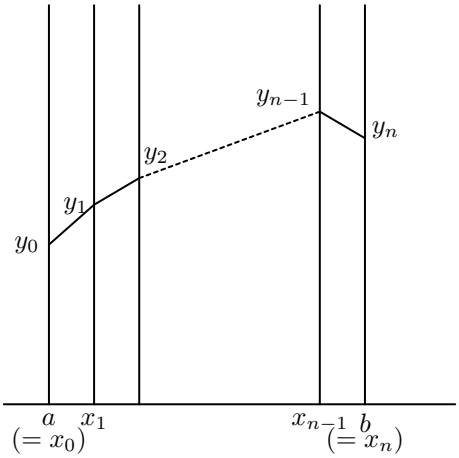


図 2-11

まず，与えられた微分方程式を

$$y' = f(x, y) \quad (a \leqq x \leqq b) \tag{1}$$

の形に直し，x の動く範囲を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

と分割する。次に y の値 y_0 を任意に（または別の与えられた条件によって）定め，初期条件 $x = x_0,\ y = y_0$ の下で，$f(x_0,\ y_0)$ を求める。これは，求める解の $x = x_0$ における導関数であるが，仮にこれが x_0 と x_1 の間で変らないものと見て，この値を勾配として x_0 と x_1 の間の部分を線分で結ぶ。すると直線 $x = x_1$ の上に縦座標 y_1 が求まるから，それによって $f(x_1,\ y_1)$ を求め，これを勾配として，x_1 と x_2 の間をつなぐ。以下同様にすると，ここに一つの折線が得られるであろう。これは求める $y = f(x)$ のグラフの近似（と思われる）ものである。そして最後に，分割をどこまでも細かく進めるときの極限状態として，求めるグラフを得ようというわけである。もちろんこれが言えるためには (1) の右辺に或(あ)る条件がつくが，コーシーはそのような条件を求め，かつその証明をやって見せた。もっともこ

呼ぶ。また未知の多変数関数の偏導関数を含む微分方程式を偏微分方程式と呼び，これに対して 1 変数の場合を常微分方程式と呼ぶ。

の場合にもコーシーの証明には不備があり，これは後にリプシッツによって改められたが (1869)，解の「存在」の証明を必要と認め，その証明の筋道を示したことの意義は重大である。

なお平均値の定理（有限の差に対する変動とその極限である微分商との関係）は，このような問題でつねに最も重要な役割を果す。前に，『綱要』における微分積分学の体系を説明したとき，わざわざ「平均値の定理を経て」と断ったのは (p. 94)，このような事情を指すのである。

ついでに一言すると，ここで示したような，有限の差を論じて無限小（すなわち極限値）に近づこうという行き方は，物理学の方面ではこの以前から有力な手法として成果を収めていた。してみると，オイラーにせよコーシーにせよ，彼らが自信に満ちた足どりをもってその理論を駆使し，あるいはその証明を試みていた背後には，こうした自然の中における一種の経験的実証の積み重ねが，その自信の支えになっていたと言えるのではないか。心理的な問題といえばそれまでだが，これは一つの重要な点だと思われる。

ディリクレにおける関数概念　P. G. L. ディリクレ (1805–1859) はドイツの人，若い頃フランスに学んで認められ，やがてドイツに帰ってガウスの後継者となった。その最大の仕事はガウスの整数論を発展的に整理し，更(さら)に解析学を整数論に用いて解析的整数論という新領域を拓(ひら)いたところにあるが，フランスでフーリエの知遇を得たこともあって，フーリエ級数の問題にも重大な貢献をしている。すなわち彼は，$f(x)$ に関するいくつかの条件を示し，その下では，たとえ不連続点が無数にあっても，$f(x)$ のフーリエ級数は収束することを示した (1829)。

ディリクレはこの問題を扱うに際して，無限級数の収束について，コーシーよりも更(さら)に徹底した批判吟味を行なっており，無限級数論はこの辺ですっかり現代的になってくる。しかしわれわれにとって更(さら)に大切なことは，彼がコーシーの関数の定義を文字通りに解して，x と

y との対応があれば数式などの法則はなくてもよいとしたことである。ダランベール，オイラー以来の「全く任意の関数」の総決算として，関数を点対点の対応と見る，いわゆる点関数の概念はここに確立する。彼はまた（上でも触れたように），無限に多くの不連続点をもつ関数——後のいわゆる病理学的関数の一種——とその積分とについて初めて関心をもった人でもあるが，このことと，点対点の対応という関数概念の確立とは確かに同根のことである[1)]。もっとも，そのような広義の積分概念は，まずガウス=ディリクレの弟子であるリーマンによって得られ，やがて 20 世紀初めのルベーグの積分論に至って，一つの大きな完結に到達する。

それにしても，「無限に多くの不連続点をもつ関数」というような「病理学的」対象が数学の中に現われてきた事は，自然科学とのつながりを超えた純粋数学の自立につながる要素として，一つの注目すべき事実と言わねばならない。

リーマンにおける積分概念　リーマンのことは前節で既に述べ，また次節でも触れるが，本節では，その関数や積分に関する仕事について述べる。ここでもフーリエ級数が関連しており，その内容は主として彼の就職資格論文 (Habilitationsschrift)『関数の三角級数[2)] による表現可能性』(1854) にある。リーマンはこの仕事を更（さら）に発展させるつもりだったらしい。しかしそこに多くの問題が派生してきた上，他にいろいろの関心事があったため，そして特にその早世のため（40 歳没），より完成した形に仕上げることはできなかった。その後の彼の考えの展開が世に知られたのは，デデキントの紹介による (1867)。

1) 仕上げの一筆として，ここにはなお点集合としての「実数」概念の確立がなくてはならないが，これについては次節で述べる。

2) 三角級数とは，p. 90 (1) の形の級数一般の呼び名である。特に，$f(x)$ から p. 90 (2) で与えられる a_n, b_n を係数とする三角級数が，$f(x)$ のフーリエ級数ということになる。三角級数とフーリエ級数との区別はリーマンによる。

リーマンはフーリエ級数について，ディリクレの条件を満たさぬ関数は自然界にないと見る。しかもそのフーリエ級数を敢て取り上げるのは，一つにはそれが微分積分学の原理と深いつながりをもつからであり，また一つにはその応用範囲が単に物理学のみに止まらず，数論その他の純粋数学の分野にまで及ぶからであるとする。

リーマンは関数概念をディリクレから承けつぐと共に，ディリクレが手をつけなかった積分概念の吟味から事を始め，三角級数によって関数が表現できるための必要十分条件を求めていく。しかしわれわれの場合，むしろ大切なのはその積分概念であろう。

コーシーが（少しの欠点は残したにせよ），連続関数に対する定積分の存在を証明したことは，すでに述べた。リーマンもそれと似た形ながら，但(ただ)し言わばコーシーと逆の方向で考えていく。すなわち $f(x)$ が区間 $[x_0, X]$ で定義されているとき，コーシーと同様に，区間を任意に有限個の点 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = X$ で分割して近似的な和を考えるのだが，コーシーが $f(x)$ を連続関数と限定してかかっていたのに対し，リーマンは $f(x)$ をまず有界とのみ仮定し，これにどんな条件を与えると

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x'_k)(x_{k+1} - xk) \quad (x_k \leqq x'_k \leqq x_{k+1})$$

が収束するかを考えて，そのための必要十分条件を出す。

またそれと共に，どんな小さい区間にも無数の不連続点がありながら，しかも任意の区間で積分可能な例[1] を与えて，連続関数の概念と積分可能関数の概念とを明確に区別する。ディリクレの場合と同じく，ここでも「無数」の点の集まりが，解析学の中で次第に対象化されつつあるわけである。

---

1) $x = \dfrac{m}{2n}$（m, $2n$ は互いに素）なる各点で不連続，他で連続な関数を実際に作ってみせ，その積分可能性を示す。

もっとも，そのことは，今考えている学問的伝統並びに対象を少し離れたところで，既にボルツァーノ（1781–1848；次節参照）によって試みられていた。しかしその仕事は当時学界の注目を惹(ひ)かず，ややおくれて，ワイエルシュトラスによって再発見され（例えば無限点集合に関する，いわゆるボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理），次いでカントルの仕事の中で認められるという形を取る。こうした面や，幾何学における無限遠点などを見ていると，カントルの集合論への道は，着々と準備されていたと言えないわけではない。しかもなお，この問題に関する観点の逆転ということについては，私はやはりカントルの仕事の重大さを強調しようと思う，（これは「歴史」における一つの主観であるが，その主観を支える客観的事実は次章で示されるであろう。）ついでながら，この観点の逆転ということは，リーマン，コーシー，ガウス等々，多くの優れた数学者の仕事から，より低い段階の仕事にまで（例えば十分条件を知って必要条件に注目するなど），近代の数学一般でしばしば見られる事の一つである[1)]。

さていよいよカントルが出てきた。そしてカントルの集合論自体，これまたフーリエ級数の問題に端を発することになる。しかしわれわれはこれを次章の問題として，その前になお二三の言葉を添えたいことがある。

2-7.　関数論の成立と実関数論の登場

前節では 19 世紀前半に重点をおいて話を進めたが，本節では，世紀の後半に重点をおく形で，複素数の関数に関するいわゆる関数論の形成と，それにやや遅れて形をなした実変数関数論の発端とを敢り上げる。これらは第 3 章の主題である集合論の形成に影響を与え，やがて

1) 例えばコーシーが連続関数の積分を論じたのに対し，リーマンは逆に，積分可能な関数のもつべき性質を攻めていくなど。

集合論によって多くの刺激を得た領域である

(a)　関 数 論

関数論の前史　今までは関数について，特に対応という面を強調してきた。これは「任意の関数」の概念からの発展形態として，一つの理想化であると考えてよい。しかしこれだけでは，関数というものに伴う或(あ)る整った性格を説明することがむずかしい。

ここで或(あ)る整った性格と呼んだのは，例(たと)えばオイラーが実数級数に対して遮二無二(しゃにむに)，複素数を代入し，しかもそれによって($e^{ix} = \cos x + i \sin x$ のような)意味深い結果を得たこと，その他 18 世紀の数理物理学などに現われた多くの美しい結果を指す。またもっと初等的・心理的に，人びとが関数について学び始める頃，つい抱きがちな或(あ)る一般的規則性を考えてもよい。実際，

$$\text{区間 } [0,\, 1] \text{ で定義された関数 } y = x^2 \tag{1}$$

というようなことを聞くと，特にディリクレ流の考えを知らない限り，これを，すべての実数[1] に対して定義された $y = x^2$ の一部だと考えるのが自然であろう[2]。言いかえれば，$[0,\, 1]$ の外部では関数 (1) は，ディリクレ流の原子的な点の対応として，無法則なものになってもよいとするのは，むしろ一段とひねった考えである。もっとも，こういう処をゆるがせにしない論理的性格は，確かに数学の一面に違いないのだが。

関数概念にまつわるこの「自然」な考え，それはまたオイラーの得た結果などとも同質のことであろうが，実はこれもまた数学的に明確な根拠づけのできる事実なのである。すなわち複素関数[1] を許容する

1) これを記号的に $(-\infty,\, \infty)$ と書くことがある。この ∞ はあくまで単なる記号であって，実体的な「無限大」ではない。
2) このような意味で，今日の一般的な関数概念では，定義域と対応関係の双方を明記することになっている。
1) 複素数の変数をもち，複素数値をとる関数。

ことによって明らかにされるのは，関数概念のもつこの種の「整った性格」の側面であって，それに関する理論がいわゆる関数論に他ならない。

複素数は 16 世紀ごろから，「数」というよりもただの規約として導入され，それもできるだけ避けたい虚な対象であったのが，ガウス以来，数理の底に隠された意外な脈絡を明らかにしてくれた (III–2–3)。しかしその半面，18 世紀にはその使用についての根拠づけも，その効力の由って来たる処も，共に明らかにはされなかった。これは関数論以前の歴史に属する。

しかしここでもコーシーの項で注意したのと同じ様に，物理学の方面ですでに多くの知識が積み重ねられつつあったことは，特筆しておかねばならない。すなわち複素数の幾何学的表示の知られるより前の 18 世紀中頃から，クレーロー (1713–1765)[2] やダランベールなどが流体力学に手をつけ，特にダランベールは複素数の関数を考察して，後に関数論の基本になるコーシー＝リーマンの偏微分方程式 (後出) を取り扱っている。またラプラスは，この偏微分方程式と深い関連のある調和関数を，力学におけるポテンシャル論との関連の下で取り上げている。ポテンシャル論を含めて，流体力学は 19 世紀に発展した電磁気学の理論の原型でもあり，この辺に厖大(ぼうだい)な蓄積が行なわれていたのである。ラグランジュの『解析的関数論』なども，その一つの集大成に他ならない。

さてこの次の段階は，ガウス，アーベル，ヤコビ，ガロアなどが打込んだ楕円関数 (III–2–3) である。この研究は方程式論と或(あ)る奥深いつながりをもつだけに，解析学の問題でありながら，複素数の導入はほとんど必然のことであった。

それと共に，この後で述べるコーシーの研究がある。これは実関数[1]

2) P. Brunet, *La Vie et L'Œubre de Clairrault* (1952, Press Univ. de France).
1) 実数を変数とし，実数値をとる関数。

の積分法を統一的にまとめようとする試みであって，コーシーはこの仕事の過程で，今日，関数論の基本定理と呼ばれる定理 (1825) その他を見出し，これによって彼は関数論の父と呼ばれる。もっとも，ガウスはコーシーの仕事に 14 年も先立って，複素関数の積分に関して透徹した理解をもっていた。このことは既に触れたことがある。

関数論におけるコーシー　前には触れなかったが，コーシーは『解析教程』(1821) の中で，例の批判的やり方で，複素数の相等，四則を始め，複素関数の概念とその極限およびその連続性，複素数を項とする級数の収束条件などを一々吟味している。彼はこの準備の上に立ち，複素関数の力をかりて，当時知られていた (実関数の) 定積分計算の技法を統一しようとしたのである (1825)。すなわち彼はまず複素平面の上で複素函数を「積分」することを定義し，これを利用してその企てを進めたのだが，これは今日，留数の計算として知られている。関数論の基本定理が得られるのもこの論文の中であり，その意味でこれは普通には関数論の出発点と見られている。

しばらくコーシーをはなれて事実として述べると，複関数の z_0 から z までの積分は，複素平面の一つの曲線 Γ に沿う線積分という形で定義される $\left(\int_\Gamma f(z)dz\right)$。関数の定義域が，$z_0$, z を含む或(あ)る領域 (線状の範囲でなく，平面的拡がりからなる範囲) である場合，z_0 と z とを結ぶ曲線の道は，もちろん一通りには限らないが，$f(x)$ が，例(たと)えば図の Γ と Γ' で囲まれた範囲の各点で[2]，後述の意味で (複関数として) 微分可能であれば，或(あ)る 1 点から他の 1 点に至るその積分は，その範囲内では，道のとり方いかんにかかわらず一定となり，従(したが)ってそれは $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ と

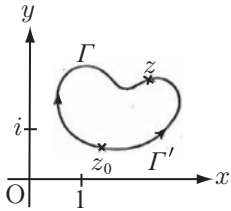


図 2–12

2) 正確にいうと，Γ, Γ' の囲む範囲を，自らの中に含む領域，つまり Γ, Γ' を少し外へふくらませた範囲の各点で微分可能のとき，とすべきである。

書ける。関数論の基本定理とは，この事実（またはこれの言いかえ）に他ならない。もっとも，コーシーがこの定理に与えた条件はかなり不完全で，それらの点は後に次第に修正された。

他方，もし Γ と Γ' との囲む領域の内部に，関数の定義されていない穴があったり，関数が微分可能でないなどの点——「特異点」——があったりすると，上記の積分値は道のとり方によって変ってくる。留数というのは，特にそれが「極」と呼ばれる特異点である場合に，この積分に関連して得られる或（あ）る値のことである[1)]。なおガウスが 1811 年に指摘したのも，複素積分の値が積分の道によって変りうるというこの事実である。

さてコーシーの 1825 年の論文は，上記の通り，関数論の出発点と見られるものだが，コーシー自身の主眼は実関数の積分の一般理論を建てる方にあって，複素関数に関する考察はまだ単なる方便であった。ところがその後，上記の考察が複素関数の冪級数（べききゅうすう）展開——関数論の基本的な対象の一つ——に関係づけられることが知られ（1832），更（さら）に約 20 年を経て，初めて $f(x)$ の微分可能性が導入されて，関数論の真の対象である解析関数の概念（の基本）が確立する（1851）。そしてこのことこそ，前項で述べた「関数のもつ整った性格」の核心であることがやがて知られるのである。高木貞治氏は『近世数学史談』の中で，これを，「1821 年の「教程」で複素変数が論ぜられてから三十年の歳月を経てコーシーの関数論に目鼻がついた」と言っておられる。

関数論におけるリーマン　関数論においてもリーマンの貢献は決定的である。彼は，ガウスを驚かせたその学位論文[1)]（1851；リーマン 25 歳）において，コーシーの最後の到達点を事もなげに出発点とする。即ち彼は関数の研究を二つに分け，実関数については，前に述べたよう

1) これらのことについては，関数論の書物の他，高木貞治『解析概論』第 5 章が参考になる。

1) 『一つの複素変数の関数の一般的理論の基礎』

にディリクレの思想に従(したが)って，これを単なる対応として把(つか)む一方，複素関数においては，複素平面上の或(あ)る領域の各点における「微分可能性」を要求し，そこから導かれる性質を見ようとするのである。

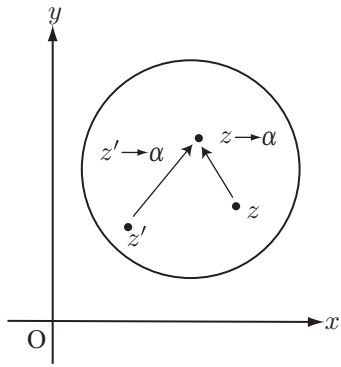


図 2-13

複素関数 $w = f(x)$ の，点 α における微分商 $\dfrac{dw}{dz}$ とは，（実数の場合と同じく）

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \qquad (1)$$

の，$z \to \alpha$ のときの極限値をいう。ただしこの極限値は，$|z - \alpha| \to 0$ でさえあればつねに一定の値になる，という意味に解し，複素数として $z \to \alpha$ の向きなどには関係しない。一見簡単な条件だが，その含蓄は極めて深いことが追々解ってきて，それが結局，関数論という大きな分野に成長するのである。

或(あ)る領域の各点で微分可能な複素関数は，そこで正則であるといわれるが，リーマンはそこから，必ずしも直観的に「見える」わけでない正則な複素関数の実態について[2)]，そのたぐい稀な洞察力を駆使して，多くの重要な結果を正しく導いている。18 世紀のダランベール以来，流体力学，あるいはその類推によって論じられる電磁気学などで重要な働きをしているところの，いわゆるコーシー・リーマンの偏微分方程式[1)]

$$\frac{\partial u(x,\, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,\, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,\, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,\, y)}{\partial x}$$

を，正則関数の性質として統一的に扱ったことなどはその例であって，これはリーマンの理論の実質的な出発点になる。

---

2) 複素関数のグラフを直接見ようとすると，4 次元的グラフ（！）が必要である。

1) 正則関数 $w = f(z)$ を実部 u と虚部 v とに分け $(w = u(z) + iv(z))$，さらにこれらを $z(= x + iy)$ の実部 x と虚部 y との 2 変数関数とみると，この u, v は上の連立偏微分方程式を満足する。

また或(あ)る領域で正則な関数には，その関数に固有な一定の領域が伴っており，正則性（すなわち各点での微分可能性）を守って定義域を拡大することは，（特異点（正則でない点）によって阻まれる形で）その範囲一杯まで，しかも一意的に可能である。（一斑もって全豹が推せる！）更(さら)にその領域内では，関数は何度でも微分ができ，また（微分の逆としての）積分もできる。これはいわば微分積分学の一種の理想境のようなもので，この話題の初めに注意した関数の「規則性」に対する解答になっている。この関数が他ならぬ解析関数である。

例(たと)えば原点を中心とする半径 1 の円の内部で定義された関数 $w = z^2$ は，（実関数の場合と同じように，$w' = 2z$ という導関数をもつが），複素平面一杯に，そのままの形で拡大され，それ以外の拡大の仕方はない。この場合は「無限遠点」∞（後出）が特異点であって，これがその拡大の歩みを止めている。

リーマン面　リーマンは正則関数の定義域を拡大するとき，今日，リーマン面と呼ばれる卓抜な考えを用いている。実はこのような拡大の際に厄介なのは，（ガウスが複素積分について注意したのと同様の）関数の多価性の問題である。次にこのことと無限遠点の導入とについて触れる。

リーマン面というのは，巧妙な幾何学的イメージによって，多価関数を一価関数の形で表現しようという工夫である。例(たと)えば，点 z が複素平面（z 平面）の単位円（原点中心，半径 1 の円）の周上を一周するとき，関数 $w = z^2$ によるその像は別の複素平面（w 平面）の単位円周を二周するであろう[1)]。いま仮に，この w の動きを表現するのに，二枚の平面（または，リーマンのいわゆる二つの「無限に薄い物体」）P, P' をとり，両者の実軸の正の部分に鋏を入れた上で，P の上岸と P' の下岸，P の下岸と P' の上岸とを，それぞれつなぐ（!?）ことを考える。いか

1) 複素数の極座標表示を使うと，$z = re^{\theta i}$ に対し，$w = z^2 = r^2 e^{2\theta i}$ となり，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，$0 \leqq 2\theta \leqq 4\pi$ となる。

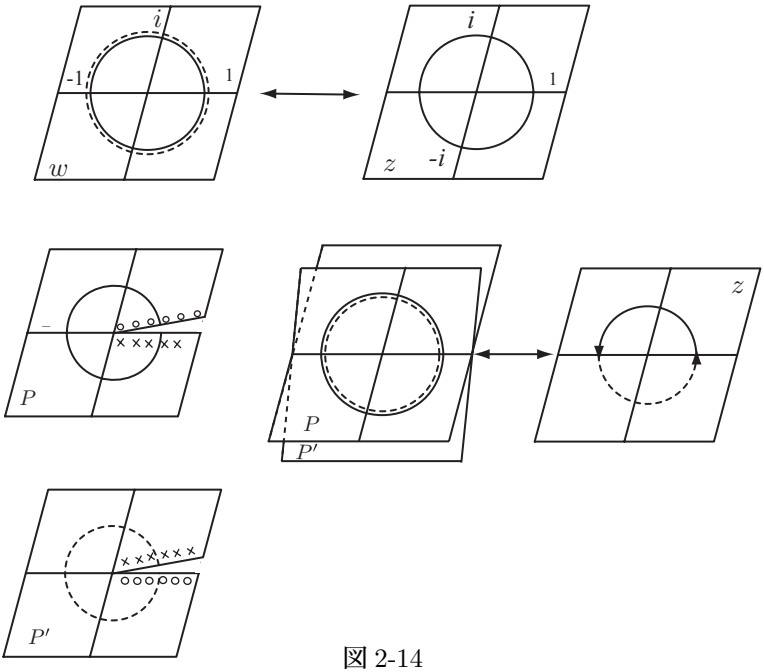


図 2-14

にも無理なことと思えるかもしれないが，こうすると，z が単位円を一周する間に，w もこの「面」の単位円に当る部分を「一周」するであろう。

もっとも，リーマンは，逆関数——今の例でいえば w から z をきめる関数——の概念をはっきりさせるのに，この考えを導入したのであった。実際上の例で，初めの w 平面の点に対する z をきめようとすると，それは二つ現われるが，後で考えた「面」上の点だと，その相手は一意的にきまる。$w = z^2$ から，こうして得られる逆関数を，（$z = \sqrt{w}$ から変数，関数の記号を入れかえて）$w = \sqrt{z}$ と書き，この z の「面」を，$w = \sqrt{z}$ のリーマン面と呼ぶ。

実は $w = \sqrt{z}$ は，$z = 0$ で微分可能ではない $\left(w' = \dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$。則ち原点は一つの特異点で，先に実軸の正の部分に入れた鋏（はさみ）は，この特異点

と，もう一つの非正則点「∞」とを結ぶものになっているわけである。

さてここで「無限遠点」∞ のことに触れねばならないところだが，その前にまず，リーマン面のような一見無理と見えるイメージをいかに正当化し，これを真正の数学的存在とするかについて触れておく。

この問題は，リーマンと同時代で，リーマンの幾何学的考察に対して厳正な解析的立場を守って研究を進めたワイエルシュトラスが，冪級数（べききゅうすう）を用いる方法によって，リーマンと同等の結果を導いたことによって一応落着した。実は冪級数（べききゅうすう）はその収束円の内部では，何度でも微分，積分の可能なものであって，解析関数の要素という性質を十分もっている。彼はこれをつなぎ合せることによって（解析接続），解析関数の解析的な定義を得たのである。

しかしリーマンの考えたものも，20 世紀の初めにワイルなどの努力によって正当化されるようになる。そしてこれこそ，今日のトポロジイ（位相数学）の一つの重要な源をなすものなのである，実際，トポロジイというのは，大まかに言うと，「点」のつながり具合を数や量と一旦（いったん）切り離した形で研究する学問であって，リーマンが「無限に薄い物体」を積み重ねると呼んだことや，ワィエルシュトラスがそれに対応するような考察を冪級数（べききゅうすう）の「接続」という考えで進めたことなどは，まさにトポロジイ的な考察によってこそ正当に取り扱えるものであった。この考えの下では，リーマン面とは解析関数という対象を明快に説明するために考えられた，一つの理想化された数学的構築物であって，そうなれば（その創造や正当化の仕事のむずかしさは一応別として）古来，理想化の産物であった数学的存在の例を，また一つここに加えたものと言ってよいであろう。

関数論における無限遠点　一方，無限遠点の方はというと，関数の極限値が無限大になる点に関する考察は，すでにコーシーが『微分積分

学綱要』(1823) の中で取り上げている。彼はこれをやがて例の留数[1]の仕事で利用したのである。

コーシーの場合，それはまだ一種の極限算を便宜的に利用するという程度のものだったが[2]，リーマンは更(さら)に特異点一般について考察を進め，(例えばある点における極限値が ∞ である上に，これこれの性質をもてば，その関数は代数関数[3] であることなど)，関数の性質がそれによってきまることを明らかにしている。これはリーマン面の研究の一環として，それまでの関数論的研究——例(たと)えば代数関数，三角関数，指数関数，楕円関数などの相互関係一般など——に，統一的な視野を与えた仕事である。われわれにとっては，その仕事自身の意義もさることながら，無限大の値そのものが，射影幾何学の場合とはまた別の意味に解釈されて，一個の数学的存在となってきた事を忘れてはならない。

関数値の ∞ と共に変数値の ∞ もまた一個の対象として関数論の中に入ってくる。すなわち，(ここが射影幾何学の場合と明確に違うのだが)，複素平面のかなたには，「無限遠点」と呼ばれる単一の点があると見なされ，関数の定義域はそこにまで拡張される余地が認められる。これはリーマンの仕事というより，むしろ後で述べるワイエルシュトラスの仕事であるが，例(たと)えば $f(z)$ の $z=\infty$ における正則性は，z を $\dfrac{1}{z}$ でおきかえた $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ が $z=0$ で正則であること，として定義される。従(したが)って $f(z)=\dfrac{1}{z}$ なる関数は，$f\left(\dfrac{1}{z}\right)=z$ だから，無限遠点で正則な

---

1) $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ のとき，$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$ が有限確定であれば，その値をコーシーの主値と呼ぶ。

2) コーシーは数学の中に実無限——存在する無限者——が入ってくることを認めない。Cauchy, *Sept Leçons de Physique Générale* (1885)。

3) 代数方程式 $\sum_{k=0}^{n} a_k w^k=0$ の係数 a_k が z の関数であるとき，この方程式の解として得られる ω を z の代数関数と呼ぶ。

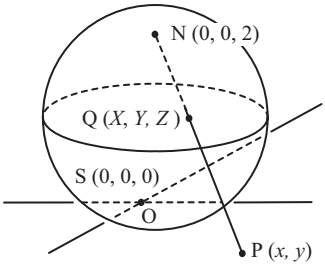


図 2-15

のである。

このような無限遠点に対して，幾何学的なイメージもまた与えられる。すなわち複素平面の原点 O に，半径 1 の球の南極 S を接せしめ，複素平面上の $\mathrm{P}(x,\, y)$ を北極 N に結んで，それと球面との交点 $\mathrm{Q}(X,\, Y,\, Z)$ を求める（球面射影）。この Q を P に対応させることによって，複素数の平面による表現を，球面による表現におきかえるのである。容易にわかるように，このとき複素平面上の ∞ は，北極 N に対応すべき対象として導入されることになる（関数論的無限大の幾何学的対象化——モデル！）複素平面がガウス平面と呼ばれるのに対して，この球面はリーマン球面と呼ばれる[1)]。

いずれにせよ，「無限遠点 ∞」なる対象が極限値の意味をはなれて，ここに一個の存在者として対象化されはじめたことは注意せねばならない。関数論用のこの無限遠点は，射影幾何学用の別の無限遠点などと共に，カントルが無限集合を一個の数学的存在として扱う際に，一つの手がかりとなったものである。

ワイエルシュトラス　19 世紀の中期から後期にかけて，解析学の方面でリーマンと相並ぶ大立物はワイエルシュトラス (1815–97) である。もっとも，この人はリーマンと対照的に晩成の大器であり，40 歳近くまでは無名の中学教師であった。彼が世に出たのは，学界と離れて独りで書いていた論文（楕円関数論から出発した関数論の体系化；1854）が公表されて以後のことである。

彼の仕事もまたリーマンと極めて対照的で，リーマンが解析関数の像を，天馬空を行くような直観を駆使して幾何学的に描いたのに対し，ワイエルシュトラスは地道着実に冪級数（べききゅうすう）の理論を用いて再現し，更（さら）に

1) ただしこのような図的表現は，リーマンの業績の中にまだ明確に現われてはいないようである。

前者の不備を補っている。彼が，複素関数 $f(z)$ の無限遠点での振舞いを，z を $\dfrac{1}{z}$ でおきかえることによって，数学的に明確に定義づけ，∞ をいわば対象化したことについては上で述べた。

さて，このようにして学問分野としての関数論は大体確立し，ここに生じた問題はそのまま 20 世紀前半に直結していく。しかしわれわれは本書の視野を守って，関数論に関することはこの辺で終りにする。

(b)　実 関 数 論

実関数論の発端　ディリクレの意味での実関数の研究は実（変数）関数論と呼ばれる。他方，複素変数の解析関数の論はしばしば単に関数論と呼ばれる。すなわち実関数の研究は，それに対して約四半世紀おくれて始まったため，もともと関数の研究は実関数の形で始まったにもかかわらず，「実」という断り書きが必要になったのである。些細なことのようだが，複素数という数学的存在の 19 世紀における重さを，ここにも認めてよいかと思われる。

そういえば，解析関数の研究といえば大綱の把（つか）める関数論と違って，実関数論の内容を規定することは必ずしもやさしくない。というのは，これは元来，微分積分学の（解析関数とは別方向の）発展形態のようなもので，しかも実際には，いわゆる病理学的関数の研究，フーリエ級数論，微分積分学の病理学的解析，特に積分論など，対象と方法を異にする多方面な分野がそこに含まれているからである。

もっとも，これらの対象は大部分が集合論形成以後にそれを武器として論じられるものである上，次第に話が専門的になって本書の主題にはふさわしくなくなる。従（したが）ってここでは，いわゆる解析学の数論化という点に注目しながら，ワイエルシュトラスとその周辺で展開された研究についてだけ述べることにしよう。

ワィエルシュトラスと解析学の数論化　ワイエルシュトラスの着実

な批判力は実関数論の領域においてもますます発揮されている。実際，前にコーシーの微分積分学の体系化の項で触れた「いくつかの不備」は，ワイエルシュトラスとその影響下の数学者によって，まず完全といってよい形に仕上げられる。例の ε-δ 論法が形の上で確立するのもワイエルシュトラスにおいてである。次に微分積分学の周辺における彼の寄与について一言しよう。

例(たと)えば「或(あ)る区間で定義された連続関数は，その区間内の或(あ)る点で最小値（または或(あ)る点で最大値）を取る」ことを，コーシーは或(あ)る場所で証明なしに使っている[1)]。しかしこの定理が，「区間」を「閉区間」$(a \leqq x \leqq b)$ と限定したときに初めて正しくなる[2)] ことを証明したのはワイエルシュトラスであり，これはやがて，平均値の定理——微分積分学の基本定理のための核心的定理——の証明にも，本質的に利いてくる[3)]。

連続関数に対する定積分の存在を示す定理でも，一様連続[4)] という大切な条件がコーシーでは見逃(みのが)がされていたのを，これはワイエルシュトラスの弟子のハイネが指摘して修正した (1870, 1872)。

一方，フーリエ級数のところで触れた項別積分，あるいはこれと対照的な項別微分の問題について，一般に関数を項とする級数が一様収束[1)] という性質をもてば，それらの演算が許されることを示したのも，ワイエルシュトラスである。

彼はまた，（実関数は微分可能な点で必ず連続だが），連続関数には必ず微分可能な点があるかという逆の問題に対して，ある区間の到る処

---

1) もっともコーシーの場合，これは微分積分学の体系化の問題とは別であった。
2) 開区間 $a < x < b$ や，$a < x \leqq b$, $a \leqq x < b$ などでは，この事実は必ずしもなりたたない。多変数関数の場合も同様である。——きびしい批判精神！
3) 例えば吉田洋一『微分積分学序説』（培風館）を参照。
4) これらについては既にあげた高木貞治『解析概論』，吉田洋一『微分積分学序説』の他，一松信『解析学序説』（裳華房），酒井栄一『微分・積分（上，下）」（本講座　3，4）その他を参照。
1) 註 4。

で連続でありながら，そのどの点においても微分できない関数を，解析的に作っていて，その関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)\quad (a<b<1,\ b\text{ は奇数},\ ab>1+\frac{3}{2}\pi$$

で表わされる。微分積分学の対象は既に幾何学を離れて独自の解析学的世界を拓(ひら)いており，いわば幅のない線で描かれる関数の像が，その世界の中で，いかに複雑な様相を示すかは，ここに如実に示されたわけである。数学的存在の独自性，したがってまた存在証明などの必然性がここにもまた見られる。

他方，上の最小値問題に関連して，今日「有界無限点集合は集積点をもつ[2)]」と述べられる定理の原型を証明したのも彼である[3)]。これは無限者を一個の数学的対象として捉(とら)えている点で，カントルの点集合論の一つの先駆と見られよう。

さて以上述べた一連の問題は，やがて，幾何学を離れての実数とは何かという問題を誘発せずにはおかない。それが次に述べる実数論である。そして実数論を有理数に基づく形で，従(したが)って結局は自然数に基盤をおく形で定義し，その上に上記のように微分積分学の体系を組立てようとしたことこそ，いわゆる解析学数論化の動きに他ならない。もちろんこうした動きの源流は，遡ればコーシーあたりにも到りうるであろう。しかしそれが本当の軌道に乗るのは，やはりワイエルシュトラスと言うべきである。

なおワイエルシュトラスはこうした仕事の大部分を講義の形で発表しただけで，生前はほとんど公刊をしなかった。ただ幸いに特に晩年その講莚(こうえん)に多くの弟子が集まったせいもあって，その講義録は弟子た

2) 関心は「無限」にあって，その内容はここでは問題ではない。内容については前の註であげた微分積分学の書物や，位相数学の書物を参照されたい。亀谷俊司『初等解析学』（岩波全書）も参考になる。

3) この定理のことは，実はコーシーと同じ頃に，既にボルツァーノが論じている。

ちの手で刊行され，後代に大きな影響を残したのであった。

ボルツァーノ　今迄触れる機会がなかったが，ボルツァーノ（1781–1848）は，恵まれることなく夜更けに啼(な)いた梟(ふくろう)のような存在である。

彼はプラーハ大学で哲学，神学，数学を修め，数学の教授と宗教学の教授とのどちらを取るかに迷ったあげく，新設学科である後者の道を選んで学問生活に入った。一時は学部長にも補せられている。ところが同科設立の趣旨に背いて自由思想を鼓舞する言動があったため，結局，大学を放逐されて警察の監視下におかれた。

彼の数学はそのような逆境の下に生れたのだが，コーシーとほぼ同じ時代に，既にディリクレ流の実関数の定義を立て，関数の連続性の定義，後にワイエルシュトラスによって再発見された連続関数の諸性質など，多くの優れた先駆的業績を残している。ただ周囲の環境が上の通りであり，数学の仕事に関する書物の公刊すら必ずしも自由でなかった上に，何分にも学問の中心を離れた処にあったため，後世への影響の乏しいことはやむをえない。1974 年現在，神学，哲学，数学にわたる厖大(ぼうだい)な全集が企画されているので，これが完成した暁には，なおいくつかの業績が発掘されるかもしれない。

今迄に公刊された著作のうち，『無限の逆説』（没後出版；1851）は，極限算法のような無限過程でなく，無限に多くのものを一個の存在と見ること——いわゆる実無限——について，深い思索を盛ったものである。もちろんその背景には神学や哲学が根底的に働いているわけだが，西欧におけるこの種の深い議論にしばしば見られるように[1]，数学をそれらの哲学的問題の雛型(ひながた)としたというか，そこで具体的に論じられているのはむしろ数学である。

彼はこの本を，「無限者を論ずるのに何故(なにゆえ)その逆説に注目するのか？

1) 古代のプラトンや中世のニコラウス・クザヌスは，すぐにも思い浮ぶ例である。カントルにもその意図があったと考えられる節が多い。

それは無限者が本来，逆説的なものだからだ」という姿勢で始めている。しかしその逆説性を積極的に肯定して，そこに一つの存在論を打建てるという姿勢は，まだ生れていない。そしてまさにその観点の逆転こそ，カントルがボルツァーノを批判しながら，最も情熱的に展開したことなのである。ちなみにカントルもまた数学者であると共に，特に後年は哲学的神学者の様相を濃くした人物である。

実数論の形成　近代的実数論とユークリッドの比，比例との対比については，今まで時折触れた。この量の比と長さとが一対一に対応することについては，既に 16 世紀のボンベリが注目し，やや遅れて，量の同次性 (p. 84) に関するデカルトの寄与がある。この最後のことは後世に影響の大きい出来事である。

しかし大勢的に見て，連続の問題が数学者の真剣な関心事になるのは，18 世紀のダランベール以後，あるいはむしろガウス以後のことである。すなわち収束，極限，あるいは（今日のいわゆる）連続関数が正値から負値に変るとき，途中で必ず 0 になるというようなこと，これらが微分積分学の自立と共に次第に自覚的に取り扱われてくるのである。ボルツァーノはこの辺のことに特に多くの仕事を残している。ワイエルシュトラスの解析学数論化の動きも，それとは独立ながら，やはりこの歴史の上に成立したものである。

ワイエルシュトラスの無理数論，続いてカントル (1872)，メレ (1872) の無理数論はいずれも同じ傾向のものである。その骨子は，無理数 ξ を定義するのに，ξ を近似するはずの有理数列をとり，これを ξ の代用にしようという処にある。カントルの場合でいうと[1]，有理数だけしか知らぬはずの者が，その世界の外にある対象（無理数）を導入ないし創造しようというのだから，まだ存在しない極限値たる ξ を介在さ

1) 彼がリーマンの仕事を継承してフーリエ級数論の問題を扱ったとき，その中で発表されたものである。メレの方は論旨にやや不徹底な処がある。

せるわけにはいかない。そこで数列の収束を，その極限値を知らぬままで判定する必要に迫られることになる。ところがここにはコーシーの得ていた結果（今日コーシー列または基本列と呼ばれるもの[2)]）があって，結局，有理数からなるコーシー列が「実数」と呼ばれるのである。

他方，デデキントは有理数全体の切断という概念によって，実数を定義する (1872)。すなわち有理数全体を大小順に並べ，これを大きい方の組（上組）と小さい方の組（下組）に分ける。要するに，上組のどのメンバーも下組のどのメンバーより大きいように，有理数全体をきっかり二分するのである。彼はこのような分割を切断と名づけ，切断の一つ一つを「実数」と呼ぶ。

例えば $\frac{1}{2}$ 未満 ($\left(x < \frac{1}{2}\right)$) の組と $\frac{1}{2}$ 以上 ($\left(x \geqq \frac{1}{2}\right)$) とに分ける切断は，彼のいう「実数」の一つで，これはこの「実数」の仲間たる「有理数」$\frac{1}{2}$ に他ならない。一方，2 乗して 2 より小さい有理数と負の有理数の全体とを下組とし，その他のものを上組とすると，（$\sqrt{2}$ は有理数でないから）下組に最大者がなく，上組に最小者がないという切断になる。しかしこれも切断に違いないから，これもまた「実数」であって，この種の切断を「無理数」（今の例では $\sqrt{2}$）と呼ぼうというわけである。

おもしろいのは，これらの無理数論がほとんど時を同じくして生れていることである。すなわち時代の趨勢はもはやこの動きを必然のものとするようになっていたといってよいであろう。なおデデキントの無理数論は，前 5 世紀のエウドクソスの比例論（『原論』第 5 巻）の精神を現代的に復活させたものであるが（『数とは何か……』第 1 版 (1887) 序文），「実数」の「存在」性，あるいはむしろその人為的「創造可能性」

2) 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\cdots$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，N が定まって，任意の $p, q > N$ について $|a_p - a_q| < \varepsilon$ となるとき，コーシー列と呼ばれる。これは数列の収束の必要十分条件である。

を強調する点で（本書 p. 147），古代の考え方とは質的に変っている。

ただ，ここに一つの問題は，カントルにせよデデキントにせよ，「コーシー列」あるいは「切断」そのものを「実数」と呼んでいたか，それともコーシー列や切断が定める（列や切断以外の）対象を密輸入していたかという点にある。文面から推測される限りでは，カントルもデデキントも「コーシー列」あるいは「切断」をそのまま「実数」と呼ぶ処まではまだ踏み切れていなかったようにみえる。

しかしともかく，ここから現代的な実数論まではあと一歩だったと言ってよいであろう。

こうして実数論は有理数を基としてでき上ったのだが，ワイエルシュトラスやカントルの場合には有理数の無限列が現われ，またデデキントの場合には有理数全体という無限集合が現われている。すなわちこの「数論化」は，有理数に基づくとは言うものの，本質的に無限集合を介在させるものである。この種の無限集合をはじめ，今迄この章で扱った，いわばこっそり数学の中に登場し始めていた無限者的対象を，一挙に統一的に処理する態度を確立したところに，カントル，デデキントの仕事の一つの重大な意義があるのである。

第 3 章　現代数学の基礎
――集合論の建設と数学基礎論の形成――

前章では近代数学の展開変貌の様子を述べながら，無限概念が次第に数学の中に浸透してくる様子を見た。特に解析学の数論化の基礎をなす有理数の集合や，それとは異質のことながら，射影幾何学や関数論などに起こった実在的無限者（無限遠点）の登場，空間の数学化などのことは重要である。集合論はそれらの考え方を背景において成立し，やがてそれらを広く基礎づけるという形で形成される。

もともと数学における無限論は，古代ギリシャ以後，まず近世における極限算法の導入によって第一回の変貌を遂(と)げ，次いで 19 世紀末の集合論の成立によって再び大きな変貌を遂(と)げた。われわれは集合論の影響下にある数学を現代数学と呼んでいるわけだが，本章では集合論の形成と，それに直接つながる問題の展開とのみに話題を限定する。

3-1．集合と集合論

この節ではこの章全体の準備として，基本的用語その他の説明を行なう。

集合　「集合とはわれわれの直観または思考の対象で，確定していて，しかも互いに明確に区別されるもの（それを集合の元という）を，一つの全体としてまとめたものである」（カントル，1895）。集合概念については，なお注意すべきことがあるが，それはこの後の話題とする。

対象 a が集合 A の元であることを $a \in A$ または $A \ni a$ と書く。

集合 A の元がすべて集合 B の元であるとき，A を B の部分集合といい，$A \subseteq B$ と書く。特に $A \subseteq A$．なお便宜上，元をもたない「空集合」なるものを導入し（記号では ϕ），任意の集合 A について $\phi \subseteq A$ と規定する。特に $\phi \subseteq \phi$ である。

A, B が同じ元からなるとき，すなわち $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ のとき，A, B は等しい集合であるといい，$A = B$ と書く。特に $\phi = \phi$ である。

集合論　普通に集合論と呼ばれるのは，(1)　集合代数，(2)　濃度または超限基数の理論，(3)　超限順序数の理論，の三つからなる。

(1) は，記号論理における理論演算（$\vee$（または）$\wedge$（かつ），$\neg$（〜でない），その他）と，集合に関する演算（$\cup$（和集合），$\cap$（共通部分），C（補集合），その他）との関連を扱うもので，これはカントルの仕事とは一応別である。

(2)，(3) はカントルに負うもので，無限者に関する一種の算術である（前者は個数の一般化，後者は順序数の一般化）。

(2) におけるカントルの考えの基礎は一対一対応による集合の分類である。一般に，集合 A, B の間に一対一対応が存在するとき，A, B は対等である。A, B の濃度(元の個数の拡張)は等しい，と言い，$|A| = |B|$ と書く（$|A|$ は A の濃度)。また B の或(あ)る部分集合 B' と A とが対等のとき，$|A| \leqq |B|$ と書き，$|A| \leqq |B|$ かつ $|A| \neq |B|$ のとき，$|A| < |B|$（$|A|$ は $|B|$ より小）と定義する。$|A| \leqq |B|$ かつ $|B| \leqq |A|$ ならば $|A| = |B|$ が証明される。

例(たと)えば自然数の全体 N と偶数の全体 P とは，$P \subseteq N$ であるが，一対一対応 $(N \ni) n \leftrightarrow 2n (\in P)$ が存在するから，同じ濃度の集合と呼ばれる。N と同じ濃度をもつ集合を可算集合と呼び，可算濃度を $\aleph_0$（アレフ・ゼロ）と書く。無限集合の濃度の間にどんな区別があるか，その大小相等や和積などの演算はどう定義され，どんな性質をもつかなど，これが (2) の主題である。

他方，(3) における基礎は順序の型（順序型）を保存する一対一対応である。例(たと)えば，上の N, P の各元を大小順に並べた順序集合 N_0, P_0 は同一の順序型をもつが，N のうちで，1 を他のどの n よりも「後」に来る元とした順序集合 $N_1 = 2, 3, 4, \cdots\cdots, 1$，$N$ のうちで奇数を偶

数より「先」においた $N_2 = 1, 3, 5, \cdots, 2, 4, 6, \cdots\cdots$，$N_0$ の頂序を転倒した $\widetilde{N} = \{\cdots\cdots, 3, 2, 1\}$ などは，それぞれ別個の順序型をもつ集合である。

順序集合 A の任意の部分集合 $(\neq \phi)$ が最初の元をもつ場合，A を整列集合と呼び，整列集合の順序型を順序数という。N_0, N_1, N_2 は整列集合で，その順序数は，それぞれ，$\omega, \omega+1, \omega+2$ と示される（後出）。N は（それ自身が最初の元をもたないため），整列集合ではない。

順序型，特に順序数の分類，演算などを論ずるのが (3) の主題である。

カントルとデデキント　集合論の歴史はカントルに始まると見るのが普通である。実際，古代ギリシャ以後 19 世紀後半までの間，少くとも数学の正統な対象とは見られなかった実無限（極限算法のような過程的・生成的無限でなく，何らかの意味で実体的に存在する無限者）を，あえて数学の正当な対象——無限集合—— と認め，無限集合に関する取り扱いの最も基本的な態度を数学の中に導入したのはカントルだからである。

しかしカントルと共に，デデキントの寄与もまた重大である。というのは，数学の中での無限集合の取り扱いの具体的な道は，カントルよりもむしろデデキントによって拓(ひら)かれたものだからである。そういえば上の無限遠点にしても，単に超越的な存在として数学に降臨して万事が終ったのではなく，数論的あるいは幾何学的な解釈を経て本当に数学化されたのであったが，カントルの無限集合導入の態度には一般に超越的な処があり，点集合論の開拓という点を別にすると，現代数学との直接のつながりはむしろ稀薄だと言える。

集合と数学的存在　ここで現代数学における集合概念の使われ方について一言しておく。現代の代数学の概念（例えば群；III–4–3b）は，積（または結合）と呼ばれる「演算」（それを規定すべき諸「関係」）をもつ集合であり，同じく現代の位相空間の概念は，大まかに言えば極限算法

に当る「演算」（それを規定すべき諸「関係」）をもつ集合である。

さらに「演算」は，例(たと)えば関数 $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ を「順序対」$<y, x>$ の集合（幾何学的に言えばグラフ）

$$\{<y, x> | a \leqq x \leqq b, y = f(x)\}$$

として示すように[1)]，一般に n 項順序対 $< x_1, x_2, \cdots x_n >$ の集合として表示される。「関係」も同様で，例(たと)えば大小関係 $x > y$ は，集合

$$\{< x, y > | x > y\}$$

として示される。一方，順序対もまた集合概念だけを用いて表現できる[2)]。

他方，数の世界はというと，まず自然数が一種の集合として表現できる (III–3–3) 次に整数は自然数の順序対 $< m, n >$（内容的には $m - n$）として，（ただし大小相等や演算を適当に定義した上で）表現され，有理数も同様に整数の順序対（分数）として表現される。（これは自然数から見ると $<< m,n >, < p, q >>$ の形である）。さらに実数（切断の上組と下組という 2 集合の順序対；p. 146 参照），複素数（実数の順序対，実は $x + iy$）についても同様である。

この間，自然数論や実数論でこのことを実行したのはデデキントであって，カントルの方にはこういう考えの筋はあまり明瞭に出ていない。カントルの仕事の意義は，あくまで，ギリシャ以来の長い数学の歴史の中で，実無限を数学の対象として捉(とら)えるという巨大な歩みを，意識的かっ積極的に推進した点に認められる。考えてみると，デデキントから今日に到るまでの，全数学を上記のように集合概念の上に建設するという企ては，無限集合を一個の存在者として自由に駆使できるという新しい存在論を前提にして初めてできたことである。またそのような仕事に必要な記号法，特に記号論理学の方法にしても，やはり

1) 一般に$\{x|x$ のみたすべき性質$\}$という記号は，そのような x の集合を示す，

2) 「順序対」にとって最も大切なのは第 1 元と第 2 元の区別がつくことだが,$< x, y >$ を $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ なる集合と定義すると，その目的に叶うことが知られている。

無限集合が自由に扱えるようになったところで，初めてその本当の力を発揮する。カントルを集合論の創造者，あるいは現代数学の存在論の創造者であるとするのは，以上のような意味で考えるのが正しいであろう。

集合と論理　集合の概念と論理との間には密接な関係がある。

或(あ)る範囲の対象 x（例えば実数）の一部がもつ性質（例えば「x は有理数である」）を $P(x)$ と書くとき，x_0 が集合 $\{x|P(x)\}$ に属することと，x_0 が性質 P をもつことは，論理的に同等である。むしろこの同等性を前面に出し，「性質」（属性）を集合（存在）で置き換える処に，今日の集合概念の広さがあり，ひいては今日の数学的存在の最も重要な性格がある。

論理的つなぎ言葉：「〜でない」「かつ」「または」などが，補集合，共通部分，和集合でそれぞれ置き換えられるのも，この考えの上でのことである。

論理学の中に，上記のような意味での集合概念を本格的に導入したのはブール (1815–1864) である。

ブールが論理学の法則と代数学の法則の類似性に注目はしたものの，主として論理学の範囲内で仕事をしたのに対し，もっと数学に適する論理学を作る方向で働いたのは，フレーゲ（1848–1925）である。フレーゲは集合概念と論理との関連性に更(さら)に立ち入り，命題変数，命題関数，量称記号（quantifier，限定記号ともいう）などを導入した（p. 172 参照）。なおカントルは最後までこのよう方面に関心を示さず，むしろ記号論理学を好まなかったと言われている。

3-2．カントル

集合論建設まで　カントル (1845–1918) はロシア生れのユダヤ系ドイツ人，チューリッヒ大学とベルリン大学に学び，不定方程式に関す

る論文 (1867) によって学位を得た。彼はこのとき，補助題目として，

I. 解析的方法に対する数論的方法の優越性

II. 時間，空間の絶対的実在性に関する考察

III. 数学における問題提起の重要性

という意味の三つを挙げている。これらは彼の後の業績と考え合せるとなかなかおもしろい。これについて，カントルの伝記を書いたフレンケル[1] は，集合論という問題の提起はこの III の実現であるといっているが，実はその他にも，II には集合論の背後に潜むカントルの自然哲学的傾向が，また I には集合論展開の底にある数論的傾向が，それぞれ関連しているように思われる。

カントルが集合論への道を踏み出した一つのきっかけは，三角級数に関するリーマンの研究である。彼はワイエルシュトラスの弟子ハイネの刺激によってこの問題に手をつけ，1870–1872 年の間に 5 篇の論文を書いている。その中の一つで，カントルは

2 つの三角級数

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum(a_n \sin nx + b_n \cos nx),$$
$$\frac{1}{2}b'_0 + \sum(a'_n \sin nx + b'_n \cos nx)$$

が，ある区間で共に収束し，かつ一致する場合には，両者の相対応する係数 a_n, an' ; b_n, b'_n はそれぞれ一致する

という定理を証明したが (表現の一意性；1870)，やがてこの仮説をゆるめ，両級数の収束性あるいは一意性のやぶれる例外点が多少あっても，このことはやはり成立することを示した。この例外点の集合は初めは有限集合であった。しかしやがて或(あ)る種の無限集合でもよいことがわかり，それを系統的に処理するために，集積点[2]，第 n 次導集合[3] の

1) Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, 付録

2) 点 a を中心とする任意の小円内に集合 A の点が無数にあるとき，a を A の集積点という。

3) 集合 A の集積点の全体 A' を A の導集合といい，A' の導集合 A" を A の第 2 次

考えが導入され（点集合論の始まり），それが結局，その集合論形成につながっていく。なお彼の実数論（第 2 章第 7b 節）もこの仕事の途上で展開されたものである。

可算濃度と連続体濃度　カントルの集合論関係の第 1 論文『代数的実数全体のもつ一つの性質』（1874）の主題は，当時，数論における関心事の一つであった超越数[1] に関することである。彼はこのとき，代数的実数の全体が可算集合であること，実数の全体がどんな可算集合によっても尽されぬことの二つを証明し，それによって超越数が無数にあることを示したのである[2]。実数全体の集合の濃度を連続体の濃度といい，現在では $\aleph$（アレフ）と書く。

この当時までの超越数の研究が個々の数を相手として行なわれていたのに対して，この集合論的手法は極めて斬新であった。しかしこのような個体的でない論法は，カントルの旧師クロネッカー（第 3 章第 4 節）を含めて，当時のドイツの指導的数学者には受け容れられなかった[3]。このことは彼のその後の生涯に悲劇的な影を落すことになる。

さてカントルはこの第 1 論文で，自然数の濃度と直線連続体の濃度とを区別しえたので，それに続く自然な推測として，次の濃度は平面上の点全体の濃度であり，その次は 3 次元空間の点全体の濃度であると考えたらしい。ところがやがてそれらの濃度はすべて同一であることが分った。1877 年の 5 月から 7 月にかけて，カントルは，唯一の理

導集合という。第 3 次導集合 A''' 以下も同様に定義される。

1) 整係数の代数方程式の根になりうる実数（または複素数）を代数的数といい，それ以外の実数（または複素数）を超越数という。e の超越性はエルミットによって (1873)，また π の超越性はリンデマンによって (1882)，それぞれ数論的に証明された。

2) カントルのこのときの証明は，後に有名になった対角線論法ではなく，無理数論を基礎にした区間縮小法（例えば高木貞治『解析概論』第 1 章参照）のような論法である。

3) ワイエルシュトラスはほぼ唯一の例外。デデキントは理解ある先輩だったが中央にはおらず，いわゆる学界のボスではなかった。

解者たる先輩デデキントと何度も手紙を交換し，その適切な批判に力づけられながら，結局この破天荒な結果に到達したのであった。カントルの集合論に関する第 2 論文『集合論に対する寄与』(1878) はこの結果を扱っている。そしてこの事件は彼を連続の問題に没入させたのみでなく，抽象的集合論の建設の姿勢を明瞭にとらせた決定的な出来事になったのである。

なおカントルはこの結果を前にして，しばらくは次元という概念が数学的意義を失ったと考えた。これに対して，カントルが直線と平面とを一対一に対応させるのに用いた対応に連続性が欠けていることを指摘し，一対一両連続[1] な対応の下では次元の消滅は起らないだろうと示唆(しさ)したのもデデキントである[2]。一対一両連続の対応は後の位相数学 (III–4–3a) で最も重要な概念となり，また次元の概念への数学的接近もこうして始まる。

集合という術語について　ここで集合という術語の原形について触れておく。カントルの三角級数の論文には Punktmenge(点集合)という術語が出てくるが，上記の第 1 論文では実数全体や代数的数全体などを示すのに Inbegriff (総体) が用いられている。しかし後者は固有名詞的な全体者であり，前者は或(あ)る不特定的な集まりであり，対象も数論と解析学という別個の領域に属していて，当時のカントルがこの二つを包括する集合概念を持っていたとは考えにくい。彼が新しい集合概念 Mannigfaltigkeit (多者) を導入して両者を止揚したのは第 2 論文でのことであって，これはカントルの集合概念の形成における重要な一歩である。ただし 1880 年代以後は，この術語の省略形として再び Menge が用

1) 集合 A, B 間の一対一対応で，A から B へも，B から A へも連続性をもつもの (III–4–3a)。

2) カントルはこの問題を第 3 論文『連続的集合の理論の一定理』で取り上げたが，その取り扱いは不完全であった。それはブロウエル (III–3–6c) の 1910 年の論文で完全になる。

いられる。Menge，Inbegriff はボルツァーノの用語，Mannigfaltigkeit は，リーマンが多様体（第 4 章第 3a 節）の意味で用いた用語を拡張，流用したものである (p. 79)。

しかしカントルが Mannigfaltigkeit を用いた裏には，なお別の事情が考えられる。それは例の「一と多」というギリシャ以来の，数学というよりは多分に哲学的な問題とのつながりである。実際，この問題には単位と数，元と集合などの数学的側面もあり，またもちろん哲学的な要素がある。そしてカントル自身は，集合論の第 4 論文の中で，集合概念は本来は数学だけのものではなく，「一者とみなされた多者のことであり，プラトンの言うエイドス，イデア，ミクトンなどに近いもの」だと述べている。そしてカントルは哲学的な議論では後でもよくこの言葉を用いている。彼が集合のことを決定的に Menge と呼ぶのは，集合論の第 9 論文（最後の論文；1895–1897）でのことであるが，そこでは集合論が全く数学内の理論に限定されているのもおもしろい[1)]。

『線状無限点集合論』　さて前記の二つの濃度を区別した後，カントルは点集合の理論と濃度の理論とが混在する形で，連続体に対する攻撃を開始する。というよりも，連続というものの解明こそ，学位論文に付けた第 II 題目以来，カントルの持っていた最も根本的な問題の一つであって，やがてみるように，彼はここで，時間，空間，運動などの観念を経験的自然から切り離して基礎づけるのに，この研究の成果を使おうとしているのである。

これらの問題は，彼の前半生における代表作である集合論の第 4 論文，『線状無限点集合論第 1–VI 報』（1879–1884）の中で論じられてい

1) 後期のカントルは一般的な集合の理論に対しては Mannigfaltigkeit を用い，点集合のような，より数学的な問題では Menge をも併用する，という程度の区別をしていたと推測される。その場合第 9 論文なども，数学の一つの理論としての集合論に話を限定した，と考えられるであろう。（これらに関する詳細は近く専門誌に発表する予定。）

る。そしてその考え方の基礎になったことこそ，無限集合を単一の存在とみなすという実無限の考えであり，それはその第 V 報 (1883) において確立されている。

ついでながら，この標題の「線状無限」というのは，元来，「直線上の無限濃度の」という意味であった。しかし第 III 報以後は直線上と限らず，n 次元空間における点集合が扱われ，更(さら)に第 V 報では，点集合のみでなく「一般集合論」が論じられている。初めに事を「直線上」に限ったのは，例の「次元の消滅」が尾を引いていたためと思われる[1)]。

この論文の本来の目標は，「直線連続体の完全な解明」ということであった (第 1 報，1879)。しかし第 1 報で実際に行なわれているのは，有限次数の導集合を用いての点集合の分類である。

第 II 報 (1880) では集合の和，および共通部分の二つの演算が導入され，それを用いて次数が「∞」を超える導集合が初めて定義される。すなわち，集合 P の 1 次，2 次，……の導集合を

$$P', P'', \cdots, P^{(n)}, \cdots\cdots$$

とするとき，それらの共通部分として $P^{(\infty)}$ (今日の記号では $P^{(\omega)}$; 以下，今日の記号による) が，さらに $P^{(\omega)}$ の導集合

$$P^{(\omega+1)}, \cdots, P^{(\omega+n)} \ (n = 1, 2, \cdots n, \cdots\cdots)$$

の共通部分として $P^{(\omega 2)}$ が，あるいは

$$P^{(\omega)}, P^{(\omega 2)}, \cdots, P^{(\omega n)}, \cdots\cdots$$

の共通部分としての $P^{(\omega^2)}$ などが，それぞれ定義される。これは超限順序数論の芽生えである[2)]。

---

1) なお，この標題の修正がされなかった背後には，当時の学界の事情も働いているかもしれない。実際，クロネッカーなどの影響で，カントルの論文を歓迎しない雑誌は少くなかったから，この場合なども，継続ならともかく，新規の論文となると発表しにくいなどの事情があったのではないか。一つの臆測として記録しておく。

2) カントルのあげている例の最後は $P^{(\omega^{\omega^{\omega}})}$ である。.

ところが第 III 報 (1882) では対象が急に拡大する。すなわち直線上の点集合どころか,「線，面，立体など」何者の集合でもよい，むしろ集合論は「数学だけに限定して考える場合でも，数論，関数論，幾何学などを包括し，それらを，より高い統一の中にまとめるものであり，そこでは不連続者も連続者も同一の見地から観察され，共通の尺度で測られる」のだということになる。ここで言う「同一の見地」「共通の尺度」とは，それぞれ濃度の理論，濃度のことである。第 2 論文に始まる抽象的集合論建設の姿勢はいよいよ明瞭である。

集合に対する元(げん)の帰属関係 $(A \ni x)$ が，論理的内在性によって決定されることが明記されるのも，この論文の中に始まる。例(たと)えば e^{π} が超越数か否(いな)かは当時の状態ではわからなかったが，内在的にはそれはどちらかに決っている，だから超越数の集合なる対象は論理的に確立している，という考え方である。これは，カントルにおける数学的存在の世界が，いわば現実に対する一つの論理的モデル——その世界において，論理と存在とが一体化しているようなモデル——であることを示している。

一方，この第 III 報の最後には，この研究は根底的には，現実の時間，空間，運動の概念の分析であり，それらを常識通り「連続的」と見る見方への批判的考察であると共に，新しい力学理論の構想にもつながるものだ，と述べられている (学位論文付属の第 II 題目との関連)。しかもこれは，或(あ)る点集合のもつ性質 (平面上の無理点全体の連結性) に示唆(しさ)されてのことなのである。

ところが第 IV 報 (1883) になると，こうした哲学的傾向はまた影を潜め，n 次元ユークリッド空間内の点集合論が，測度論や実関数論との関連の下で展開される。

『一般集合論の基礎』　第 4 論文第 V 報(1883)は，カントルが数学と哲学との接触点において，無限や連続の問題をいかに考えていたかを

知るのに最も大切な論文である。その全体は 14 節からなり，『一般集合論の基礎』という，原題より遙(はる)かに広い題目の下で独立にも発表された（1883）。また第 VI 報（1884）は第 V 報につづく点集合論で，§§15–19 の 5 節からなる。

第 V 報の主眼は実無限—— 一つの個体たる無限者——の認識であって，これはカントルの集合論の基本精神である。もちろん多と一に関するエレア学派，プラトン学派以来の問題が，そこでは考慮されている。

しかし数学的に見ると，ここで言う実無限とは今日の超限順序数のことであり，彼はこれを導集合の次数（前出）の超有限的延長として実体化したのである。しかもそれだけでなく，従来は一応別個に展開されていた濃度の理論を，この超限順序数によって整理しようとする姿勢がここで初めて生まれてくる。してみると，濃度の理論と順序数の理論を二本の足とする今日の集合論の骨格は，この論文の中で固まったわけである。

この論文の全体の構成は必ずしも系統だったものではなく，特にその数学的部分の系統化は最後の第 9 論文[1] で行なわれるのだが，われわれの主題にとって大切なことである上，比較的紹介されることが少いので，次にこの第 V 報の要処要処を説明しておく。

カントルの実無限論の本質的な要素は，ほとんどすべて §§1–3（特に §1）の中にある。すなわち彼は実無限なるものを，射影幾何学の無限遠点や関数論の無限遠点と同系統の，確定した対象と見，ただしこの場合は単一の対象でなく，無数の対象であるとする。これに対して解析学でいう極限の意味での無限は，非本来的な無限であるとして，実無限と明確に区別される[2]。

1) 第 9 論文は，功力金二郎訳・解説『カントール超限集合論』（共立出版）として出版される予定。また P. E. B. Jourdain 訳・解説，*Contributions to the founding of the theory of Transfinite Numbers* (1915，Dover) も参考になる。

2) 解析学その他に出てくる無限小は，便宜上のものとして，対象化する必要を認めない。

超限順序数と濃度　実無限（すなわち超限順序数）は大小順に次のように並べられる。まず自然数を自然の順に並べたものは一つの実無限だから，これを ω と呼んで自然数列の次におく。すると自然数列の後に ω のおかれた配列がまた一つの実無限になるから，これを $\omega+1$ として前者の次におく。するとこれがまた一つの実無限になる，……。ところがこうして生じる実無限者の無限列は，（自然数全体を一個の対象と見たのと同じ考え方で）また一つの実無限になるから，その全体を一つの記号 2ω（今日の $\omega 2$）で表わして先の列の後におく，……。

このようにカントルの実無限は，まず一つの元を後に添加するという「第 1 生成原理」と，この原理の繰返しによって生じる終りのない無限列を，改めて一個の対象とするという「第 2 生成原理」との二つからなっている。しかしこれだけでは，まだ濃度との関連はつかない。

カントルはそこでこの列に「仕切り」を入れようとする。すなわち有限順序数である自然数の列は，これを途中のどこで切っても，そこ迄の自然数は有限個だが，その全体となると有限を超える。これと同様に，ω 以後の可算順序数[1] の列も，これを途中で切ると，そこ迄の順序数の個数（すなわち濃度）は可算集合になることが確かめられる。そこで——と彼は開き直る，「可算濃度の順序数の全体は可算濃度を超えた濃度の集合にならざるをえない。しかも順序数の列はなおその先へと続くのだから，そこにはいくらでも大きい濃度が区別され，かつそれによって順序数の列に仕切りが入る」。カントルはこれを抑制原理 (Hemmungsprinzip) または限定原理 (Beschränkungsprinzip) と名付け

1) 可算集合のもちうる順序数を可算順序数，または（カントルに従って）第 2 級順序数という。順序数の例として今までにあげた ω, $\omega+1$, $\omega 2$ をはじめ

$$\left.\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}\ (\omega\ \text{型})$$

あるいはそれ以上のものなど，具体的に表現できる順序数は（ほぼ）これに尽きる。もっとも「具体的表現」ということの意味づけは極めてむずかしい。

たが (§1)，上の「開き直り」 (§11，§12) の結果，実際にはこれが第 3 の生成原理として働き[1)]，かつ濃度の理論と順序数論とを初めて結びつけることになる。この時代以前に彼が可算濃度と連続体濃度以外の濃度の存在を明確に意識していた様子はないので，この第 3 原理の意義は幾重にも大きい。

カントルがこの頃まで上の二以外の濃度を把握していなかったらしいことは，この第 4 論文と第 8 論文『集合論の一つの初等的問題』(1891) とから推測される。実際，第 8 論文は対角線論法[2)]を初めて導入した論文であり，そこにはこれが第 4 論文で得られた結果の別証明である旨の記載があるが，漠然たる予感ぐらいはともかく，より高い濃度の存在を彼が本当に知っていたことをにおわすような記事は，この二つ以前に見当らないからである。

なお，この辺の議論の進め方は本質的に数論を手本とするものであって，学位論文付属の第 1 題目が，はしなくもここに現われているという感じである。

ところで，一般に濃度の高い集合を得る方法として，具体的には，一つの集合の冪(べき)集合 (部分集合の全体) を取ること (対角線論法の一般化) と，

---

1) この順序数論の前半は，後のフォン・ノイマンの公理的集合論における順序数論の原型と見られる。

2) $0 < x < 1$ なる実数の全体が可算だと仮定すると，その小数展開を

$$\begin{array}{lllll} x_1 = 0.a_1' & a_2' & \cdots & a_n' & \cdots\cdots \\ x_2 = 0.a_1'' & a_2'' & \cdots & a_n'' & \cdots\cdots \\ \quad\vdots & & & & \\ x_n = 0.a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \cdots & a_n^{(n)} & \cdots\cdots \\ \quad\vdots & & & & \end{array}$$

のように並べることができる。ここで小数 y をとり，その小数第 n 位が，x_n の小数第 n 位の数 $a_n^{(n)}$ と異なるようにする——対角線部分で喰い違わせる——と，y はどの x_n とも異なるようになり矛盾を生じる。すなわちそのような一対一対応はありえない

(濃度の増大列に当る)集合列の和集合を取ることの二つがある。例(たと)えば自然数全体 A から始め，A の冪(べき)集合 B(実は連続体濃度の集合)，B の冪(べき)集合 C，……と続けると，濃度の増大列に当る集合列が得られる。その列の和集合を S とすると，S の濃度は，その列のどの集合よりも大きい。そこでまた S から同様のことを始める……，という具合に進めるのである。

これはカントルの第 1，第 2 生成原理と似ているが，彼は冪(べき)集合と和集合によるこの論法を，第 9 論文 (1895–1897) に至っても系統だっては用いていない。その体系的な適用はラッセル，ツェルメロなどの仕事に属する[1)]。

実無限の哲学　ここで話を少し戻して，終らぬ過程を「終った」とするカントルの姿勢について述べる。もちろんここには大いに異論の余地がある。すなわち同じ事実に対して，「いつまでやっても終らぬものは終るはずがない」と言ってしまうと，それはカントルと別の世界になる。特に可算順序数の「全体」は，自然数全体というのより一段と思い浮べにくいから，初期の集合論を積極的に利用して測度論などに適用したフランスのボレル (III–3–4) やルベーグ (III–4–2b) も，この点には批判的態度を持していた。同じような批判は，今日の数学基礎論の中にも或(あ)る形で生きている。

実は，この点についてはカントル自身も大分気になっていたと見えて，この第 V 報の §4 から §7 にかけての哲学的な議論は，ほとんどこれに関する弁明ないし主張である。彼はプラトン，アリストテレスを

1) 集合の濃度を上げるための演算が上記の二つに限るかという問題，特にそれら以外の演算の例を実際に示す問題は，現代集合論の重要な課題である（竹内外史『現代集合論入門』(1971，日本評論社)），他方，カントルのこの「実無限」が，後述の公理的集合論の描き出す「無限集合」をどの程度まで含むかの問題もある（カントルの暗示的表現の公理化；III–3–8，9)。ツェルメロの解釈では，カントルの無限集合の範囲は比較的小さかったことになるが (III–3–4)，その解釈にも問題の余地はあると思われる。

始め，中世の神学者を経て，デカルト，ライプニッツ，スピノザ，あるいはボルツァーノなどについて，その無限観を次々に批判していく。しかしその要点は，上の「多を一とする」見方を呑み込むか否(いな)かにかかっているように思われる。

例えばカントルはアリストテレスのことを，「有限だけを存在と認めた結果，それに基づいて，実無限者は存在しない」と論じているに過ぎないとし，これを論点先取りの誤りときめつける[1)]。しかしその実，自分の方は，無限者を一個の対象と見てよいことをまず認め，その上で事を運んでいる——に過ぎないといえば，それに過ぎない。しかしまた一方，現代数学の現実として，その対象がこの存在論の前提の上に組立てられていることも忘れてはならない。

アリストテレスに比べると，ライプニッツおよびボルツァーノに対するカントルの批判には，或(あ)る種の共感が認められる。それは，この人たちが特に神の中に実無限者を認めていたからであるらしい。カントルに言わせると，それなのに何故(なにゆえ)彼らは数学的実無限論へ進まなかったのか，ということになる。もっとも，特にライプニッツの哲学はカントルの中につねに秘められていたようで，彼は本気で集合論を自然哲学として用い，物理学を点集合論によって書き直すことさえ考えていた形跡がある[2)]。その妥当性についてはともかく，数学をもって現実世界と形而上学とをつなぐ鎖の輪とし，あるいはむしろ数学をもって形而上学の雛形(ひながた)と見る考え——ピタゴラス以来の西欧思想における一つの基本的契機——は，ここにも顕著に現われている。これは彼なりのマテシス・ウニウェルサリスなのである[3)]。

---

1) 現実には，この反アリストテレス論の背後に旧師クロネッカーへの反駁が秘められていたことが，カントルの記事から看取される。

2) 例えば Cantor, “Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen ... Zweite Mittelung.” *Acta Mathematica*, Bd. 7 (1885).

3) カントルの集合論とライプニッツの哲学（特に『単子論』）との対比は，この意味

一方，前記の「多を一とする」ことに基づく実無限列の生成には，ヘーゲル哲学における生成発展の考え方がからんでいるように見える。ただおかしいことに，この辺のことに関してカントルはヘーゲルの名を挙げていない[1)]。

もちろんライプニッツやヘーゲルばかりでなく，ここにはエレア学派，プラトン，アリストテレス以来の西欧哲学あるいは神学の流れが，賛否いずれかの形で引用されている[2)]。要するにカントルの集合論創造の背後にはこのような深い思想的背景があり，しかも彼はその中で，実無限を数学の対象として捉(とら)えるという巨大な一歩を，意識的かつ積極的に進めたのである。それかあらぬか，晩年のカントルには神学関係の論文や手紙が少くない。

ここで一つ付け加えたいのは，例の第 4 論文の第 V 報 §8，§10 のことである §8 によると，カントルにとって数学は，一方では現実的世界を解釈すべき一個の理論的構築物であり，他方では「数学の本質はその自由性にある」との面をもっている。そして彼は，いわば経験論的な第一の面と，いわば観念的な第二の面とを，共に数学の現実と認めた上で，その現実の基礎は，われわれがそこに所属する万有の統一の中にあると考えていたらしい。第一の面として，今日の数理科学に広く見られるような，応用数学を現実に関する一個の理論的モデルと見るという考えも，第二の面として，普通にはヒルベルトのものとして

でしばしば問題になる。しかしカントルのこの考えは結局実らなかったと見られる。(Fraenkel, *Das Leben Georg Cantors*, （Cantor 著作集付録）§5.）

1) 例えばカントルは「悪しき無限」というヘーゲルの用語を引用符つきで用いている。しかもヘーゲルに言及しないのは，旧師クロネッカーがヘーゲル哲学に傾倒していたことと何らかのつながりがあったのであろうか。これも一つの推測として触れておく。

2) 現にカントルの引用の中には，5 世紀の聖アウグスチヌス，13 世紀の聖トマス，15 世紀のニコラス・クザヌスを始め，多くの哲学者や神学者の名が現われる。別の論文ではコーシーの実無限論（*Sept leçons de physique générale* 所載，1885）にも言及されている。

知られている純粋学の無矛盾性の要請も，共にこの §8 の中に明記されていることは注目してよい。

§10 は連続体の概念と時間，空間，運動などの概念とに関する吟味で，ギリシャの昔からこのかた，集合論こそが連続体の本質を初めて明らかにしたものであることが主張される。この要旨は，時間・空間・運動などの概念に基づいて連続者を論ずるのは本末顛倒(ほんまつてんとう)で，集合論による連続体という数学的構築物——数学的モデル——こそ，時間以下の三つの概念に対して確固たる基礎を提供するものだという処にある。

『超限集合論の基礎づけ』　数学の理論としての集合論は，彼の最後の第 9 論文『超限集合論の基礎づけ』(1895–1897) の中で，系統的に展開される。次にその全体の構成について簡単に触れる。

§§1–6 では濃度（または基数）が扱われる。すなわち集合の定義（あるいはむしろ説明）があり，一対一対応による濃度の相等，続いて大小関係，和，積，冪(べき)の算法と続いて，有限基数，無限濃度の最小としての可算基数 $\aleph_0$ で終る。§§7–11 では順序型（第 3 章第 1 節）の理論とそれの点集合論への適用が論じられる。また §12 以下では整列集合（すなわち超限順序数）が扱われる。これは濃度と順序数の関係を論ずる重要な場所だが，既に述べたように，その考え方は本質的には第 4 論文と変っていない。それよりも重点は可算順序数（第 2 級順序数とも呼ばれる）の分析にあるようで，§§15–20 がそれに当てられている。

ところでカントルの超限的な数論の世界は，どんな濃度もこの順序数列のどこかに落ちてくれれば一先(ま)ず整理される。後で触れるツェルメロの整列可能定理は，多くの問題を秘めながらも，これに肯定的に答えたものである。また連続の濃度がその列のどこに落ちるか，特に可算基数の次の濃度 ($\aleph_1$) になるか否(いな)か，これが解決できれば，その超限数の世界は一応完全に落着するといってよい。しかしこの問題は連続

体問題と呼ばれ，カントルの悪戦苦闘にもかかわらず[1)]，遂(つい)に彼の手では解決されなった。というよりも，それがいかに困難な問題であったかということは，以下の議論の重要な焦点の一つである。

詳細は別として結論的にいうと，カントルの超限的な数論の世界，従(したが)ってその無限論の世界は，数学の現状に関する限り，彼が当初考えたような統制ある世界ではないことがわかっている。カントルの「実無限」は，この限りでは，今日の公理的表現による「無限集合」の範囲を覆っていないのである[1)]。

3-3．デデキント

デデキントの進路　R. デデキント (1831–1916) はドイツの人，ガウスの審査で学位を得たことで，その最後の弟子と呼ばれるリーマンに接し，またガウスの後継者ディリクレの影響を受けた。19 世紀後半の数学者のうちで，リーマンと共に現代数学に最も影響の大きい人である。しかもリーマンと違って長生きをし，晩年まで研究をつづけたが，地味な人柄で，1862 年以後は 50 年にわたり故郷ブラウンシュヴァイクの高等工業学校の教授に止まった。その主な仕事はすべて学界の中心を離れたこの環境で生まれたのである。

デデキントの研究は数論に始まる。すなわちディリクレの『整数論講義』の整理その他，特に数論，代数学の方面に主な業績があり，この方面での公理的取り扱いの開拓者である，しかし一般には無理数論と自然数論とに関する研究がよく知られているかもしれない。

われわれは前節でカントルの実無限的存在論の意義を強調したが，デデキントはその前から，それとは独立に可算無限集合を数学の中で具

1) ミッターク・レフラー宛のカントルの一連の手紙はその間の事情を示す (Schoenfließ, “Die Krisis in Cantors mathematischen Schaffen”, *Acta Math.* 50, 1927)。

1) もっともゲーデルなどは今でもカントル的集合論の公理的表現の可能性を信じているらしい。竹内外史「集合論的世界像の建設」,『自然』1964 年 8 月号参照。

体的に使っており，一種の集合論を創ろうとしていたことも，遺稿によってわかっている。哲学的傾向の強いカントルの議論に比べて，デデキントの議論の立て方は極めて数学的であり，具体的である。その無理数論——有理数の集合を一つの個体的対象とする——もそうだったが (III–2–7b)，後で触れるイデアル論，自然数論もそうである。特に自然数論では，可算でない無限も一応考慮に入っており，無と有限の区別[1)]，個数の概念などを明確にしている。デデキントはこれを，カントルの理論と独立に考えられていたものと言っており(『数とは何か……』；下記参照)，それはその通りだと思われる。ただし同書の発表はカントルの例の第 4 論文 (1879–1884) より後のことでもあり，そこに何らかの影響を受けた点もあったかもしれない。いずれにせよ，今日の数学で集合が具体的に演ずる役割はデデキントの考えの線上にある。次にその大要を見よう。

イデアル論　この理論は最初，ディリクレの『整数論講義』第 2 版 (1871) の付録として発表された。これに立ち入るには，前章で触れなかった整数論の問題に少し触れる必要がある。

フェルマの大定理 (実は予想) というのは

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{は} \quad n \leqq 3 \text{ とき（正の）整数解をもたない} \tag{1}$$

ということで，17 世紀に彼が証明なしに書き残してから，多くの学者がこれに挑戦したが，今なお完全な解決はえられていない。しかしこれを解く試みの中でいろいろの収穫があり，代数的整数論という分野の成立は，これに深いつながりをもっている。

代数的整数とは，最高次の係数が 1 で他の係数が整数であるような代数方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

1) カントルにはこの区別がなかったとよく言われるが，カントルもその定義は一応与えている。ただしそれは超限順序の考えを前提したもので，（元(げん)を並べるとき一通りの並べ方しかなければ有限さもなければ無限），あまり論理的な定義とはいえない。

の根となる数のことで，大まかに言えば，これに関して普通の整除や素因数分解に相当することを論ずるのが代数的整数論だと思えばよい。

さてフェルマの問題は，式 (1) を因数分解する形から出発して吟味されてきたが，それは結局，代数的整数論の一部を開拓していたのであった。ところが普通の整数論と代数的整数論との間には意外な処に喰い違いがあり，例(たと)えば素因数分解の一意性（いわゆる整数論の基本定理）なども，代数的整数に対しては成り立たないことが知られる[1)]。

デデキントの先輩であるクンマーは，「理想数」(ideale Zahl) という「数」を導入し，（或(あ)る特殊な代数的整数の場合についてではあるが），そこでは基本的定理が成り立つようにした。そして彼はこれを用いて，(1) の n がいくつかの条件をみたす素数である場合について，フェルマの問題を解決した。

デデキントのイデアル (Ideal) はクンマーの理想数からの前進で，代数的整数の一意性の問題を非常にすっきりした形に直し，整数論のみでなく，現代の代数学や幾何学に大きな影響を与えたものである。しかもここには公理論的な形で無限集合が顔を出してくる。

デデキントの議論では，倍数・約数の関係が集合の包含関係で置き換えられる。例(たと)えば 6 が 2 で割り切れることは，6 の倍数の集合

$$\{\cdots\cdots, -6, 0, 6, 12, 18, , \cdots\cdots\}$$

が，2 の倍数の集合

$$\{\cdots\cdots, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\cdots\}$$

の部分集合であることで置き換えられる。

イデアルとは，ここで 6, 2 の代りにあげた集合を一例とする集合のことである。デデキントはこれを，より広い対象にも適用できるよう

---

1) 例えば $x^2 - 2x + 1$ の根 $1 \pm \sqrt{-3}$ は代数的整数で，しかも代数的整数としての「素数」になるのだが，この場合，整数 6 は

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

という二通りの素因数分解ができる。

に公理的に定義し[2)]，それを用いて代数的整数論の基本定理（代数的整数論における「素数」による素因数分解の一意性）を証明し，これがこの方面の学問に新しい道を拓(ひら)いたのであるこの場合，（イデアルという名の）集合を用いたことは本質的である。

自然数論　デデキントが 1888 年に発表した『数とは何か，また何であるべきか (Was sind und was sollen die Zahlen?)』は，今日のいわゆる自然数論の出発を告げる書物である。

自然数の公理的表現としてのペアノの公理はよく知られている[1)]。すなわち

(i)　1 は自然数である。

(ii)　a が自然数ならば，a の後者 a' も自然数である。

(iii)　1 はどの自然数の後者にもならない。

(iv)　$a' = b'$ ならば $a = b$。

(v)　集合 K が 1 を含み，かつ x と共に x' を含むならば，K はすべての自然数を含む[2)]。

以上の公理は，ペアノが 1891 年（デデキントの書物の 3 年後）に発表したものだが，彼はそこで，これをデデキントから得たといっている。論議の正確さの点では，むしろデデキントの方が優れているほどである[3)]。

もっとも，自然数という無限集合にとって最も本質的な性質である

---

2) 加法と乗法の定義された或(あ)る集合（正しくは環 S の部分集合 I が，

$$(1)\ x, y \in I \Rightarrow x \pm y \in I, \quad (2)\ a \in S, x \in I \Rightarrow \Rightarrow ax \in I,$$

となるとき，I を S のイデアルと呼ぶ。），それを用いて代数的整数論の基本定理（代数的整数における「素数」による素因数分解の一意性

1) Peano, *Sul concetto di numero*, 1891. ペアノの原文はその独特の記号法で書かれている。小野勝次・梅沢敏郎訳『ペアノ数の概念について』（1969，共立出版）参照

2) この (5) に現われる「集合」という概念は，もちろんこれらの公理によっては規定されていない。従って後に「集合」の概念を明確に規定しようという試み（公理的集合論）が進行すると共に，この自然数論には意外な不確定性のあることがわかってくる（III–3–8 参照）。

3) 例えば高木貞治『数学雑談』（共立出版）の「自然数論」の章を参照。

帰納法の原理[4] は，既に 17 世紀のパスカルに明確に意識されているのだが，ペアノ・デデキントの自然数論では，（「自然数」が天降(あまくだ)りに持つ性質としてでなく），逆にこれが自然数を定義すべき本質的な性質（上記 (5)）とされたわけである

デデキントの『数とは何か……』の序文は有名である。すなわちそれは，「証明できることは科学においては証明なしに信ずべきでない」という言葉に始まり，結論的に「数の概念を，空間，時間の表象または直観には全く依存せぬもの，むしろ純粋な思考法則から直接に流出するもの」とする立場を取ることが表明される。そしてその標題に対する端的な答として，「数とは人間精神の自由な創造であり，ものごとの相違を，より容易にかつ敏感にとらえるための手段」だということが示される。この意味で，彼は数学基礎論における論理主義（後出）の祖と考えられている。

この書物は「要素の集まり (System)」という節で始まる。最初に「ここで言う「事物 (Ding)」とは，われわれの思考の対象となるもの」であることが述べられ，続いて，相異なる事物を一つの共通な見地でまとめて考えるとき，それを集合 (System) と呼ぶと共に，「集合はわれわれの思考の対象として，また一つの事物である」ことが述べられる。また集合の部分集合の定義も与えられる (§1)。

ところがこのさりげない表現の中には，今日の集合概念の使われ方の真髄が秘められているのである。というのは，事物の集合，その部分集合，その部分集合全体の集合，或(あ)る事物や或(あ)る部分集合を含む集合，この型の集合の集合，そのまた集合，……などと，この理論のすべての対象が「集合」の一色で捉(とら)えられているからであり，しかもこのことこそ，現代数学に見られる集合一元論的な様相を支える最初の

4) 性質 P が，(i) 1 に対して成立し，(ii) 自然数 n に対して成立すれば $n+1$ に対しても成立する；この二つの条件があれば，P はすべての自然数に対して成立する。

宣言のようなものだからである[1)]。

連　鎖　カントルの集合論では，集合の濃度の比較その他で一対一対応の概念が基本であったが (III–3–1)，デデキントの場合にはむしろ，一つの集合 S の，自分自身の中への相似写像という考えが基本である。

集合 S の元 S と集合 T の元 t との一対一対応 φ を，デデキントは相似写像と呼ぶ。すなわち

$$\varphi(s) = t,\ s \in S,\ t \in T$$

が，

(1)　S の相異なる 2 元 $s_1,\ s_2$ の像 $t_1,\ t_2$ がまた相異なり，

(2)　T のどの元にも，その相手 (原像) が S の中に必ずある，

という場合のことである。彼はこのとき S と T とは相似であると名付けているが，特に T が集合として S の部分集合であるときの φ が，自分自身の中への相似写像である。例(たと)えば自然数全体の上で定義された写像 $y = 2x$ を考えると，その像の全体は偶数全体であり，もちろん相似写像になるから，これは一つの自分自身の中への写像である (同書 §§2–4)。

さてデデキントは，広大な無限集合 S を頭におき，それと，そこで定義された自分自身の中への相似写像 φ とを用いて，自然数の全体に当るものを抽出しようとする。それは大略次のような形で行なわれる。

まず集合 $S_1 = S$ に対して，$S_2 = \varphi(S_1)$ が S_1 の真部分集合であるとき，$S_1 - S_2$ の元 a_1 に着目する。$a_2 = \varphi(a_1)$ と置くと，a_2 は S_2 には入り，$a_1 \neq a_2$ となるが，相似写像の性質によって，$S_3 = \varphi(S_2) = \varphi(\varphi(S_1))$ には入らない。同様にして $a_3 = \varphi(a_2)$ は S_3 には入るが，$S_4 = \varphi(S_3)$ には入らない……。ところで φ は与えられたもの，すなわち S の各点

1) デデキントの無理数論では，有理数全体からなる集合 R の二つの部分集合，下組 A と上組 B が取られ，A，B を元とする順序対 $< A, B >$ として実数が定義されている。順序対の定義によると，一つの実数は，集合 $\{\{A\}, \{A, B\}\}$ ということになる

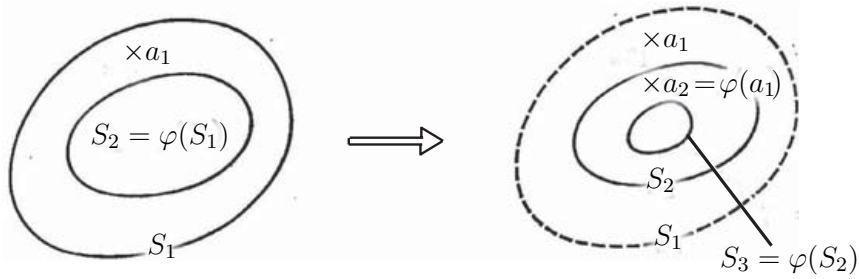


図 3-1

で既に定義ずみの対象と見られるから，その像として a_1 に始まる列：$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ という部分集合 N を取ることができる。そこでこれに注目し，元来の S にあった様々の性質をすべて考えないことにすると，それこそ（順序数としての）自然数に他ならない。

S の部分集合 K が（例えば先の S や N ように）$\varphi(K) \subseteq K$ となるとき，K は連鎖（kette）と呼ばれるが，ここで使われた考え方は後にツェルメロの整列可能定理の証明の原型となったのを始め，全般的に影響の大きいものである。ともかくデデキントは，この余計ごとを捨象して骨組だけを考える処をもって，自然数が「人間精神の自由な創造」であることを，ここで再び強調している（同書 §6）。また彼の或(あ)る手紙 (1890) によると，この考えは自然数が自然に立ち現われてくる過程を再現するつもりで考えられたものであるらしい[1)]。

さて彼はこうしてできた順序数的自然数について，ペアノの公理に相当することを始め，個数の概念やその大小の概念を導入して，これに基数としての性質を持たせ（同書 §7），自然数の基本的性質を次々に導いていく。特に四則算法 (§§11–13) の導入は慎重な一般論 (§§8–10) の上に組み立てられていて，非常に示唆(しさ)的である。先にデデキントの自然数論がペアノのものに勝るといったのは，このような点についてである。

1) デデキントのケフニルシュタイン宛の手紙。

有限と無限の定義　前項で自然数を定義した際，無限集合 S を天降(あまくだ)りに持ち出したような形になった。しかしデデキントの論理的な立場からいうと，このような議論は妥当ではない。そして実際，彼は自然数の抽出に先立つ §5 で有限と無限の区別を一般的に論じ，更(さら)に最後の §14 で，それまでの成果の上に有限集合の要素の個数についての議論を行なっている。ここでは特に §5 について触れておく。

デデキントによる無限と有限の区別は，これも自分自身の中への写像によって行なわれる。すなわち「集合 S が自分自身の真部分集合と相似であるとき，S は無限集合であるといい，さもなければ有限集合であるという。」なお，註によると，彼は 1882 年にこれをカントルに伝えたという。また有限と無限とを区別するのに，これ以外の道はまずないだろうし，先に有限集合から論じようとすると，とてもむずかしくなって，手がつけられない，という意味のことを言っている (第 2 版序文)。

ところでデデキントの立場からいうと，これでもまだ議論は完全ではない。そこにいう無限集合 S のようなものが果して存在するかという点が問題だからである。そこで彼は「無限集合は存在する」という「定理」を「証明」する。いわく，私の思考の世界 S は無限である；何故なら思考の対象 $s(\in S)$ に対して，「s が私の思考の対象だ」という思考 s' はまた S の要素である；この s' を $\varphi(s)$ と見れば，これは相似写像であり，しかも S の φ による像の全体 S' は，S の部分集合だが，S の中には S' に入らぬ要素，例(たと)えば，「私本来の我 (mein eigenes Ich)」が存在しているからである。

この証明は多少風変りだが，ともかくも，これで出来ていると見る人もあるかもしれない。しかし実は肝心のところが抜けていて，論理のみに拠ろうとしたデデキントの自然数論の (恐らくは) 唯一の抜け穴になっている。というのは，無限過程の形である S を単一の対象とし

て把(つか)むことこそ，「無限集合の存在」を支える要石(かなめいし)のはずなのが，その点に言及されていないからである。なお，この点についてツェルメロに始まる今日の公理論的集合論では，「無限集合存在の公理」として初めに要請されることになっている。

デデキントにおける無限　イデアル論以下ここまでの間のデデキントの議論では，（無数の集合の共通部分を取るというような，公理論の中に含まれる潜在的内容としてはともかく），具体的に取り上げられている無限者は可算集合の周辺に限られている。これは注目に値する事実である。デデキントにおける集合概念には，カントルの広大深遠の哲学とはまた別の数学的透明さがあるが，その一つの理由はこの点にあるかもしれない。

そういえばデデキントはあるとき，集合を，或(あ)る定まった存在者を納めた袋に譬(たと)えたことがあったが，それを聞いたカントルは必ずしもそれを喜ばず，自分はむしろ集合を深淵のようなものと思うと言った由である[1)]。またそれより先，デデキントは 1877 年 7 月のカントル宛の手紙の中で，n 次元空間の無理点と 1 次元直線の無理点との一対一対応が連続性をもっていない事情を論じたとき，「不気味で目まいのするような不連続性がその中に介入してきて，その対応は一切を原子に解体し，一つの空間のどんな小さな連続的成分も，その像においてはバラバラの不連続になってしまうように思える」という意味のことを言っている。その「目まい」を押し切って深淵の底をのぞいたカントルと，（少くとも数学的展開に関しては）その手前で踏み止まったかに見えるデデキントと，そのいずれを取るかは人それぞれの考え方であろうけれども，ともかくここには，無限概念への対処の仕方について，二人の間にかなりの開きがあったことが認められよう。

数論的関数　デデキントはまた，自然数の形成と同じ系統の考えを

1) E. ネーターの回想による。

用いて，数論的関数，すなわち自然数全体の上で定義され，値としても自然数を取る関数が定義されるとは何か，ということを吟味している（『数とは何か……』§9）。これは今日の数学基礎論などに現われる帰納的関数[1]の一つの発端である。

デデキントは，数論的関数 $y = \varphi(x)$ が定義されるとは，自然数 x の値が与えられたとき，自然数 y の値を算出すべき方法が「有限回の手続き」で決められるようになっていることと見なし，その「有限回の手続き」を，数学的帰納法と同型の繰返し的方法を用いて巧みに表現している。彼が四則などの算法を定義するのはこの方法によるのである。

なお，数論的関数が定義されるという場合，何も x, y 間の関数表が（実無限的に）書き上げられていなくてもよく，x や y の値が与えられてから，有限回の操作で答を出せばよいという点は重要である。そしてこれには当然，数論的関数の定義域が，帰納法の公理に従う自然数であることが本質的に利（き）いている。これに反して，同様の方法で実数や複素数の上で定義された関数を取り扱うことはむずかしい。実数は繰返し法の流儀で定義できそうな対象ではないからである。これはこの両種の関数の最も大きな違いであると思われる。

---

1) 数論的関数 φ は，$\varphi(1)$ の値を与え，次に既知関数 $\theta(x)$（最も簡単なものは，x に対して後者 x' をとる関数）を用いて $\varphi(n') = \theta(\varphi(n))$ と定義することによって一意的に定まる，これは「繰返し法」というものの標準的な形である。例えば加法 $m + n$ は，(i) $m\underline{+1} = m'$，(ii) $m\underline{+n'} = (m + n)'$ とすれば一意に定まる。（初等）帰納的関数とは，(i) x の後者をとる関数 x'，(ii) n 変数関数として自然数 k をとる定数値関数，(iii) n 変数 $x_1, x2, \ldots, x_n$ の一つ x_i を指定する関数，の三種を基本関数とし，帰納的関数 $\varphi(y_1, \cdots, y_n)$ に帰納的関数 $y_1 = \varphi_i(x_1, {}_2, \cdots, x_n)\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ を代入することと，上の「繰返し法」ないしその n 変数の場合への拡張とを反復適用することによって得られる数論的関数である。

3-4　公理的集合論とフランス経験主義

現代数学の無限論において，カントルとデデキントの役割は共に極めて大きいので，これについては詳しく述べたが，このあとはやや大づかみに話を進める。

無限論に伴う混沌　カントルがその集合論の数学的体系を完成するについて，そこに残された大きな問題が二つあったことは既に述べた。すなわち濃度比較の問題と連続体問題である。これらが都合よく解決すれば，集合論は（おそらく万有の統一の背景の下に），美しい体系を整えて完成するはずであった。しかし事は必ずしも彼の志（こころざし）に添わず，この後，今日に到るまでの集合論あるいは数学的無限論の歴史は，集合論の内容を明確に規定しようとすればする程，その内容の中に意外な曖昧さが残ってくることを示している。もちろん，人間という「有限」的存在の組立てる「無限論」には，徹底を欠くところが本質的，必然的に伴うのかもしれない。またそうでないまでも，「無限集合」に対する今日の公理的表現には，なお多くの重大な不備があるのかもしれない。その辺に問題はあるけれども，ともかく少くとも私には，無限論の世界にはつねに或（あ）る種の混沌「深淵」の支配する領域が避けられぬように思われる。この点だけから見る限り，現代数学は，悲観的に言えば噴火山上の踊りと言えなくもない。以下の本章の内容は，その意味では，カントル的理念の歩んだ幻滅への道の歴史と言えるであろう。

もっとも，早速断っておくが，現代数学一般は，まず今考えているような「無限」の辺境地帯にまでは立ち入らなくてもすむので，それはそれなりに落着いている。しかもその成果は極めて深遠多彩である。この面からすれば，噴火山上の踊りというのは，実は杞人（きじん）の憂いとすべきであろう[1)]。

---

1) コーヘンの『連続体仮説』（近藤基吉・坂井秀寿・沢口昭聿訳，1972，東京図書）

濃度比較の問題と選択公理　連続体問題のことは後にまわすとして，濃度比較の可能性に関する問題は，1904 年にツェルメロによってひとまず証明された。ただその際用いられた選択公理という公理は，当時，その妥当性をめぐって非常な論議を呼んだ公理である。公理なるものが必ずしも絶対的真理とは言えないという例が，非ユークリッド幾何学の例に続いて，ここにもまた生じたわけである。

選択公理というのは，「集合 S の空でない部分集合のおのおのから，その一つの元を（代表として）特記することができる」ことを明記した公理である。これを認めると，どんな集合も整列集合の形に直せることが証明される。

その証明は，デデキントが無限集合の中から自然数列を取り出した連鎖の考えの線に沿って，大要次のような形で行なわれるすなわち，S の最初の元として，S の代表元 a_0 を取る；次の元として，S の部分集合 $S-\{a_0\}$ の代表元として決まっていた a_1 を取る；……；この手続きをどこまでも続けてできる列 T が必ず整列集合であることは，もちろん証明される；列 T が，集合として S と一致しない間は，$S-T$ の代表と決っている元 a を T の後に追加すれば T は更（さら）に延びるから，結局 S はこの列によって尽されねばならない。ところが整列集合の順序型はそのまま順序数であり (III–3–1)，これはつねに比較可能であるから，結局ここに濃度の比較可能性は証明されるわけである。

ツェルメロの議論の大筋は以上の通りだが，特にこの公理でいう代表元について，数学者の間に多くの議論が生じた。すなわちそれは，S の空でない各部分集合 X に，X の一つの元 x を「対応」させることであり，してみると（定義の領域が S の部分集合の集合になっている点で

の中にも，"あらゆる数学的直観は，数学的普遍類という自然的な，ほとんど物理的ともいえるモデルの存在に対する確信からきている"という言葉が見える。コーヘンの仕事については III-3-8 参照。

意味は多少広くなっているが)，昔なじみの「関数」の一種である。そこでそれが何らかの全体的な公式表示をもつべきか，それとも全体的統一のない，ただの原子論的対応でよいとするかは，確かに問題となりうることであった。今日ではこれは，そのような関数 (選択関数) の存在を要請する公理と解するのが普通である。

フランス経験主義　この論争において特に注目すべきは，フランスの E. ボレル (1871–1956) を中心とする二三の数学者からの批判である。この立場は下記のような意味で，しばしばフランス経験主義と呼ばれる。

ボレルは初期のカントルの集合論を，関数論，測度論，積分論，あるいは確率論などに応用して，多くの成果を挙げた学者であるが，それにしても，カントルが連続の濃度を超えて理論を展開するのに対しては，はじめから懐疑的であった。例えばカントルが濃度 $\aleph$ の集合 A の部分集合の全体からなる集合 (2^A) は，$\aleph$ より大きい濃度 $(2^{\aleph})$ をもつとか，可算順序数 (第 2 級順序数) の「全体」の濃度は ($\aleph_0$ の次の) $\aleph_1$ であり，濃度 $\aleph_1$ なる整列集合 ($\aleph_1$-順序数) の「全体」の濃度は $\aleph_2$ であり，……と論ずるのに対し，ボレルの方は，可算濃度 $\aleph_0$ と連続の濃度 $\aleph$ とまではともかく，連続の濃度の集合の部分集合の「全体」とか，可算順序数の「全体」などは，人間の思考範囲を超えるものであり，むしろ内容のない一般論だとして，それに深い疑いを示していた。そこへ出て来たのが，ツェルメロの「どんな (濃度の) 集合も整列可能」という議論だったから，ボレルがその議論を，内容空疎な抽象論として責め，ひいては，その「可能」性を支える選択公理を攻撃したのも，当然の成り行きであった。更にツェルメロの議論に連続体問題を解く力のなかったことも，その説得力を弱くする点であった。ツェルメロの証明の発表された年の暮までに，ツェルメロ支持のアダマールと，それに反対するボレル，ベール，ルベーグの間で，5 通の手紙が交換され

公表された。これは「集合論に関する五つの手紙」として有名である。

ところが，よく調べてみると，選択公理は無限を厳密正確に論ずる際，ほとんど到る処に現われるものであり，現にボレルでさえその議論の中で無意識にそれを使った例のあることもわかってきた。しかしボレルはそれでも選択公理を一般に許容する方向へは進まなかった。むしろその公理のなくてすむ範囲に集合論を限定し，彼がそれだけは認めている可算集合を中心とし，連続の濃度と可算順序数全体の濃度とをいわば世界の果てとする舞台の上に，一種の集合論を作ろうとした。もちろん彼はそれを，その念頭にある「数学」のために役立つものとして整備しようとしたのである。

そもそもボレルに言わせると，数学が真に成果を収めるのは，数学と経験的世界との間に緊密なつながりが認められる場合であり，その意味で，例(たと)えば選択公理でいう対応——選択関数——なども，より具体的，個体的でなくては困るというのであった。しかし実際問題として，カントル的集合論の中に見られる存在と論理の一体的関係とか，デデキント的集合理論の中に見られる集合概念による構成などは，理念的世界としての数学を単純明快にし，ひいては或(あ)る意味での経験的世界への効果も生み出してくれる強力な推進力である。そしてその力をどこかで制限しようとするボレルの努力は，かえって理論の透明度を下げることになりがちであった。

こうした次第で，ボレルの「集合論」は結局その本来の目標に達しなかったと言ってよいが，その半面，それは測度論，ルベーグ積分論 (III–4–2b)，ルージンの解析集合論 (III–3–8) などという新しい理論を生む原動力となり，また (可算確率の概念の導入などによって) 確率論に新しい道を拓く力ともなった (III–4–3d)。これらの理論，特に解析集合論は，その独特の視野から連続の本質に迫ろうとしたものであって，後のゲーデルの仕事などにも影響を与え，ひいては今日の数学基

礎論の上にも多くの示唆(しさ)を投げかけている。

更(さら)にまた，ボレルの数学の現実でなく，経験的世界と数学的世界とのつながりを強調するその哲学の方は，一見，ボレルの数学より遙(はる)かに一般的，抽象的な現代のブルバキの数学にも，理念として潜在しているように見える[1)]。

クロネッカー主義　ここで少し前のことになるが，カントルの旧師であり，やがて集合論反対の急先鋒となったクロネッカー (1823–1891) のことに触れておく。この人はワイエルシュトラス (1815 生) とデデキント (1831 生) との中間の年代の人で「整数は神の創り給いしもの，その他はすべて人間の仕わざ」というその有名な評語はよく引用されるものである。クンマーの後を追って整数論に大きな足跡を残し，デデキントのイデアル論に一応吸収されたとはいうものの，その方面の仕事は無視すべきものではない[2)]。

ところがこの人は，解析学，幾何学，その他一切の数学を自然数論化すべしとする強い主張を持っており，一見それと似ていそうに見えるワイエルシュトラスの解析学の数論化に対してさえ，そこに無限数列などが現われる点を衝いて烈しい批判 (むしろ非難) を投げかけていたのであった。要するにクロネッカーによれば，無理数一般などという，整数論の物差(ものさ)しをはみ出る対象は，すべて整数論化してしまうか，さもなければ数学の邪道として排除するか，どちらかでないといけなかったのである。ワイエルシュトラスがその議論にうんざりした様子は，その手紙の中に残されている[3)]。カントルがクロネッカーの非難に悩まされたのも当然だったわけである。

---

1) ル・リヨネ編，村田全他訳『数学思想の流れ』(1974，東京図書) 所収の，ボレル，ブルバキの各論文，『ブルバキ　数学史』所収の拙稿「訳者覚えがき」などを参照。
2) 高木貞治の有名な類体論は，直接には「クロネッカーの青春の夢」と呼ばれる代数的整数論の問題に答えたものである。
3) 例えば小堀憲『大数学者』(1968，新潮社)。

クロネッカーは「対応」——関数——についても，もちろん数論的に明確な表現を要求していた。そしてそのことのため，ボレルたちの意見はまた「クロネッカー主義」的と呼ばれることがある。ただ上記のことでわかるように，ボレルの主たる対象は解析学であり，必ずしも数論的厳密ばかりを要求したのでない上，少くとも可算集合は許していたから，その「クロネッカー主義」はかなり弱められたものと見ねばならない[1)]。

公理的集合論　ボレルの批判以外にも選択公理に対する批判はいろいろあったが，もちろんツェルメロの方もそのまま沈黙したわけではない。彼はそれらに答えて，1908 年，集合論を公理論的に表現する試みを発表し，更(さら)にその理論によって，改めて整列可能定理を証明してみせた[2)]。この公理的理論は，より直接には，次節で述べる集合論のパラドクスへの対処を直接の目標にしたものだったが，それにしても，従来，人びとの暗黙の諒解に頼る気味のかなり強かった集合論は，ここに初めて一つの客観的な表現を持つこととなる。集合論はここで名実共に本当の数学的理論となったといってよいであろう。

もちろんボレルの批判は公理そのもの，あるいはむしろその理論体系全体への批判だから，こうなったからとて特に変ったわけではない。しかしそれはそもそもツェルメロの世界とは別の世界のものであり，一方，数学界全体の動向は，少し前のカントルの時代と事変り，すでにカントル=デデキント=ツェルメロの線の方へ進んでいたのである。

---

1) ボレルの仲間の一人である R. ベールは，ボレルより一段とクロネッカー的で，「すべては有限に立ち返るべきだ」という意見をもって集合論に臨んでいた。一方ルベーグは，より柔軟で，カントル=ツェルメロの線に近かった。

2) 1）外延性公理（集合の相等性），2）空集合の存在公理，3）分出公理（集合の部分集合の，命題関数による定義），4）冪集合の公理（集合の部分集合の全体），5）和集合の公理（集合の集合 M に対し，M の各元の元の全体），6）選択公理，7）無限集合の存在公理の 7 項からなる。赤摂也『集合論入門』（培風館），本講座第 11 巻，竹之内脩『集合・位相』などを参照。

（これにはヒルベルトやラッセル，特に前者の影響が大きいと思われる。）

もっとも，ツェルメロの公理的集合論には，なお多少言い足りない処があった。というのは，カントルの集合論の茫漠（ぼうばく）たる表現の中では作られてもよい大きな濃度（もちろん次節で述べるような危険なものではない）が，そこでは表現できなかったからである[1)]。しかしその点は，やがてフレンケルその他の人の手によって修整整備された（ツェルメロ＝フレンケルの公理的集合論）[2)]。またそれとは別に，ツェルメロのものとは少し違った角度からの公理化が，フォン・ノイマン，ゲーデルその他の人びとによって幾つか試みられている。ゲーデルの公理系については，やがてやや詳しく触れるであろう。

こうした研究の結果，今日では普通の数学上の目的にかなう集合論の体系はでき上っているといってよい。ここで「普通の目的にかなう体系」というのは，それが現代数学の全体を構成する基盤となるのに，まずまず十分であり，さらに（その体系の中から矛盾の 生ずる可能性のないことを，理論的に保証することこそできていないが），今日まで人びとに知られている程の矛盾が出ない程度の処置はしてある，というような意味である。

また特に選択公理に関しては，より説得的で使いやすいツォルンの

1) ツェルメロはカントルの著作集の編者だが，その集合論第 4 論文第 V 部（論文集 p.199）に註記し，カントルの原理の下では比較的低い濃度の超限数しか得られないことを述べている。しかしカントルの元来の考えは，その記述の曖昧さのために，より広範囲の濃度を含む解釈を与えうる余地があると思われる。カントルの無限のイメージがどれ程の大きさのものだったかは，カントル自身にもわかりかねたことではあろうが，一つの問題として指摘しておく。

2) ツェルメロの最初の公理系（前註）によると，$\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_n, \cdots\cdots$ が得られたところで，$\aleph_0$ の存在を保証する術がなかった。フレンケルは置換公理という公理を導入することによって，この種の障害を克服した (1922)。なおこの公理をおくと，分出公理は不要になる。Fraenkel, *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, 1927. Bernays-Fraenkel, *Axiomatic set theory*, 1958（フレンケルによる “a historical introduction” あり），H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen– - Werk und Leben Georg Cantors*, 1967 .

補題 (1953) という形のものが案出されたため（ツォルン；ただしその前にクラトウスキも同様のことを発表したことがある）[3]，今ではすでに数学者の社会における既成事実 3– のようになった感がある。

なお，上で括弧の中に註記した，矛盾の生ずる可能性のないことを理論的に証明することは，まことに困難を極める仕事であって，そこにどれ程の原理的困難が潜んでいるかについては，本章の後半で簡単に触れる。

3-5．集合論の逆理

無限と逆理　例の連続体問題は晩年のカントルを大いに悩ませた問題だが，実はその悩みの種はこれだけではなかった。すなわち集合論の中にいくつかの深刻な矛盾が発見された事件がそれである。これはデデキントや，それと似た傾向にあったフレーゲなどにも大きな衝撃を与えた。それらの矛盾は逆理あるいは二律背反（ディレンマ）[1] の形で提起されたので，普通はこれを集合論の逆理と呼ぶ。

無限者を一個の完結した対象と見ることが逆説的だというのは，実は，特に改めて言わねばならぬほど異常なことではない。現にボルツァーノはその著に『無限の逆説』という標題をつけ，無限は元来，逆説的な対象だから，このような主題を扱うのだと述べている (III–2–7b)。また，より古く，ガリレイは自然数の全体と偶数の全体とが一対一に対

3) ツォルンの補題と呼ばれるものにはいくつかの形があるが，その一つを（説明ぬきで）例示しておく：「順序集合 M の任意の整列部分集合がつねに上に有界であれば，M は少くとも 1 つの極大元をもつ」。なお p.156 の第 4 脚註引用のものの他，中山正『集合・位相・代数系』（至文堂），彌永昌吉・小平邦彦『現代数学概説 1』（岩波書店）などを参照。

1) 逆理または逆説とは，一見まことに自然な議論によって得られる結論でありながら，常識あるいは真理と背反するものを言う。一方，同一の根拠から，両立しえない二つの結論が導かれるのは，いわゆる二律背反であるが，これもしばしば逆理と呼ばれる。

応することを示して，無限の逆説性を指摘している程である[2)]。

けれども，例(たと)えばガリレイの示した程度の「逆説」は，カントルやデデキントにとっては百も承知のことで，むしろ彼らはその事実を積極的に用いて集合論を築いたのであった。現にデデキントの無限集合の定義——全体と真部分集合が一対一に対応する集合——はそうなっている。

それよりも，今回の問題の一つの大きな源(みなもと)は，「もの」と「ものの集り」とを等しく「もの」集合と見る処にあった。そしてそうだとすれば，これがカントル=デデキントの理論体系の根底をゆるがすものであったことは，改めて言うまでもないであろう。

ブラリ‐フォルチの逆理　集合論の逆理で最初に注意されたのは，「超限順序数全体の集合」という概念に伴う逆理で，ブラリ‐フオルチの逆理と呼ばれる[1)]。

$0, 1, 2, \omega, \omega+1, \cdots\cdots$ と並ぶ超限順序数列については既に述べたが (III–3–2)，この列の成り立ちには次のような顕著な特性が見られる。すなわち各順序数 α は，0 以上 α 未満の順序数のなす列の順序型（これは整列集合なので実は順序数である）になっていることがそれである。実際，0 の手前は空集合，1 の手前は 0 ただ一つ，ω の手前は自然数全体の列，という具合である。言いかえれば，新しい順序数（例えば ω）が付け加わるごとに，そこに新しい順序型が生じ，それが実は次の順序数（ω に対する $\omega+1$）なのだというわけである。

さて超限順序数列のこのような特徴を頭においた上で，「超限順序数の全体」を一個の対象と見なすとすると，それ自身が整列集合になっ

2) ただしガリレイの議論は，集合論を先駆するような数学的議論というより，運動論あるいは自然哲学を目的としたものであり，例えば物質と真空の関係のむずかしさなどを説くための譬え話のようなものである (II-4)。

1) ブラリ‐フォルチがこれについて述べたのは 1897 年だが，実はそれ以前にカントルもヒルベルトへの手紙の中でこのことを述べていた (1895)。

ているため，それを $\tilde{\omega}$ と書くことができる。ところが $\tilde{\omega}$ はその列の元のどれよりも大きい超限順序数となり，「すべての」超限順序数を集めたという前提に矛盾する。これがブラリ‐フォルチの逆理である。

ラッセルの逆理　超限順序数の全体に関するこの逆理（および濃度に関して生ずる同様の逆理）については，カントル自身も知っていたのだが，彼はこれを，集合論を危地に追い込むほどのものとまでは考えていなかったらしい[1)]。ところがその後，同じような矛盾が次々に発見され，それと共にこの事態が改めて深刻に考え直されるようになった。その代表的なものの一つにラッセルの逆理がある。しかも厄介なことに，それは，対角線論法を一般化した定理の「証明」を分析することによって，見出されたのであった。

対角線論法の一般化とは，集合 M の濃度 $|M|$ と，M の部分集合の全体 P の濃度 $|P|$ との間に，$|P| > |M|$ の関係のあることを示すもので，その議論の次のようになる。P の部分集合の中に，M の全体と一対一に対応するものはあることはすぐわかるから[2)]，$|P| \geqq |M|$ であるのは確かである。そこで $|M|$ と $|P|$ との間に一対一対応ができたと仮定して矛盾を導くことができれば，証明は終る。いま P の元 $N(\subseteq M)$ に，M の元 m_N が一対一に対応すると仮定する。ところがその際 $m_N \in N$ となる N もあれば（例：N が M 自身である場合），$m_N \notin N$ となる N もある（例：N が空集合の場合）。前の N を第 1 種，後の N を第 2 種と呼ぶことにして，第 2 種の N に対応する m_N の全体 N' を考える。

1) カントルはデデキント宛の手紙 (1899) の中で，この種の「全体者」を「絶対的（実）無限者」または「矛盾ある多者 (inkonsist Vielheiten)」と呼び，これを自分の理論の範囲外のもと考えていた。実際，「絶対的実無限者」は神に帰するべきものであり，集合論の対象は「人間精神の中にありうる実無限者」であって，後者は前者に支えられるのだ，というのが，彼の 1883–85 年ごろからの基本的な考えだったからである。

2) Pの部分集合として，Mの部分集合でMの一つの元からなるものの全体を考え，部分集合 $\{m\}(\in P)$ に元 $m(\in M)$ を対応させる。

P と M とが一対一に対応するとの仮定から見ると，M の元で N' に対応するもの n'' がなくてはならない。しかし，まず $n' \in N'$ と仮定すると，（N' の定義からいって）$n' \notin N'$ となって矛盾に陥いる；次に $n' \notin N'$ と仮定すると，（やはり N' の定義からいって）$n' \in N'$ となるはずで，これまた矛盾に陥る。そこで P と M とが一対一に対応するという仮定は捨てざるを得ない。すなわち（第 3 章第 1 節で与えた定義によって）$|P| > |M|$ である。

さてラッセルは集合概念そのものについて，これと同じようなことを考えた。すなわち，集合の中には，自分自身を元とする（という奇妙な）ものがある。（例：自然数でないものの全体 M．M 自身も自然数でないから $M \in M$））これを第 1 種の集合と呼ぶ。またそうでない（普通の）ものもある。これを第 2 種の集合と呼ぶ。この二種類は，「集合」なるものを，明確に二分するはずである。

そこで，第 2 種の集合の全体からなる集合 R は，第 1 種であるか第 2 種であるかを考える。まず R を第 1 種（$R \in R$）であるとすると，R の元である R は第 2 種でなくてはならない，次に R を第 2 種（$R \notin R$）であるとすると，この式は，R が第 1 種であることを示している。これはいずれも矛盾であり，してみると，R は第 1 種でも第 2 種でもありえないことになる。

逆理のもたらしたもの　集合論の逆理には，後で触れるリシャールの逆理のように，以上の二つなどとやや違った型のものもあるが，ともかく，人びとの間に，集合論は数学全体の基礎である，という考えが浸透し始めたこの時期に当って，このような矛盾がいくつも発見されたのは，数学者にとっても，数学に関心のある哲学者にとっても，非常な衝撃であった。すなわち前に触れたように，デデキントは『数とは何であり，また何であるべきか』の内容に不安を感じてその増刷を見合せ，フレーゲ (III–3–1) は，それと同じ傾向の書物で既に用意の出

来ていた『数論の基礎・第 2 巻』の出版を取りやめた。要するにこれらの逆理は，数学の真理性そのものへの根本的不安に直ちにつながる問題として意識されたのであった。

しかしその後いくらか事態が落ち着いてくると，具合の悪いのは集合論の体系の全部ではなく，集合という概念の吟味に不足なところがあったためだろうというように，人びとの意見は変ってきた。

前節でも触れた通り，公理的集合論にしても，ブラリ‐フォルチ，ラッセルその他のパラドクスを生ずるような「危険」な集合が，「集合」概念の中に入り込んで来ることを排除するのが，そもそもの目的だったのである。問題はその出来ばえであるが，もちろんその一応の目的は達せられている。（さもなければ，今日まで残るはずがない。）しかし，より厳格に言って，その公理系にいかなる矛盾も現われないかと問われると，その保証までは与えられていない。そして学問の現状からいうと，やがて示すように，その保証の得られる望みはほとんどないといってよい。またそれとは別に，そこでいう「公理」が，「集合」とはかくあるべしという根本的規定から導き出されたものというよりは，現実の集合論と現実のパラドクスとをにらみ合わせつつ得られたという態の，いわば原因療法でなく対症療法であった点も，欲を言えば，もの足りないことである。これらの点についての，数学の真理性への吟味を含めた，なお一層深刻な反省こそ，次に述べる数学基礎論の問題になる。

3-6．数学基礎論の誕生

(a) 論理主義

ラッセルの『数学の原理』 ラッセル (1872–1970) は前項で触れたような根本的反省を（次に述べるヒルベルトと共に）最も早くから始めた人

である。その考え方はデデキントと同系統のもので，数学の原理はすべて論理学の原理（自同律，矛盾律，排中律[1]）および集合と論理の関係に解消できると見，その線に沿って数学の全体系を公理論的に再建しようとした。彼の主張は論理主義と呼ばれる。

もとよりそれは大変な仕事で，例（たと）えば数，図形，関数，そして集合などの諸概念が，すべて論理学の原理に帰着できることを示さねばならない。当然，集合概念——存在と論理とのつなぎ役——はその考察の基礎であって，しかも逆理の生ずるような構成は是が非でも避けねばならない。そこで集合という対象と，それの要素たる対象とを，対象の型（タイプ）の違いとして区別する方針が取られた（型の理論）。こうすると，例（たと）えばラッセルの逆理における「集合」R についても，$R \in R$ か $R \notin R$ か，などという問いは意味を持たなくなり，その逆理の発生は予防できる。しかしその副作用として，デデキント的集合理論のもっていた強力かつ単純明快な特徴が失われることも避けがたい。

ラッセルは，数学に関心の深い哲学者である友人ホワイトヘッドと共に，その仕事に打ち込み，『数学の原理』（*Principia Mathematica*）という三冊の大著を仕上げた (1910–13)[1]。当時，彼は個人的にいろいろ苦しい立場にあったのだが，その仕事に全力を捧げ，それが完成したときには精根尽き果てた感じで，そのあと数学的創造の仕事を離れたと，自伝で述べている[2]。

そのような努力の末に成ったものではあるが，前記の通り，それは数学を意外に繁雑化する結果となり，今日の立場からいうと，せっかくのデデキント的理論構成を放棄する形になった。しかもそれを緩和す

1) 簡単にいうと，これらはそれぞれ，「A ハ A デアル」，「A ハ，B カツ非 B デハアリエナイ」，「A ハ，B カ非 B カノイズレカデアル」と言い表わされる。もっとも，哲学的には，なおいろいろの問題がある。

1) vol. 1, 1910 ; vo1. 2, 1912 ; vo1. 3, 1913. また第 2 版は vo l, 1925 ; vols. 2–3, 1927.

2) 日高一輝訳，バートランド・ラッセル『自伝』第 1 巻（1968，理想社）。

るためにおかれた還元の公理[3]などは，ラッセルの基本方針を裏切って，論理の法則から導ける態のものでないことが判明した。またデデキントの場合と同様・無限集合の存在公理も，むしろ存在要請であって，論理の法則に帰着できるものではなかった。

これらのこと，特にその体系の複雑化という実際上の障害のため，ラッセルの努力は一般の数学者にさほど歓迎されなかったようで，この本を読み通したのは，世界中でラッセル，ホワイトヘッド，それにゲーデル（後出）（だったと記憶する）の三人だけ，というような逸話さえあるほどである[1]。しかしその反面，この本での精密な分析結果は，次に述べるヒルベルトの仕事をはじめ，その後のいろいろな研究の中に取り入れられていることは断っておかねばならない。

(b) 形式主義

ヒルベルトの幾何学基礎論 今日の基礎論に対して，ラッセルの論理主義よりも影響の大きいものはヒルベルト（1862–1943）の仕事である。彼の主張は形式主義と呼ばれるが，その詳しい説明は次節にまわし，ここではまず，その考えのまとまる迄の経緯について述べる。

ヒルベルトは集合論の逆理が問題になる以前から，幾何学の基礎について考察を進めており，1899 年に『幾何学基礎論 (Grundlagen der Geometrie)』という本を書いた[2]。これは，ユークリッド幾何学の公

3) 型の理論では，実数列という集合から，その極限値として得られる実数は，初めの列のメンバーたる実数よりも一段と高位の対象となる。後者のような「高位の」対象が，或る場合に，初めの対象の「位」まで「還元」できることを主張する公理が還元の公理である。

1) この本には，まず全体の概観（約 120 ページ）があり，以下，各部，章，節にそれぞれ概観が与えられている。従ってそこだけを読むのであれば，一通りは読める本だと思われる。しかしこの本に限らず，「本当に読む」というのはむずかしいことで，上にゲーデルの名が引かれているのも，彼がこの本の内容（およびヒルベルトの考え）を「本当に読み」，それらの中にある根本的な弱点を明らかにしたためかもしれない（III–3–7）.

2) その後，改訂増補（特に付録）が行なわれ 1930 年に第 7 版が出た。より新しい

理系を，より系統的，より精密に吟味してまとめたものである。

ユークリッドの公理系には，例(たと)えば円の内部と外部とをつなぐ直線が必ず円周と交わるという類(たぐ)いのことを公理として明示していないなど，いくつかの小さい欠点があったが，ヒルベルトはこれを隈(くま)なく埋め，かつ各公理の理論全体の中での役割なども徹底的に吟味した。またその際，ユークリッドの場合と違って，「点」，「直線」，「平面」などは，特にその心理的イメージをあくまで表現しようとする必要のないことを自覚し，それらはむしろ公理によって間接的，内在的に規定される「無定義概念」であること，それと共に「公理」とは，それらの無定義概念を用いて述べられた前提あるいは仮定であることを明言した。これらの方針は，無定義概念および公理に関する現代の公理論への意識的な出発点として貴重なものである。

ヒルベルトはまた，その幾何学の公理系が無矛盾であること，すなわち，その公理系からは決して矛盾を含む結果が生じないことを示した。その方針は，まず幾何学の公理を解析幾何学の流儀で代数学または実数論の世界に移し，幾何学の実数論的モデルを作る処にあった。要するに，「直線」や「円」をその方程式で置き換え，例(たと)えば「2 直線の交わり」を「二つの 1 次方程式の単一解」で置き換えるようなことである。

このような置き換えを逐一行なうと，ヒルベルトの幾何学の公理はすべて実数の世界の中での正しい定理となり，幾何学における正しい推論はすべて実数に関する正しい推論となることが確かめられる。そこで，もし幾何学の公理系から矛盾が出たと仮定すると，それは，この実数論的モデルの中での矛盾として表現されねばならない。ところがこのモデルにおいては，(実数の性質として) 正しい諸定理から始めて正しい推論が進められるのだから，実数の理論に矛盾がない限り，そこに矛盾の生ずる余地はない。すなわち，実数論の無矛盾性を認める限

版もある。

り，ユークリッド幾何学にも矛盾は生じえないことになるわけである。

容易にわかるように，この議論は，非ユークリッド幾何学の無矛盾性の証明 (III–2–5) と同じ型のものである。すなわち非ユークリッド幾何学の場合には，ユークリッド幾何学が無矛盾であるとの仮定の下で証明が進められたが，今回は，その時仮定であったことが，実数の体系の無矛盾性を前提にして証明されたのである。

話がここまで来ると，次の問題は，実数の体系の無矛盾性の証明であろう。ところが，ヒルベルトの『幾何学基礎論』の初版(1899)が出版された少し後から，集合論の逆理が大きな問題になってきたため，ヒルベルトの企図もむしろ実数論を飛びこえて，自然数論や実数論を含む全数学体系の無矛盾性の証明を狙(ねら)うという厖大(ぼうだい)なものに変っていった。

形式主義の考え方　ヒルベルトの考え方のこの新しい展開は，次に述べるブロウエルとの論争などを経て，1920 年代を中心に次第に明確な形を取る。これは集合論の成果を救うことを念頭においている点で，ブロウエルの議論に比べると保守的折衷主義というような面をもたぬわけではなかったが，或(あ)る意味では現実的であり，かつ数学的な妙味も他に比べて多かったように見える (既に学界の大勢が，集合論を守ることを保守的といいたくなるようになっている点に注意)。これらのことや，さらにヒルベルトの学界における位置も作用してか，数学者の間にはこれが最も影響力を持った。その詳細は次節で改めて論ずるが，彼の主張の要点は，

1. 数学において多少でも疑問の余地のある部分は，概念構成および推論を丹念に吟味して，有限的数論と同じ程度の確実性をもつようにし，問題の余地が残らぬようにする。その目標は，理論の完全な公理化とその無矛盾性の証明にある。
2. そのための理論展開においては，直観的根拠の十分ある範囲で，内容的な有限的考察が用いられる (有限の立場)。具体的には，記号

化された数学を対象とし記号式の運用によって無矛盾性の証明を導こうとするもので，この点，その理論展開は形式的な記号論の形を取る。

という二点にまとめられよう[1)]。ヒルベルトの立場を形式主義と呼ぶのは，特にこの最後の点による。形式主義という名は誤解を招きやすいが，ともかくその実際の方針はほぼこの通りである。なお，集合論を含む普通の数学を対象として行なわれるこの種の「数学」は，メタ数学 (超数学[1)]) または証明論と呼ばれる。この意味では射影幾何学の双対原理は，射影幾何学に対するメタ数学に他ならない (III-2–4)。

ヒルベルトは 1925 年ごろ，この大方針によって集合論を含む古典数学を再建する仕事に，楽観的な見透しをもっていたようである。しかしその見透しは，彼の方針を忠実に実行し，吟味したゲーデルによって，1931 年根底的にやぶられることになる。

(c)　直観主義

ブロウエルの哲学　公理的集合論を集合論の対症療法だとすれば，ラッセルやヒルベルトの考えはもう少し根底的だが，それにしてもこの二人は大なり小なり集合論を守る方向に動いていた。しかしこれらから少し遅れて始まったオランダの数学者ブロウエル (1881–1966) の考え方は，集合論を否定する方向に動いていく。その点でボレル達の意見に近いといってもよいが，それよりは遙かに哲学的で，議論も徹底していた。

---

1) ヒルベルト『無限について』(1925) の論旨による (次節参照)。

1) 「メタ」はギリシャ語で「〜の後」という意味だが，ヒルベルトは，「メタ・フィジカ (原義は「自然学の次」)」——「根本原理に関する学問」というつながりでこれを用いたのであろう。しかし今日では，(数学「の中の」議論でなく，) 数学「についての」議論がメタ数学と呼ばれる。メタ理論，メタ定理，メタ記号などの用語も使われる。なお，近代の数学者で「メタ数学」という言葉を最初に用いたのは，カントルではないかと思われる。すなわち彼の集合論第 4 論文 VI，§15 に，その言葉を使っている。

ブロウエルはカントの哲学から出発する。カントは数学の真理性の根拠を，人間に天与のものと見られた空間と時間の先験的直観形式におき，その上に自然数の理論やユークリッド幾何学の超経験的な真理性を説明しようとした[2)]。しかしカント以後，数概念は複素数その他の新しい対象にまで拡張された上，ユークリッド幾何学の普遍妥当な真理性に到っては非ユークリッド幾何学の誕生によって大きく動揺し，カントの考えは大きく後退せざるをえなくなっていた。ところがブロウエルは，1912 年のアムステルダム大学での就職講演において[1)]，カントの欠点はユークリッド幾何学を唯一の幾何学と誤認し，これを手懸りとして，その根拠づけを空間の先験的直観形式に求めた点にあるとすると共に，その基本方針の正しさを認める方向に進んだ。すなわちそこにはなお，時間についての先験的直観形式を天与のものとし，その上に全数学が基礎づけられる可能性のあることを主張したのである。

もっとも，ブロウエルのこの辺の論旨は必ずしも明快ではない。その要旨は，“人間の生の要素（なまの直観のことででもあろうか；村田註）は，ばらばらに分裂しうるのを，時間がこれをつなぎとめてくれる，この事実は人間の知性の基礎になる現象である。この中には当然，情緒的要素も入るが，それを捨象すると，「二にして一なることの直観[2)]」が残る。これが数学的思惟の根本原理である”というようなことになろう。より詳しいことはブロウエルも言っていないようである[3)]。彼の主張はこうした意味で直観主義と呼ばれる。カントにならって言えば，直観形式主義とすべきかもしれない。あるいはむしろ，当時一世を風

2) もう少し正確に言えば，数学的真理が普遍妥当であるための条件を批判し，その真理を先験的綜合判断と認めた上，その根拠として時間・空間の直観形式を認めたのである。カント『純粋理性批判』参照。

1) これは 1911 年のドイツの雑誌 *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* に掲載されている。1913 年に英訳も出た (*Bull. Amer. Math, Soc.*, vol. 20).

2) intuitie van twee-eenigheid. 英訳 intuition of the bare two-oneness.

3) これに関する記述は，普通に引用されている彼の論文の中には，これ以外にない。

靡していたベルグソンの生の哲学の影響の方が大きいように思われるが，どうであろうか。

ともかくこのようにしてブロウエルは，時間の中に継起するものとして 1，2 以下の有限順序数の生ずることを説き，他方，時の流れはいくらでも二分されうるが，その全体は一であることを基にして，直線連続体の直観の生ずることを説く。特に連続体は，中間にいくら点を入れてもその全体を尽すことのできないもの，従(したが)って単位である「点」の単純な集合とは見られないもの，と見なされるが，有限順序数の全体という可算集合は，生成的全体として認められている。そしてこの後，その主張に裏づけられた形の論法によって，可算集合の理論を素描するのだが，もちろん連続の濃度なる概念も認められない。これは，対角線論法が，直線上の点が可算集合だと仮定すると矛盾だという以上の事実ではないためである。この辺はボレルの批判より更(さら)にきびしい。

排中律の否定　ブロウエルの主張が，具体的な面で，ヒルベルトとはもとよりボレルたちとも明瞭に違ってくるのは，論理に関する吟味である。すなわち彼は，論理もまた根底的には有限的な人間の経験に裏付けられたものであり，その論理によって無限の対象を論ずることは無条件で許されることではないとする。

有名な彼の排中律批判はここで現われてくる。すなわち「すべてのことは A か非 A かのどちらかである」というのは，「有限的対象に関しては正しいけれども，無限者に対して無制限に使うことはまちがいである。例(たと)えば一つの数を定義するのに，まだ誰も解けない問題（例えばフェルマの大定理）の答が肯定的ならば 3，否定的ならば 5 とする，というような言い方では，数を定義したことにはならない」と彼は主張する。これもまた，カントル，デデキントの，集合概念は内在的に決定されるという考え方，すなわち「肯定なら 3，否定なら 5，それ

で決まっているではないか。何故なら，内在的には肯定か否定か，どちらかにきまっているのだから」，という考え方と正面から対立する。ただしこの主張を貫(つらぬ)くことが，ボレルの場合と同様，実際上，極めて困難であり，また「数学」を複雑多岐にすることであったことは，その後のこの理論の歩みが示している。

ブロウエルとヒルベルト　言うまでもなく，このような議論の当面の相手はヒルベルトであった。ブロウエルの 1912 年の講演の中には，「数学的真理の所在はどこにあるか，形式主義では「紙の上」すなわち記号論にある，直観主義では「人間の知性の中」にある」というような，いささか形式主義に酷な表現も見られる，先に脚註に引用したヒルベルトの『無限について』で，あちこちにブロウエルへの反論の響きが認められるのも，こうしたいきさつのせいであろう。ただおもしろいことにヒルベルトの方でも，自分の意見がカントの知識哲学の線に合致したものであることを，折に触れて述べている。カントの知識哲学には，やはりそれだけの重みがあっだわけである[1)]。

さてブロウエルはこの仕事 (1912) の後，しばらく基礎についての仕事を中断し，次元論というような（カントル以来の）点集合論の問題に沈潜した。古典的な意味での次元論の完成はブロウエルの業績の一つである。彼が基礎論に戻って精力的に論文を発表するのは 1918 年以後のことである。

ところがこの時期になると，時間の直観形式に基づく数学の哲学的再建という仕事は，少くとも数学の専門誌に発表される論文で見る限り影を潜め，上の最後に触れた排中律否定の上に立つ数学という問題が

1) カント哲学と数学のつながりについては，少し古いが，L. Coutulat, *De l'infini mathematique*（(1896, 1973 新版), L. Brunschvicg, *Les étapép de la philosophie mathematique*（1912, 1972 新版）などが参考になる。ただし共に直観主義のことは出てこない。直観主義に関する哲学的考察は 0. Becker, *Mathematische Existenz* (1927) にある。

もっぱら論じられる。しかしこの道が容易でなかったことは上で示唆(しさ)した通りであり，しかも全般的に見て，人びとの支持もあまり得られなかったように思われる。

唯一の例外と言えるのは，ヒルベルトの弟子筋に当る優れた数学者 H. ワイル (1885–1955) であろう。彼は 1919–1920 年の頃，ブロウエルの説を敷衍(ふえん)する論文を書いてヒルベルトの説に対抗し，ブロウエルの批判によって，「数学者は，それ迄ゆるぎない石造のものと確信していた数学の殿堂が，わが面前で霧の彼方(かなた)に没し去るのを，痛恨の思いをこめつつ座視する他なかった」とまで言ったことがあった。しかしこの人も 1927 年には，ブロウエルに対するヒルベルトの批判を，本質的には許容している[1)]。

一方，この間にあって，ヘイティングは 1934 年にブロウエルの議論の大綱を公理論的に展開し，特にその「論理」が，普通の記号論理——ラッセルやヒルベルトの整備したもの——の上に，二重否定の禁止[2)] という条件を付け加えた形で表現できることを明らかにした。ヘイティングの解釈をブロウエルが容認したか否(いな)かは，（関係者に聞いても）必ずしも明瞭でないが，ともかくこの頃以後，直観主義の数学は，二重否定消去禁止という特別な制約を負った数学というふうに解されがちになり，その当初の批判的活力はむしろ鉾先(ほこさき)を鈍らせた感がある。

3-7．形式主義の夢と現実

記号論理学の基礎づけ　ヒルベルトは『幾何学基礎論』の時代から，本格的な形式主義の旗印の表明までの間に，そのための武器である記

1) H. Wey1, *Diskusionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik.* 1928. なお，ワイル著，下村・森・菅原訳，『数学と自然科学の哲学』（1959，岩波書店）を参照。

2) A の否定を $\overline{\overline{A}}$ と書くと，普通の論理では，$\overline{\overline{A}}$ は A と同値であるが，この「論理」では，$\overline{\overline{A}}$ は一般には A と同値でない。

号論理を鍛(きた)え上げていく。すなわち 1904 年頃からその仕事が始まり，これは結局，弟子アッケルマンとの共著『数理論理学の基礎』(1928) となって一応落着する。

記号論理学の歴史は，当然われわれの話題としてよかったことだが，今までほとんど触れなかったので，ここで簡単に述べておく[3)]。アリストテレスの昔は別として，記号論理の歴史もまた直接にはライプニッツに遡(さかのぼ)る。ただし，その後しばらくは後を継ぐ者がないまま，19 世紀のプールの仕事を経て，デデギントより少し年少のフレーゲ (1848–1925) による量称記号 (または限定記号；今日の $\forall$, $\exists$) の導入という仕事が続く (第 3 章第 1 節)。論理と集合とのつながりを，初めて明確に把んだのもフレーゲである。しかし数学上の目的に，より適切な形の論理学を作る仕事はペアノ，ラッセル，ホワイトヘッドなどの手で仕上げられていく。ヒルベルト達の記号論理に関する仕事は，このような歴史を踏まえて展開されたのである。

われわれの関心の下で見るとき，ヒルベルト達の仕事で最も注目されるのは，そこに作られた記号論理学の体系の無矛盾性が証明されていることであろう。これは上記の『数理論理学の基礎』の中にある。

無矛盾という本来，論理的性格をもつ問題を，「論理学」を相手として検討するというのは，いささかおかしいように見えるかもしれない。しかしそこで吟味されたのは，記号化されて公理的に展開されたその記号論理の体系[1)] が，($\neg$ を否定の記号として，$p \wedge (\neg p)$ のような) 矛盾

3) 詳しくは『ブルバキ数学史』の「数学の基礎……」の章を参照. なお論理学史については，W. Kneale, *The development of Logic* (1962) ; T. Kotarbinski, *Leçons sur l'histoire de la logiqu* (1971；原書はポーランド語，1964)：R. Btanché, *La logique et son histoire d'Aristote à Russell* (1970) その他がある。別に資料集として van Heijenoort 編，*From Frege to Gödel——a source book in Mathematical Logic*, 1879–1931 (1967, Harvard) があり，これは本章の記述にも大いに参考にした。

1) その公理は p，q を命題として，$p \vee p \Rightarrow p$，$p \Rightarrow p \vee q$ などの形で与えられ，更(さら)に論理式の変形規則がいくつか与えられる。それらの前提の下で，$(\neg (p \vee q) \Rightarrow$

した論理式を，その体系自身の中では[2]，決して導き出さない，という態の問題である[3]。

『無限について』　以上の問題に先立ち，ブロウエルの論文 (1912) やワイルのそれに対する賛意表明 (1918，20) があり，やがてそれらに対抗する形でヒルベルトの精力的な仕事が始まる。実際，彼はこの基礎の問題の検討に，晩年を捧げつくすのである。

まず 1917 年に『公理的思考』が発表される。これは形式主義の哲学の明確な提示であり，本書の第 1 章第 4 節で述べた形式的公理主義の精神はこの中で表明される。続いて 1922 年に『数学の新しい基礎づけ』と『数学の論理的基礎』が発表され，1925 年の『無限について』がそれに続く[1]。

ヒルベルトの『無限について (Über das Unendliche)』は，ワイエルシュトラス記念の集会での講演記録である。彼はここで，「ワイエルシュトラスのおかげで，微分積分学に現われる無限は有限化されて大幅に明確になった。しかもなお解析学の基礎の問題は終っていない。なぜならば，無限者 (Unendliche) の意味が完全には解明されていないからだ」と述べる。そしてこの新しい無限者をいかにして「有限化」するかという問題について，その大体の方針を示そうとするのである。

$((\neg p) \vee (\neg q))$ というような）論理法則が次々に導かれる。

2) 「その体系自身の中では」と断ったのは，例えばその公理系を，集合論の公理と共に用いるというように，特別な理論体系に適用したときにも無矛盾であるとの保証がないからである。（それができれば数学の無矛盾性の問題は完了する！）

3) その証明は，命題の真偽を，数 0，1 で置き換え $\vee, \wedge$ を数の和，数の積（ただし $1+1$ は更に 1 で置き換える）で置き換えるなどの方法で行なわれる。このとき，公理，および公理から導かれる論理式はすべて 0 となるのに対し，値が 1 となる論理式が存在する（例：$p \vee (\neg p)$）ことに注目するのである。数の和や積というと，論理の問題に数学的知識を先行させるように見えるかもしれないが，実際には，（論理式の真偽値の表のような）数表だけを見て，機械的に事が運ばれる。すなわち「記号に関する直観」だけで事はすんでしまう。

1) 『公理的思考』以下ここに挙げた論文に他一篇を加えた論集が，*Hilbertiana* として出版されている (1964, Wissenschaftliche Buchgesellschaft : Darmstadt)

この論文は二部に分れており，第 1 部ではその哲学が，そして第 2 部では，「この新しい理論の試金石として」，それによって連続体問題が解決されそうだという見透しが述べられる。第 1 部では（あからさまの形ではないが），ブロウエル＝ワイルの議論に対する反論が散見する。その大要は既に前節で示した。

連続体問題に対するヒルベルトの攻め方は，実数の或(あ)る表現[1] を頭において，実数を数論的関数 (III–3–3) で置き換え，彼の展開した記号論理の方法をそこに適用することにより，数論的関数を数え上げていこうとするのである。実際，もしこの数え上げが第 2 級順序数の全体を用いて完結し，更(さら)にそこで数え上げられる関数の全体が実数の全体と一致するならば，さしもの連続体問題も肯定的に解ける道理である。ヒルベルトは，そこに示された二つの補助定理の証明さえ出来れば，それで話は終るというところにまで，この問題を追いつめたのであった。

けれども不幸なことに，この壮大なヒルベルトの計画は単に夢として止まったばかりではすまなかった。というのは，その夢の筋道を忠実に辿ったゲーデル (1906–1978) は，まさにその道筋の上で[2]，ヒルベルトの企てた全数学の無矛盾性の証明が原理的に不可能であることを示したからである (1931)。数学基礎論はこのゲーデルの論文『形式的体系における決定不能定理[3]』）によって，論理主義，形式主義，直観主義などの並立した時代を超えた，新しい時代に入ったと見てよいであろう。

---

1) 例えば実数を連分数展開すると，自然数の無限列になる。この第 n 項を $f(n)$ として数論的関数 f を定義すると，f は一つの実数に対応する。

2) ゲーデルの仕事とヒルベルトの「夢」との親近性は，この問題についてヒルベルトに協力していたベルナイスの紹介記事 (1940) にある他，ゲーデル自身の手紙 (1965) にも述べられている由である。(Van Heijenoort の前記の書物 p. 368 参照)。

3) Godel, “Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica and verwandte Systeme I” *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Bd. 38 (1931)

リシャールの逆理　ゲーデルの仕事を簡単に解説することは極めてむずかしい。ここでは，前節で予告したリシャールの逆理を説明し，それを介してヒルベルトの考えからゲーデルの理論に至る理論展開の大づかみな解説を与える程度に止める[4)]。

リシャールの逆理 (1905) は（その原型と少し異なるが）次の形で説明される。自然数 n に関する性質——真偽は問わない——を $P(n)$ と書く。もちろんこれは無数にありうるが，それらを日本語で表現し，その表現に要する字数およびアイウエオ順を用いて順番に並べたとする：

$$P_1(n),\ P_2(n),\ \cdots,\ P_k(n),\ \cdots\cdots \qquad (*)$$

（ここでは，仮に $P_1(n)$ とは「n は偶数である」，$P_2(n)$ は「n は素数である」，$P_3(n)$ は「n は 4 で割り切れる」，……などとしておく。）いま $P_k(n)$ に対して $n = k$ と置くと，$P_k(n)$ は真偽いずれかに定まるであろう。（上例では，$P_1(1)$, $P_3(3)$ は偽，$P_2(2)$ は真である。）さてそこで，n に関する性質として，「列 (*) において $P_n(n)$ が偽となる」という「性質」を考える。この性質を $Q(n)$ と書くと，これも，その表現そのもののために，(*) の中の一つ $P_l(n)$ して現われているに違いない。ところがここで $P_l(l)$ の真偽を考えると困ったことになる。すなわち，

(1)　$P_l(l)$ が真であるとは $Q(l)$ が真であることであり，してみると「列（*）におい $P_l(l)$ が偽となること」が真になる。要するに，$P_l(l)$ を真とすると，$P_l(l)$ は偽だと結論される。

(2)　$P_l(l)$ が偽であるとは $Q(l)$ が偽であることであり，してみると「列（*）において $P_l(l)$ が偽となること」が偽になる。要するに，$P_l(l)$ を偽とすると，$P_l(l)$ は偽ではない，真だと結論される。

---

4) 詳しくはゲーデルの原論文の他，Kleene, *Introduction to Metamathematics* (1952), Mostowski, *Sentences undecidables in formalized arithmetic* (1952) などを参照。論文集 M. Davis 編，*Undecidable* (1965) もある。より一般的解説書として，E, ナーゲル，J. R. ニューマン著 はやし　はじめ訳『数学から超数学へ』（1968，白揚社）も参考になる

これがリシャールの逆理の骨子である。

ゲーデルの決定不能定理　ヒルベルトの上記の議論の中に，数論的関数（という形の自然数の列）を並べるところがあったが，これを上下に可算個だけ並べて数表のようにした段階では，つねにリシャールの逆理（または対角線論法）と似た議論が出来て，そのような数列の並べ方は，いつまでたっても終結しない恐れがある。ヒルベルトの工夫も，一つには，それをいかに避けるかにかかっていたと言ってよい。しかしゲーデルはその点を更に慎重に吟味したわけである。

リシャールの逆理では，自然数論「の中の」$P_k(n)$ という性質と，それらの性質の表現を対象とする，いわゆる「メタ」の性質 (p. 166) とが混在している。そして逆理の発生源がこの二つの性質の混用の辺りにあることは，まずまちがいないように見える。

ゲーデルは，公理的自然数論（ないしそれを含む公理的体系）に対して，自然数に関する内部的性質と，自然数論に対するメタの性質とをひとまず区別するが，後では或る種のメタの性質を内部的性質に引戻してみせる。ただしその際，それがメタの性質の引戻しであるという点を十分に注意して取り扱うため，リシャールの逆理で現われたような矛盾は起らぬようになっている。次にその間の事情を簡単に説明しよう。

例えば一つの公理（記号で表現されている式）を，そこで許されている推論規則に従って変形展開して得られた式は，理論の内部で得られたものである。他方，或る記号列が「公理」であるか否かは，式の形その他を見て判定されることで，これはメタの考察に属する，また或る論理式（という記号列）が，その公理系から導き出せる（証明可能）とわかっているとき，或る与えられた記号列の系列がその証明であるか否かという問題も，メタの考察になる。ゲーデルはこれらの判定がつねに（或る意味で）有限の手続きで遂行できることを示した。これに対して，或る論理式が証明可能か否かもまたメタの考察である。ただし，

この最後の問題の判定が必ず有限的にできることは確かめられぬことである。

ゲーデルは，その公理系に出てくる記号に適当な番号を振り当て，それを用いて，その体系の中の概念や論理式などを，ことごとく数や数の集合として一意的に表現してしまう（いわゆるゲーデル数）。こうすると，甲の式を乙の式に変形する論理的推論などは，甲のゲーデル数から乙のゲーデル数を「算出」することで置きかえられる。さらにその際，他の工夫によって，この「計算」は有限的に，すなわち帰納的な数論的関数 (p. 150) の範囲で初等的に進めらるようになっている[1)]。メタの考察が内部的考察によって置き換えられるというのは，大体このようなことに基づくのである。

以上の考察を，もとのリシャールの場合と似た線で辿(たど)っていくと，リシャールの，$P_l(l)$ が「真だと仮定すると偽，偽だと仮定すると真」という逃げ道のない状況の代りに，ゲーデルの場合には，「$P_l(l)$ が証明できると仮定すると，その否定の証明もできる。$P_l(l)$ の否定が証明できると仮定すると，その肯定の証明もできる」という形が現われる。そこで，もし「議論の出発点に置かれた公理系が無矛盾である」との条件をおくならば，$P_l(l)$ の証明もできず，その否定の証明もできない，という一つの逃げ道が残るのである[2)]。そしてこれがこの論文の標題にいう「決定不能」の定理の例に他ならない。

ところで今述べたことの中には，「最初の公理系が無矛盾だとする」との条件が入っている。もちろんこれをどう処理するかは，ヒルベル

1) この点については，フランスの J. エルブラン (1908–1932) の示唆(しさ)があったという。エルブランもまたヒルベルトの考えを追求した優れた数学者だが夭折した。彼はまた，ブルバキが誕生する以前からブルバキの友人（？）だった人物である。

2) 細かくいうと，ゲーデルの論文では，出発点たる公理系（自然数の理論を展開できる力のある体系）には，単なる無矛盾性よりも強い（$\omega-$ 無矛盾性と呼ばれる）条件がおかれていた。しかしその後，同じ定理は単なる無矛盾性の仮定だけから証明できることが確かめられた。

ト以来の懸案だったわけだが，ゲーデルは上の「決定不能定理の存在」という事実を踏まえて，同じ論文の中で次のような重大な定理までも証明してしまう。すなわち，自然数論を展開しうるだけの力のある公理系（ツェルメロその他の公理的集合論，ラッセルの体系などは皆これに入る）が，もし無矛盾であったとして，さてそれが無矛盾であることを証明しようとすると，その公理系で許される操作だけを用いる限り，いかに工面しても絶対にできない——できたとすると，たった今えられた決定不能定理に矛盾する——という定理である。

してみると，ここで論じられた一切の理論——それは自然数論が展開できるものであればよく，従(したが)って公理的実数論も公理的集合もすべてこの中に入る——は，その理論の外部から，何らかの弁護役が現われるのでない限り，絶対的な意味での無矛盾性の証明は，不可能であることがわかる。自然数論ぐらい——と言ってよいかどうかは問題だが——ならばまだしも，集合論などの場合，それの外部に，その弁護を安心して頼めるほど強力かつ確実な理論など，いったいどこにあるというのであろうか。ヒルベルトの夢はここで決定的に崩れ去ったといってよい。ただしそれは決してヒルベルトの仕事がすべて駄目になったという意味ではなく，このゲーデルの仕事を推進したことを別にしても，この後の基礎論の展開の底にも，それは多くの示唆(しさ)をもつであろう。

ゲンツェンの論理的推論研究　ゲーデルに比べると，ヒルベルト学派の一人であったゲンツェン (1909–1945) は，或(あ)る限られた形にせよ，ヒルベルトの夢を実現した人である[1)]。ただ惜しいことに，第二次世界大戦で戦没した。彼は1934年に発表した論文『論理的演繹の研究[2)]』で，現実の推論過程と平行した形の記号論理の体系 (NK) を工夫し，それと共に，その体系と同値だが，もう少し形式的な体系 (LK) を

1) エルブランにも同様の研究がある (1930)。
2) G. Gentzen, “Untersuchungen über das logische Schließen I, II” *Mathematishe Zeitschrift*, Bd. 39(1934)

も案出して，非常に巧妙にその体系の無矛盾性を証明してみせる。次にそれについて少し触れよう。

まず彼は体系 LK において一つの強力な基本定理（下記）を証明する。元来 LK は“$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$”ならば（$\mathfrak{A}$ ならば $\mathfrak{A}$：$\mathfrak{A}$ は任意の論理式）なる形の式（基本矢式）から出発し，矢式の変形規則（推論）を繰り返し適用して結論に到る手続きである。その際，各矢式は樹枝状に配置され，梢はすべて種々の形の基本矢式，以下，変形（推論）された一つまたは二つの矢式が更（さら）に変式を受けて下に移り，木の根の処で（左辺の空白な）矢式“　$\to \mathfrak{B}$”（$\mathfrak{B}$ は常に真）に終る仕掛けである。

さて LK での矛盾は常に矢式“　→　”の形に直せることが解るので，LK が矛盾を含まぬことを示すには，この矢式が現われえぬことを示せばよい。それを可能にするのが基本定理である。すなわちそれは“LK の 21 項の推論規則のうち，「$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ と $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ とから $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ が出る」（切り捨て）という規則は使わずにすませうる”[1] というメタ定理である。一方，他の推論規則では，前提に現われる論理式が変形後も必ず残存するようになっており，それが消滅するのは「切り捨て」の場合だけなのである。そこでこれを用いると，その体系で導き出される論理式（例（たと）えば $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$；$\mathfrak{C}$，$\mathfrak{D}$ は或（あ）る論理式）の証明においては，$\mathfrak{C}$ や $\mathfrak{D}$ の構成要素たる部分的論理式だけを最初から用いるだけですむことがわかる。言いかえれば，$\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ を導くに当って，「結論の中には現われていない或る式が，一時的な仮定その他の形で，その実，本質的に利いてくる」というような事態は考えなくてよい，という結果である。そうなれば $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ の類いの矢式から両辺の空白な矢式“→　”が出ないことは明らかである。

基本定理はこの他，より実際的な問題，例（たと）えば電子計算機に論理式

1) 「切り捨て」は三段論法の形をしているが，基本定理は三段論法が不要といっているのではなく，「切り捨て」がなくても他の規則で補なえる，といっているのである。

を証明させる問題などでも，大いに利いてくる。実際，$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ が出せるか否(いな)かを考える場合，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ の中に現われない論理式までをも考慮せねばならぬとしたら，吟味の余地は無際限に多くなって手におえない。日本におけるこの方面の研究も，この定理を基として成功をおさめたのである[2)]。

自然数論の無矛盾性　ゲンツェンの仕事で，もう一つ注目すべきものは，自然数論の無矛盾性の証明である (1936，38)。もちろんゲーデルの「決定不能定理」(1931) があるわけだから，その証明の道具立ては自然数論の範囲内には納まらない。ゲンツェンは，自然数論の外にあるが第 2 級順序数の一部 (「最初の ε 数」と呼ばれる数未満の部分) という一応明確な対象の力をかりて，ペアノ=デデキントの自然数論の中では，決して矛盾した結論が出ないことを証明した。元来，超限順序数は，それを大小の順に書き並べるとき，大きい方から小さい方へと飛び石伝いに下ってくると，必ず有限回で終るという性質を持っている[1)]。ゲンツェンは，自然数論の中に現われうる各定理に上記の第 2 級順序数の番号を与え，一つの定理の証明を分解するとき，その証明の各段階に現われる定理は前段階のものより常に番号が若くなるように工夫した。こうすると，もし不審な定理が現われても，その不審の糸を遡(さかのぼ)っていくと，結局は有限回の吟味の後に公理にまで到達し，不審が氷解することが確かめられる。LK の基本定理は，ここでも本質的な役割を果す。

この仕事は，無矛盾性に関するヒルベルトの考えの線に近いところで最も成功した例の一つであろう。なおゲンツェンの吟味の中には，ブ

---

2) 島内剛一「証明のプログラミング」，『数学』第 15 巻，No. 1. 1963 年 7 月。

1) 整列集合 (III–3–1) には (‥‥‥ , n, $n-1$, ‥ , 3, 2, 1 のような) 無限左行の行列は現われない。このような列には最初の元がないから，整列集合の部分列にはなりえないのである。

ロウエルの直観主義からの批判が十分に考慮されていることを注意しておく。

自然数論の無矛盾性が一応できたとなると，この次は実数論，続いて集合論ということになるであろう。しかし集合論の場合はもとより，実数論の場合ですら，事はなかなか並行して進みにくい。そしてその一番の原因は，実数論の場合，ゲンツェンの場合の基本定理に当ることがうまくいかない処にあった。これについて竹内外史 (1926–2017) は 1955 年頃から，GLC (Generalized Logic Calculus) という論理体系を構成し，それに対して，LK における基本定理に当る定理の成立を予想したが，その予想は 1967 年，高橋元男 (1941–) によって（間接証明ながら）肯定的に解かれた[1)]。これは（制限された形のものではあるが），実数論の無矛盾性の証明を可能にすることなのである，

3-8．集合論の多様化

ゲーデルのモデル △　集合論の無矛盾性の証明が絶対的な意味ではまず無理だとなった以上，可能性のある道は，大なり小なりゲンツェンの自然数論と一脈相通ずる方向で，相対的な証明を行なうことであろう。言いかえれば，何らかの仮定の下での無矛盾性証明ということが重大な問題になってくる。ゲーデルが選択公理と連続体仮説について行なった考察は，その種の考察の一つの標準的方法になるもので，特に公理的な取り扱いの下での集合論のからくりは，これを初めとする一連の研究によって大幅に解明されることになる。

ゲーデルは少く書いて多くを語るというタイプの人で，決定不能定理の問題の前には，これも第一級の重要性を持つ論文「述語論理の完全性」(1930) 他一篇の発表があるだけである。連続体問題に関する仕

1) G. Takeuchi, “On generalized logic calculus” *Japanese J. Math.* , vol. 23. (1953). M. Takahashi, “A proof of cut-elimination theorem in simple type theory”, *J. of the Math. Soc. of Japan*, vol. 19 (1967).

事も 1938，1939 年発表の二論文と，プリンストン大学出版局発行の（大きな）小冊子『集合論の公理に対する選択公理，一般連続体仮説の無矛盾性』（1940）がほぼすべてである[2)]。

この最後の本では，まず全体の見透しと，そこで用いられる記号論理の体系——1 階の述語論理——の提示があり（序論），次に公理的集合論が非常に整理された形で展開される（第 1—4 章）。すなわち，集合論の基本的述語を $\in$（「集まり」とその「要素」の関係）とし，他方，その基本的対象を，本来の対象である「集合 (set)」と，（順序數の全体のように）集まりではあるが集合と認めると支障の生ずる懼（おそ）れのある「類 (c1ass)」との二つとする。ただし集合は類の一種であり，類は或（あ）る条件の下で集合と認められるようになっている（公理群 A：A-1—4）。次に類に関する公理（公理群 B：B-1—8）と集合に関する公理（公理群 C：C-1—4，および公理 D）が来て，最後に，問題の選択公理（公理 E）が述べられる（以上，第 1 章[1)]）。このあと，ここで使われる論理式が，どんな条件の下で，ここでいう類になるかの吟味——「述語」を「もの」で置きかえること——があり（第 2 章），その上に順序数と基数（濃度）の理論が展開される（第 3，4 章）。

証明されることは，公理群 A，B，C，D（これを公理系 Σ と呼ぶ）がもし矛盾を含まないならば，Σ に選択公理 E と一般連続体仮説[2)] の二つを公理として加えたもの (Σ') でも矛盾は生じない，という事実であ

2) *The Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of the set theory*, Princeton Univ. Press, 1940. なお上記の三篇と別に，示唆（しさ）に富んだ概観的な小論文 “What is Cantor’s Continuum-hypothesis”, *American Mathematical Monthly*, Vol. 54 (1947) がある。

1) 公理 B–1 は或る特定の類の存在を，また C–1 は無限集合の存在を，それぞれ主張する。他方，B–2–8 と C–2–4 は，類または集合に対して許される演算（補-類を作る，冪集合を作るなど）を保証する。また公理 D は，$x \in x$ という集合の存在など，当面の問題について本質的でない障害の生ずることを防ぐためにおかれている。公理 E はツェルメロの場合より広い形で書かれている。

2) 任意の順序数 α に対して，$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ という主張。ただし $\aleph_\alpha$ は，α 番目の基数である。

る。言いかえれば，もし Σ' に矛盾が現われるようなら，矛盾はもともと Σ にあったのだ，ということが示される。

大体の論法は次の通りである。すなわち，まず Σ の中から，「構成的」と名づけられる集合を取り，その全体を Δ と名づける。Δ のメンバーは，空集合 ϕ を出発点とし少数の基本的演算を超限的に繰返すことによって，（すなわち，Σ の中に既にある超限順序数の順序に従(したが)って，それらの演算を繰返し適用することによって），「構成」される Δ を作るのに用いられる手続きは，すべて Σ において許されたものであるが，その作り方が巧みなため，Δ は集合論 Σ のモデルになっていることが確かめられる。言いかえれば，Δ のメンバーのみを「集合」と呼び，Δ における「類」を然(しか)るべく定義し，Δ における「集合とその元」の関係を Δ における「$\in$ 関係」と見ると，Σ の公理はすべて Δ において満たされていることが確かめられるのである（同書第 4，5 章）。

ところがこの Δ には更(さら)に重要な性質が認められる。というのは，Δ においては選択公理 E も一般連続体仮説も成立することが確かめられ，してみると Δ は Σ' のモデルにもなっていることがわかるからである。ここまでくると，証明の目標は実はもう達せられている。すなわち，もし Σ' が矛盾を含んでいるのであれば，その矛盾は当然 Δ の中にも現われてくるに違いない。ところが Δ を作るのに Σ の公理以外のものは使われていなかったのだから，その点から吟味していくと，Δ の中の矛盾は Σ の公理から導かれたものでなくてはならない。結局，Σ' に矛盾があれば Σ に既に矛盾があるはずだということになり[1)]，対偶を取ると，Σ に矛盾がなければ Σ' にも矛盾はないという結果になる。選択公理，一般連続体仮説と Σ の公理との両立しうること（consistency，無矛盾性）は，こうして確かめられるのである。

1) 詳しくいえば，Σ' の中に矛盾に到るような証明があれば，それを変形して，Σ の中にも矛盾に到る証明を書いてみせることができる，ということである。

なおゲーデルはこの証明のための一段階として，“Σ における集合はすべて「構成的」である”という意味の主張をとり，それが Σ と無矛盾であることも構かめている。Σ の集合の全体を V，「構成的」と呼ばれる集合の全体を L と書くと，この主張は $V = L$ と表わされる。このことはゲーデルの証明全体の中での重要なポイントだが，後でコーヘンの仕事を説明するときに，もう一度触れるであろう。

解析集合論　ここで連続体仮説について，カントルの仮説 ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) あるいは今述べた一般連続体仮説 ($2^{\aleph_a} = \aleph_{a+1}$) と全く両立しない仮説が，実際に提示された例のあることを紹介しておく。それは 1935 年にルージンが提出したもので，ルージンの連続体仮説と呼ばれる。

ルージン (1883–1950) はロシアの人，ボレルやその仲間のルベーグの傾向の数学を推進し，解析集合論という理論を建設した。代表的著作として『解析集合論』 (1930) がある。

解析集合の話にここで深入りすることができないが，それは無理数全体の集合 $\mathfrak{f}$ の一価連続関数による像として定義される[1)]。特に可算濃度を超える濃度の解析集合は，（可算個の例外的な点を別にすると），実数全体の一対一連続像になることが知られている。従(したが)って少し大まかに言うと，自然数の全体 N との一対一対応で「数えられる」ものは加算集合，その対応を何らかの意味で具体的な対応に限定し，そこに古典数学 (特に解析学) の成果を収めようとするのはボレル流の具体的 (effective) な可算集合論であるのに対し，一対一対応で実数の全体によって「数えられる」のは連続体濃度の集合，その対応が連続関数となる場合が解析集合であるといってよい。

---

1) 解析集合の定義はこの他にもいくつかある。特に，「連続関数」の代りに，それの拡張である「ベール関数」（ボレルと同系統の考え方による関数）を用いても，同じ結果になることはおもしろい。これはいわばボレル的な数学の世界の一種の完結性を示すことだからである。

解析集合の最も手近な例は，いわゆるボレル集合[2] であるが，解析集合の中にはボレル集合以外の集合のあることが知られている。

ところで，それより前，ボレル集合の濃度の問題というのがあった。すなわちボレル集合が有限集合でも可算集合でもない場合，それが必ず連続体濃度になるか否(いな)かは，一時かなりの難問であり，その証明が得られたときにも，それはなかなか手数のかかる仕事であった。ところが解析集合が（可算個の点を除いて），連続体の一対一連続体だとなると，これはボレル集合（および解析集合）の濃度の問題を一挙に明快に解いたことになる。

ルージンの解析集合論は，ルベーグが「解析的に表示できる関数」(1905) という論文で犯した誤りを，当時学生であったススリン (1894–1919) の指摘と協力によって正した処から出発した。これはヒルベルトの無限論に対するゲーデルの仕事ほど劇的ではないにしても，なかなかおもしろい事実である。

ルージンの連続体仮説　さてルージンは，そのルベーグの仕事を足場にして研究を進め，解析集合およびその補集合（補解析集合）がそれぞれ高々 $\aleph_1$ 個の互いに素な部分集合（構成分）に分解されることを突きとめた。この分解は，その解析集合を定義する関数の性質によって決まるだが，こうなると，それらの構成分がすべて 1 点（あるいはせいぜい加算集合）になってくれるような分解——従(したが)って定義の関数——がないか，ということは極めておもしろい問題になってくる。というのは，そのような分解が見つかったら，連続体問題は肯定的に解決されるからである。しかしやはりそうは問屋がおろさなかった。そのような分解を生んでくれる関数は遂(つい)に見つからなかったのである。

しかしともかくこのような検討の中から，ルージンは

(L)　濃度 $\aleph_1$ の集合は必ず補解析集合である

2) ボレルが測度の問題を考えるについて導入した集合。III–4–2b 参照。

ことを推測し，連続体仮説は，カントルの

(C)　連続体濃度 $(\aleph = 2^{\aleph_0})$ は $\aleph_1$ に等しい

という形のものだけでないことを主張した (1935)[1)]。

実際，この二つの仮説は全く両立しえないものであることが容易に示される。すなわち，まず (C) と (L) を続けて見ると，「連続体濃度 $\aleph$ を持つ集合は必ず補解析集合である」という結論になる。ところが解析集合の濃度は，可算でなければ $\aleph$ だから，この結論から，「解析集合は必ず（別の）解析集合の補集合である」ことが出てくる。他方，集合 A とその補集合とが共に解析集合である場合，両者は実はボレル集合になる事実が既に知られていた。そこで上の結論はまた「解析集合は必ずボレル集合である」との結果を生む。ところが少し上で述べた通り，ボレル集合でない固有の解析集合が現に存在しているのだから，結局，(C) と (L) とは両立できない仮説である。

解析集合の世界　実は，解析集合の範囲で考えると，有りうべき濃度が有限，可算，連続体の三つに限られる——皮肉にもカントル的統制のとれた世界！ しかも解析集合は常にルベーグ可測 (III–4–2b) であり，かつ「集合」をそれだけに限定しても古典的解析学の多くの定理は成立しそうに見える。すなわちこれは，ボレルたちの数学のために，一つの小宇宙を提供するかに考えられそうに見える。しかし上記の補解析集合の存在のために，それは結局うまくいかなくなってしまう。というのは，補解析集合の濃度の問題が解けないばかりか，補解

1) ルージンの連続体仮説は他にもあるが，少くとも私にはその「推測」の根拠はつかめない。$\aleph_1$ という濃度と補解析集合とは，共に彼の数学的世界の「果て」だという程度のことだったのかもしれないが，それでも，もっと深い見透しはあったのであろう。ただ彼がここで，連続体の謎の底知れぬ深みを見ていたことは確かであって，そのことは，連続体仮説が集合論の公理から独立であることを証明したコーヘンの仕事（後述）によって，間接にもせよ認められる。論理的に明快なコーヘンと違って，ルージンの場合には事はなお茫漠としている上，両者の考察の方向には，ほとんど共通性が感じられないが，それだけにルージンの推測のからくりがわからないものだろうかと思うことがある。

析集合の連続像，後者の補集合，そのまた連続像，……と，その「数学」の範囲は，一般に濃度も測度もわからない対象の領域へと，どんどん拡がってしまうからである。補集合を取ることは否定に相当するから，結局この小宇宙では，命題の否定が安心してできないのである。

ついでながら，ルージンの『解析集合論』の初めには，それがゼノンの逆理の新しい形での問題だというリマークがある[1)]。また同書に寄せたルベーグの「序文」にも，新しい数学の問題と共に，エピメニデス[1)] やゼノンの問題が，当時の若者たちの学問的雑談の中で活発に論じられたという記述がある。いっも言うように，ゼノンの逆理は決して死滅した問題ではない。

コーヘンの業績　話が少々専門的になり過ぎるかと思うが，集合論的無限論の現状を述べるに当って，1961 年頃から発表され始めたコーヘン (1934–2007) の業績を避けるわけにはいかない[2)]。

彼の仕事は結論的にいうと，こういうことになる：ゲーデルによる集合論の公理系 Σ が無矛盾ならば，これに選択公理の不成立，連続体仮説の不成立，あるいは $V = L$ という公理の不成立など，その他いくつかの「特異」な仮定を，Σ に追加しても，それぞれの場合に，ゲーデルのモデル Δ とは違うモデルが作られて，結局，それらの追加後の公理系もまた無矛盾になる。（公理系 Σ の代りに，それと少し違うツェル

1) ルージンは同書の数学的内容の中で，改めてゼノンに触れることはしていない。しかし彼がボレル集合の分類について論じている処は，見方によると「新しいゼノン論」をやっているように思えぬでもない。すなわち彼はその場所で，直線を点の集合とする代りに，点をその一例とする幾種類かの基本的集合の型 (elements canoniques) を見出そうとしている。その理論は全く数学的興味だけで進められているようではあるが，少くとも私には，それが，直線の構成要素を問うという，ゼノン以来の問題に対する一つの攻め方と見うるもののように思われる。

1) 「クレタ人の言うことはすべてうそだ」と，クレタ人の一人であるエピメニデスが言った，というパラドクス。(「　」の中はうそか，まことか。)

2) Cohen, “The Independence of the Continuum Hypothesis I, II” *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **50** (1963), **51** (1964).

メロ=フレンケルの公理系を用いても事情は変らない。）してみると，コーヘン自身が言っている通り，これは，ユークリッド幾何学に対する非ユークリッド幾何学のようなものを，他ならぬ集合論に対して作ってみせたことであって，カントルが集合論に対して懐いていた統一的理論の夢は，ほとんど最終的に崩れ去った感がある[3)]。

スコーレム=レーヴェンハイムの定理　コーヘンの仕事の内容に多少とも触れるためには，述語論理に関するスコーレムの仕事に触れざるをえない。スコーレム (1887–1963) はノルウェーの人。その仕事の大半が学界の中心をややはずれたノルウェーの雑誌に発表されたためか，ゲーデル程有名でないかもしれないが，ゲーデルと深さを競うような業績をいくつも残して，コーヘン以前で，ゲーデルと共にこの方面の双璧をなす人物である。述語論理に関するスコーレムの仕事 (1920) は，レーヴェンハイムが 1915 年に発表した論文を発展させたもので，「スコーレム=レーヴェンハイムの定理」ど呼ばれる。それは，

> 第 1 階の述語論理[1)] において，有限または可算個の公理からなる公理系 S が無矛盾であれば，それのモデルで，可算個の元からなるもの M が存在する

という形で述べられる。前に自然数に関するペアノの公理について述

---

3) もっとも，コーヘンの結果はあくまで特定の公理論の下でのことだから，公理系の作り方によって事態がやや変化するという可能性はあるかもしれない。現にゲーデルなどは，（カントル的）連続体仮説などの成立する「正常」で単一的な集合論が，公理的に得られることを期待しているといわれている。（p. 141 で引用の竹内外史氏の『自然』所載の論文などによる。）

　それにしても，これはコーヘンよりかなり前の話になるが，数学を形式化した体系には既に或(あ)る種の限界があって，こちらの方はまずどうしようもない。ここで「限界」といったのは，ゲーデルの「決定不能性」（前記），同じく「述語論理の完全性」，スコーレムの「自然数の特徴づけの不可能性」（下記）などに由来するもののことである。

1) 量称記号 $\forall, \exists$ の使用が，その体系の個体たる対象（元(げん)）にのみ許され，個体の性質（元の集合），個体の性質の性質（元の集合の集合），……などには適用されない述語論理をいう。

べたとき，その第 5 公理（帰納法の公理）の中に，任意の集合という，自然数論以外の概念が現われる点に注意した (p. 144 註)。この点を厳密に扱うため，集合をそれを規定する述語で置き換え，第 1 階の述語論理を厳格に適用することにすると，今度は「述語」の概念を明確化する必要が生じる，ところがそれを然(しか)るべき表現によって枚挙していくと，「任意の集合」という無限の含みをもっていた帰納法公理が，例(たと)えば可算個の公理で置き換えられてしまう[2)]。すなわち頭で考えている限り，自然数全体の部分集合は $2^{\aleph_0} = \aleph$ 個あるはずなのに，この理論の中できちんと表現される「部分集合」は（外から見て）可算個しかないという事態が起こって，「自然数論」が初めの予想より狭いものになってしまう。「正確」論の中では，或る種の性質（あるいは部分集合）が表現できないで漏れてしまうのである。

ところで，実はゲーデルの項で挙げた集合論の公理系にも，自然数論の帰納法公理と同じような性質の公理（置換公理）[1)] がある。従(したが)ってそれを「正確」に書き上げると，その集合論の公理系も，スコーレム＝レーヴェンハイムの定理でいう可算個の公理系 S の一種となり，S が無矛盾ならば，S に対する可算モデル M が存在する (!?) という，おかしな結果に到達する。実際，集合論は非可算濃度の集合をふんだんに処理するはずのものだから，こういう結果は大ていの人を驚かすであ

---

2) 帰納法公理を，（自然数 x が性質 A をもつことを $A(x)$ と書くことにして，）例えば $\{A(1) \wedge (\forall y)(A(y) \to A(y+1))\} \to (\forall x)Ax)$ と書き，「すべての A について」と言ってしまうと，第 1 階の述語論理では処理できない.（しかも第 2 階述語論理の体系はむずかし過ぎて手がつかない.）そこで，今考えている体系で許される式に限定することにし，一つ以上の自由変数をもつ論理式を枚挙して，第 m 番目の式を $\mathfrak{A}_m(x, t_1, t_2, \cdots, t_k)$ と書くと，上の公理は，$(\forall t_1, \cdots, t_k)(\mathfrak{A}_m(0, t_1, \cdots, t_k) \wedge (\forall y)(\mathfrak{A}_m(y, t_1, \cdots, t_k) \to \mathfrak{A}_m(y+1, t_1, \cdots, t_k))\} \to (\forall x)\mathfrak{A}_m(x,, t_1, \cdots, t_k)$ のような可算個の公理表になる。

1) A が一価写像のグラフに相当する類 (class) であるとき，集合 X の A による像 y はまた集合になることを示す公理。A を論理式として明確に表現することが，ここでの問題である。

ろう。そこでこれは「スコーレムの逆理」と呼ばれるが，実際には，これは集合論をおびやかす型の逆理ではない。それはただ，記述の「正確」を重んじた結果が，対象の範囲を限定した，というだけのことで，この逆理は反常識的だが正論なのである。

例(たと)えば，閉区間 $[0, 1]$ の実数の全体（すなわち自然数の部分集合全体）は可算集合でない，という対角線論法は，その体系で定義される「自然数」なる対象の全体と，その「自然数全体」の（その理論内で定義される）「部分集合」の全体との間には，その体系において表現されるような「一対一対応」が存在しない，というだけの話である。子供が本気でやっていることが，傍(はた)から見るとママゴトに過ぎないように，この「正確」な集合論の世界は，外から見れば可算に過ぎない対象の間に，「濃度」や「順序数」などの区別を立て，あたかもそれが本来の集合論であるかのように振舞っていると見えるのである。

こういうことができるのは，前の自然数論の場合と同様，想像的理解を交えて頭で考えていた集合論の対象の大部分が，そのモデルの中には取り上げられていないからである。もちろん，そういう狭い対象の中で，いかに「正確」に限定したにもせよ，話のつじつまが合うというのは不思議なことで，それを示したのがスコーレム=レーヴェンハイムの定理の手柄である。

コーヘンのモデル　われわれは前にゲーデルのモデル Δ に関連して，$V = L$（Σ の集合の全体は「構成的」集合の全体と一致する）という主張に触れた。ここでは，コーヘンの仕事の中で，この $V = L$ が成立しないモデルについて説明しよう。ゲーデルの項で触れたように，$V = L$ は，モデル Δ における選択公理，一般連続体仮説の成立を示す重要な段階であったが，コーヘンの場合の，選択公理や一般連続体仮説の成立しないモデルも，$V = L$ の否定と同じ理窟で，ただし一段と技巧をこらした形で作られる。

コーヘンは，集合論の公理系[1] が無矛盾との仮定の下で，$V = L$ の成立するモデルの中の最小のもの M を取る。スコーレム＝レーヴェンハイムの定理によると，M は外から見ると可算集合でなくてはならない。そこでコーヘンは，一方で M の（外から見たときの）加算性と，他方では M が集合論のモデルであるという性質とを巧みに使い分けながら，M と同じ程度の大きさをもったモデル n を作り，その中で $V = L$ の成立を妨げようとする。

モデル M の「集合」は外から見てすべて高々可算集合であり，M の全体も加算集合であるから，M の「集合」でない可算集合も外から見ればたくさんあることがわかる。そこでその一つ a をうまく選び出して M の中に「集合」として参加させ，しかも M のその他の構造を本質的には乱さないまま，その全体を新しいモデルにすることができれば，それは N における V（N の「集合」の全体）には属していながら，N における L（N の「構成的集合」の全体）には属さないことになる。すなわち N において $V = L$ は破られるわけである。けれども，下手に a を M に加えると，その結果は集合論のモデルでなくなるおそれがあり，この点にコーヘンの工夫がある。

ゲーデルのモデル Δ が空集合 ϕ だけから出発して構成されていることは，既に述べた。しかもその Δ が集合論のモデルであることは，まさにこの構成によって確かめられることなので，この方針を捨てることは得策ではない[1]。そこでコーヘンは ϕ の他に，目的である a を形式的に（すなわち，さしあたりメンバー未定のまま，ただの記号として）構

1) ゲーデルのモデル Δ は，「集合」と「類」との二つの基本的対象と，それらの間の基本的関係「$\in$」との現われる公理系で考えられたが，コーヘンの最初のモデルは，具体的にいうと，「集合」と「$\ni$」関係とだけの現われるツェルメロ・フレンケルの公理系の中で作られていた。

1) コーヘンの 1966 年の著書 *Set theory and the continuum hypothesis* では，多少改良された形が用いられている。

成に参加させ[2)]，M と「同じ程度の大きさ」のモデル（すなわち M の順序数に沿って構成されるモデル）を一応作ってしまう。そして a の中身は M の内部構造を細心に見渡しながら，それが集合論のモデルだという状況を破壊しないように定めていこうとするのである。

a を決めるべき条件は二つある。第一は，a が M の各集合（構成的集合）と少くとも一つの元で喰い違っていること，第二は，N の論理式には M になかった集合 a が介入してくるが，集合論のモデルとして完成している M の特徴を，a が破壊しないこと，の二つである。この二つの条件を守りながら a を決めるのは実に微妙な仕事で，コーヘンの着想の妙はまさにこの点にあるが，それを簡単明瞭に説明することは私の力に余る。ここではただ，そうして決められた a は，外部から見たときの M の性質（えば「a は可算である」など）を決して使ったことにならぬよう，ただ M の各対象が一般に持つ性質だけから決まるよう工面（くめん）されている。この意味で，a は M に対して「一般的 (generic)」な元として決まる，と言われ，そのため a は，N において生じうる一切の性質から逆に「強制 (force)」されて定まることになる。この強制という考え方こそ，コーヘンが集合論の世界に新しい道を拓きえた原動力なのである。

3-9．二三の歴史的展望

われわれはカントル，デデキントから始めて，現代数学の理論的根拠としての無限論について見てきた。第 2 章以来ここに至る動きを見ると，無限集合を数学の中に取り込むことは或（あ）る程度まで必然の勢いで

2) モデル Δ では一つの「集合」が構成される以前に，それの「元」はすべて構成ずみであるようになっており，しかもこの性質はその理論の中で極めて重要な役割を果している．そこで N の構成の際には，0 以下の「自然数」を前置し（それらは「構成的」だから前置しても困らない），その後に a をおくことによって，この性質を守っている。

あったと思われる上――もちろん口ごもりながら無限論の周辺を回っていることと，その数学的存在性を積極的に肯定あるいは活用することとの違いは重大であるが――，それが今日の数学に理論的根拠を与えていることは，もはや否定できない。ところが本章で見たことは，その根底が意外に不安定であって，少くとも事は初めに予想されたほど単純明瞭でないという事実である。

もっとも，普通に数学をやる場合，人はそこ迄遡(さかのぼ)らない，普通の数学的事実の正しさは，理論による以前に，人類の長い経験によって信じたくなるようなものだからである(第 5 章)。この意味で，数学の無限論的基礎づけにこだわるのは，一種の趣味の問題と言えるかもしれない。しかしそれはあくまで数学の哲学的根底に触れる問題であり，歴史的にも多くの要素をもっているから，次になお二三の事柄(ことがら)を補足しておこう。

数論化の問題　集合論の成立以後，数学の基礎に関する考え方に現われた最大の特徴は，そこに用いられる論理をも取り込んだ形で行なわれた数論化ということであろう。普通の意味での論理をも含めた数学の体系を，メタの立場から数論化することは，ゲーデルあるいはスコーレム以後コーヘンに至るまで，数学の基礎を論ずるのに基本的な態度になっているが，数学史の上から見ても，それは重大な意義を持つように思われる。というのは，われわれの論理的推論過程は，(例えば車窓から見る外の景色のように) 思考内容が連続的に変っていくのではなく，(例えば「A である」，「A ならば B である」，「故に B である」というように) 論証という段階的，不連続的な歩みの形をとって行なわれるものであることが，それによって明瞭に意識されるからである。

この過程を自然数の中に埋め込んだのはゲーデルの功績であるが，それにしても，数学を基礎づけるのに，自然数がこうした役割を演じうるという事実は，自然数という対象が数学の基礎を論ずる際に占め

る優越性を示していると思われる。その優越性は，例(たと)えば幾何学という，より連続的な対象を捉(とら)えてこの中で論理を表現しようと試みれば，はっきりするであろう。幾何学（「について」でなく）「の中に」証明をはめこむことなど，ちょっと考えられない。少くともこの考えの線上では，連続者は，（例えば時間意識の流れというような形で）証明という段階的・不連続的な区切りが作られるための場所を，せいぜい潜在的に提供するぐらいの役割しか持っていないように思われる。

もっともこの自然数の示す優越性は，（第 3 章第 7 節で述べたように）半面において一つの理論を形式的かつ正確に表現する仕事が，所詮(しょせん)いかに舌足らずに終るかを示し，それと同時に，一見単純に見える自然数という無限者が，いかに底深い「深淵」であるかをも示していると言えよう。これは特にスコーレムの仕事（第 3 章第 8 節）中に顕著に認められることであり，コーヘンの仕事は，いわばその間隙を衝いて行なわれたのだが，これをもって見ると，20 世紀の数学は，その独特の形式的表現の方法によって進展し，ついにその表現力の限界をも，或る程度まで見極めたと言ってよい。これもまだ現代数学の，数学史における大きな特色の一つである。

念のために繰返して置くと，（第 2 章以来しばしば指摘した通り）このような数論化の勢いは今世紀になって一挙に起こったものではない。それは主として 19 世紀後半のディリクレ，ワイエルシュトラス，デデキント，さらにその前半に遡(さかのぼ)って，ガウスやアーベルやコーシーというような，いわゆる解析学合理化に貢献した人びとの中に醸成されたものであるが，それと共に，射影幾何学の解析的表現（第 2 章第 4 節）や，本書では触れられなかったが，非ユークリッド幾何学の解析的表現の底などにも，同じような傾向が見える。そして無限者の取り扱いは，ほとんどつねにその傾向の底にあって働いていたのである。

このような数論化の傾向は，言いかえれば（意識の中にあるかに見え

る）連続そのものを回避または克服しようとする試みであり，従(したが)ってまた，幾何学による数学の基礎づけという理論構成——ギリシャ以来 17 世紀ごろまで，ほとんどその唯一の道であったもの——を回避することにも，つながっている。連続者の処理が困難であった点では，古典ギリシャ数学でも，17 世紀（特にその前半）でも，20 世紀とそうそう変っていないように見えるにかかわらず，18，19 世紀を経て 20 世紀の現在にまで来ると，上で述べたような徹底した数論化が現われている。われわれは数学の歴史の中での 20 世紀の特徴として，まずこの点に注目したわけである。

実無限について　カントルの実無限の概念をいかに評価するかという点についても，今日の基礎論は新しい視野を与え，また要求していると思われる。上で触れた，自然数という無限の底に潜む深淵がすでにその例である。

かつてカントルは実無限を論じて，「神の中に実無限者を認めるか否(いな)か，客観的，経験的な物質界においてそれを認めるか否(いな)か，また人間の主観的，先験的な精神活動においてそれを認めるか否(いな)か，この三つの問いに対する諾否によって，古来のあらゆる哲学思想は，2 の 3 乗である 8 個の範疇に分けられる」とした。彼によると，その超限数論はこの第三の問いに肯定的に答えるはずのものなのだが，彼はそこに言葉を続けて，「この三つの問いにすべて肯定をもって答えるのは，恐らく自分が最初であろう。しかし自分はこの後に多くの人が続くであろうことを信じる」と書いた[1)]。

カントルのこの言葉は，その理論に対する激しい毀誉褒貶(きよほうへん)の論の中で書かれた。しかも彼はその間つねに，その形而上学的—数学的実無限論が，終極的には，無限者たる神に支えられて，単一純正なもので

1) *Über die versclaiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*（実無限に関する種々の見解について）(1890)，*Mitteilungenzur Lehre vom Transfiniten*（超限論に関する報告）(1887–1888)。

あることを信じつづけていたのであろう。

カントルの思想はやがて数学界の全体を風靡し，「カントルの創ったパラダイス」（ヒルベルト）というようなことまでが言われるに至ったが，皮肉なことに，他ならぬそのヒルベルトの思考の線上で，カントルの実無限論が改めて深刻な事態に逢着（ほうちゃく）していることを，われわれは既に見てきた。ゲーデル，スコーレム，コーヘンなどの仕事を始め，ここでは触れられなかった今日の基礎論の動向には，実無限という名の集合を扱う集合論の実態が，結局は自然数論のような小宇宙（ミクロコスモス）の中に収められて，しかも自然数のもつ仮無限性——どこまで行っても尽きないという性質——の中で，もてあそばれているようなところが見えぬものでもない。もっとも，これと同様のことはカントル自身の超限数創成の過程（p.140）にもあったし，ボレルやルージンの集合論批判の中にも見えていた。ただ，ゲーデル，スコーレム，コーヘンなどの場合には，事柄（ことがら）が極めて鮮明にとらえられているだけに，どうしても実無限なるものへの深刻な反省を迫られる。孫悟空とお釈迦様の関係——悟空が天空一杯に暴れ回って戻ってみたら，それはお釈迦様の掌の上のことだったという話——さえ，ここでは連想されるのである。

そもそもカントルの考えた「実無限」の具体的内容には，後の公理的集合論で表現されたものがすべて入っていた——あるいはむしろ（集合論の現状を含めて），入りうる——と言えるのであろうか？ この問いに肯定的に答えるとすれば，それはとりもなおさず，カントルの議論にあった表現の曖昧さの功徳（くどく）（？）であろう。カントルの「集合」を頭の中に思い描く場合には，何かそれで一切が出来ているように思えないものでもない。しかしそれらの「集合」の間にある脈絡を明らかにしようとすると，「集合」なるものの内容については，（論理の問題を含めて）明確な表現が求められる。そしてその場合，ツェルメロ＝フレンケルの公理的集合論からゲーデルのモデル Δ 位まではともかく，

コーヘンの示した多くの「集合論」に見る錯雑した関係は，どうみてもカントルの念頭にはなかったに違いない。しかしそれでもなお，ここでカントルの理想境は決定的な幻滅に終ったと言ってよいものかどうか。人間が今後開拓するかもしれぬ表現能力の中には，カントルの理想境を再興するだけのものがないとは，今日誰にも言えないことであろう。（現にゲーデルはこれを信じているといわれる[1]）。要するにここにはカントルの示唆（しさ）した統一的な「実無限」の像をめぐって，なお深刻な反省を要する問題があるのではなかろうか。

人間的要素の介在　最後にもう一つ，現代の数学的認識における人間的要素の介在をどう考えるか，という点について触れる。

考えてみると 20 世紀においては，まず物理学の中で，観察し，観測し，あるいは操作する主体としての人間の役割が指摘されている。すなわち特殊相対性理論における観測者の意義，量子力学における観測の問題などがそれである。物理学が自然の単なる記述でなく，むしろ未知の現象への予言までのできる数学的理論となったのは，ニュートンの『プリンキピア』以来のことである。この時以後，18 世紀の数理物理学の成功によって，人は数学の予言力の大きさを知ったのであろう。19 世紀も後半のマクスウェルのあたりから，数学的理論の自然に対する適用は目に見えて奔放になってくる。すなわち，一見，擬制とも空想とさえも見えるような数学的構築物を把えて，これを自然に向って適用あるいはむしろ強要し，その帰結を自然の中に要求するということが始まってくるように見える。物理学は，自然の一つの側面（例えば電気現象）を，同じ自然の中のより単純な側面（例えば流体）によっておきかえるという傾向を離れて，少くとも見た処は全く抽象的な数学の理論の中に，その真相を求め始めるのである。量子力学とヒルベルト空間論（次章）との関係などはその最も適切な例であろう。こ

1) 竹内外史「集合論的世界像の建設」，『自然』1964 年 8 月号

れは既に，数学という人間の創造物——ここではあえてこう言っておく——を自然に適用するという意味で，多分に人間的な一面をもっ仕事である。しかしそれにしても，自然の一部である人間の自然の中でのふるまいが，人間の自然認識の中にいかに底深く反映するかということが意識され，それがしかも理論的に表現されたという点において，20 世紀における上記の二つの物理学的問題は，ひとしお大きく人間的要素の介在を示しているように見えるではないか。

さてこのような事情を一方においてみるとき，われわれは，ここ半世紀ほどの間に形式的体系の限界に関して明らかにされたいくつかの仕事，特にゲーデルの決定不能定理のことを思わぬわけにはいかない。すなわちそこでは，人間が書きしるす或(あ)る体系からの演繹可能性ということが，先験的あるいは超人間的な真偽の問題の代りに置き換えられ，それが人間の形式的表現力の大きさとその限界とを示すようになっている。してみると，これは，少し前までの，超人間的な天降(あまくだ)りの真偽を問題としていた数学あるいは論理学とは，かなり重大な違いを示していると言えるであろう。もちろんそれらの仕事の中にも，初めに与えられた体系が無矛盾であるという，（人間の手に届きそうにない）超越的な前提が置かれているのが普通だが，それにしてもこうした傾向の仕事は，過去には全く見られなかったことだと思われる。単なる試論に過ぎないことだけれども，これもまた，20 世紀における数学ないし数理的科学の一つの特徴ではないか，と述べておく。

× × ×

実をいうと私は，ともすれば歴史における現代というものの価値を過大に評価すまいと自制する傾向にある。しかしそうは言いつつ，数学的無限論の変遷という多少とも限られた側面だけを取ってみても，19 世紀末から 20 世紀にかけての学問の動きには，ただならぬものを感

じずにいられない。そして学問の進歩というものは，時として極めて短い期間の間に，飛躍的に進行するものだということを改めて痛感する思いである。プラトンの学園，アルキメデスの前後，15 世紀，16 世紀から 17，18，19 世紀と見てくると，そのような飛躍の時は意外に長くはないように見える。しかもその影響は長く人びとの間に残るのである。そうしてみると，今日の数学の基礎をめぐる多くの業績にしても，（次章で略述する現代数学一般の業績と共に），おそらく今後長い期間にわたって，数学史における一つのピークをなすのではないか，（カントルの 1883 年の論文から数えれば百年に近いとはいえ），ゲーデルの 1931 年の論文の頃から本書執筆現在（1973 年）までの約四十年の年月は，人間の数学的活動の何千年の歴史に比べればまことに短い年月である。しかしそういえば，エレアのゼノンの前後，プラトンの学園，あるいはガリレイの『新科学対話』（1638）からニュートンの『プリンキピア』（1687）までなどにしても，年月として必ずしも長いものではない。特に近代になってからは，人はいつも自分の生きる時代を進歩の頂きにあると見る傾向をもつようであるが，少くとも数学の歴史において，そのような一般的傾向としてではなしに，現代は，つねには遭いがたい一つの偉大な時代であるように思われる。

もっとも，このような楽観的な見方がありうる反面，これと対立的に，無限の問題は人間にとって永遠無限の問題であり，カントルにしても，ゲーデル，スコーレム，コーヘンにしても，所詮（しょせん）その「深淵」の或（あ）る深みを探っただけだという悲観的な見方もあるであろう。そしてあえて私見をさしはさむならば，この二つの考え方は必ずしも互いに背馳するものでなく，人間の形づくる無限論の中につねに共存していくもののように思われる。

第 4 章　20 世紀的現代数学

今までは集合論から数学基礎論に至る問題に視野を限定してきたが，もちろん現代数学の意義はこれに尽きるものではない。その社会的意義（第 4 章第 4 節）はもとより，理論面における意義にしても，その本当の大きさは，むしろ第 3 章で述べたことの上に始まるという方が正しいであろう。ただそのことを真正面から扱うことが，筆者にはとてもできない上，問題自身の意義を考えて，あえて対象を無限論にしぼったのであった。その意味で本章は決して本格的な現代数学史ではないが，それでもせめてその片鱗を示すつもりで，第 2 章の話題の延長上にある事柄（ことがら）や，特に現代数学として特徴的な事柄（ことがら）について，二三取り上げることにする。

4-1．ヒルベルトの「数学の問題」

ヒルベルト　ヒルベルト (1862–1943) のことは既に前章で触れた。彼はドイツの人，20 世紀前半における代表的な数学者で，1895 年以後は，1930 年の引退まで，つねにゲッチンゲン大学教授の地位にあった。ガウス，ディリクレ，リーマン，クラインと続いた，あの伝統あるゲッチンゲンである。当時，この地は世界の数学の総本山のような感があったという。

ヒルベルトは多方面の人で，初期 (1885–93) には当時の不変式論（第 2 章第 4 節）の総決算的な仕事をした後，代数的整数論，幾何学基礎論，積分方程式論—— 今日のヒルベルト空間論（第 4 章第 2 節）の起源，物理学，数学基礎論などを，或（あ）る期間，集中的につぎつぎ研究して成果を収めた。しかも彼はそれらの仕事を介して，20 世紀数学の全体に対して大きな影響を残している。

彼の残した影響の第一は，今迄にも何度か述べた公理主義の思想の確立で，その時期は幾何学基礎論の時代に遡（さかのぼ）る。数学基礎論の開拓は，

もちろんその展開である。またその第二は，数論，代数，幾何，解析という数学の古典的分類の解体再編成の機運を醸成したことで，上記の不変式論や積分方程式をはじめ，，従来別個の領域のものと見られていた他分野間の問題の間に，隠された脈絡を見出すという型の仕事が多い。ブルバキの数学的構造の考えも，直接にはこれらのこと，特にこの第二の点に発しているといってよい。

「数学の問題」　19 世紀と 20 世紀とを区切る 1900 年，第 2 回国際数学者会議がパリで行なわれたが，ヒルベルトは招かれて「数学の問題」と題する講演を行ない，今後解かれるべき問題の例として 23 題の問題を提起した。これについては幸いに一松氏の優れた書物[1] があるから，ここではごく簡車に触れるだけにしておこう。

この講演は，数学における「問題」なるものの意義を説くことから始まる。

> 歴史は科学の発展が連続的であることを教えている。われわれは各時代がいくつかの問題をもっていることを知っている。……近い将来における数学的知識の発展の可能性を想像しようと思うならば，われわれの精神に未解決の疑問を課し，現在の科学が直面して，その解決を将来にまっている問題に注意しなければならない。……その大きな時代の境界〔1900 年〕は，われわれに単に過去をふりかえってみるだけでなく，われわれの精神を未知の未来へ向けようと強制している……（一松氏の訳による。以下も同様）。

すなわち問題なるものは過去を未来につなぐものであり，未来を解く鍵であり，未来への目標なのである。そして

> 科学のある分野が豊富な問題を提供する限り，それは生命に満ちあふれている。問題の欠乏は死を，すなわち独自な発展の停止を意味する。

1) 一松信訳『ヒルベルト数学の問題』（1969，共立出版）。

このあと,「よい数学の問題」ということについての吟味と，その解決についての示唆に富んだ分析があり，最後に，正しく提起された問題についての彼の「信念」が吐露される：

> 他の哲学的基礎とともに，多くの数学者が確かにそう思っているが，今日までほとんど誰も証明によって確立してはいない次のような信念を生ずる。——私はこの信念を信ずる：定まった数学の問題は，厳密な解決を是非とも必要とし，その解決は，もし解があるならば，その問題に解答を与えるか，あるいはその解答は不可能であり，したがってそれを解こうとする努力が失敗したのは当然であったことを証明するか，そのいずれかである。

すなわち「すべての数学的問題が解決されるという信念」である。これはしかもヒルベルトの数学的思想の深い動機をなしているもので，これと同じ言葉は 25 年後に，例の『無限について』の中で再び繰返されている。

ヒルベルトの問題はことごとく，彼自身が研究を進めた問題と関連している。例えば第 1 問題は「連続体問題」であり，第 2 は「自然数論の公理の無矛盾性の証明」である。以下，彼の言葉によると第 6 までは数学的科学の基礎に，第 7–14 は数論および代数学（ただし第 12 は，代数学と深い関係をもつ関数論の問題）に，第 15，16 は代数学と幾何学との中間領域に，第 17 は幾何学に，第 19–22 は解析関数に，最後の第 23 は変分法に，それぞれ関連する問題となっている。

しかし事実においてこれらの問題は，その名目の如何にかかわらず，二つ以上の分野にわたる考察を予想させ，それらをつなぎ，かつ覆う網を指摘する態のものが多い。言いかえれば数学の古典的分類——数論，代数，幾何，解析が解体を始めたのはこの問題の視野の中であって，これはヒルベルトの問題がもつ重大な歴史的意義の一つである。

今述べたことを跡づけるには，具体的にいくつかの問題を取り上げ

て説明するのが本筋である。しかし数学的内容を抜きにして話してみてもあまり意味はないので，諸分野間の連繋を示す点では必ずしもよい例ではないが，第 10 の「ディオファントス方程式の可解性を決定する問題」にだけ簡単に触れておく。

ディオファントス方程式（または不定方程式）というのは，整数係数の代数方程式（単独または連立）を，解が整数であるという条件の下で解く問題で，その最古の例は古代ギリシャ末期の数学者ディオパントスの書物にある。ヒルベルトはこれについて，「任意個の未知数を含む不定方程式が解けるか否(いな)かを，有限回の演算で決定しうるような一般的算法を見つけよ」という形で問題を提起した。これは一見まったく数論上の問題であるかに見えるが，最近これは形式化された自然数論の中で吟味され，1970 年，マチャスヴィッチによって否定的な形で解決された。

絶対的な意味での無矛盾性の証明が絶望的である現在，このような，いわゆる決定問題のアルゴリズムを求める問題は数学基礎論の大きな対象の一つである。しかし形式化されたこの種の問題においてはアルゴリズムの存在しえないことの方がしばしば証明されている。（『岩波数学辞典』「決定問題」参照）。

その他の問題については，前に引用した一松氏の著書を参照されたい[1)]。

---

1) 日本で特に有名な二三のものをあげる。リー群の定義に関する第 5 問題（解決；解析学，代数学，位相数学などの諸分野に関連する；山辺英彦 (1923–60) をはじめ日本人の寄与がある），整数論における相互法則の一般化に関する第 9 問題（解決；高木貞治 (1875–1960)，アルティン (1898–1962)），類体の構成問題という形で代数学，関数論に関連の深い第 12 問題（未解決；日本でも志村五郎 (1930–2019)，谷山豊 (1927–58) などの寄与がある），或る完全関数系の有限性の証明を求める第 14 問題（否定的解決；ヒルベルトの不変式論の延長上にある問題；永田雅宜 (1927–2008)），定符号の関数を平方和の形で表わすという第 17 問題（解決；抽象. 代数学のあげた最初にして決定的な成果；アルティン），保型関数による解析

4-2．古典解析学の進路

現代の解析学となると，まことに広い話題になるが，ここでは第 2 章の延長として，実関数論のその後の展開について二三述べる。その場合，集合論の成立以後のこの分野での問題としては，カントルに始まる点集合論——位相数学の一つの源——と，ルベーグにおいて一段落する積分論とに焦点をしぼってよいであろう。

(a)　点 集 合 論

点集合論の起こり　カントルの集合論が点集合の研究に始まったことは前に述べた。すなわち，1 次元ユークリッド空間(数直線) R_1，2 次元ユークリッド空間(平面) R_2，一般に n 次元ユークリッド空間 R_n[1] などにおけるいろいろな図形を点の集合と見なし，それらの点集合，ないしそれらに属する点，属さない点などの性質を研究するのが，点集合論の第一歩である。点集合 M の第 α 次導集合，M の集積点などの例は第 3 章であげた。

点集合論はまず実関数論に一つの重要な視点を提供した。この問題は測度論と密接に関連しているが，後者は別に述べることとし，ここではまず微分積分学に相当する範囲から簡単な例を挙げる。

集合 M の集積点 p は必ずしも M に属さない。(例：M を，0 以上 1 以下の有理数の全体とすると，同じ範囲の実数はすべて M の集積点である)。特に，M の集積点がすべて M に属するとき，M を閉集合という。R_1 における閉区間 $[0, 1]$，R_2 における円 (円周およびその内部)，R_2 における R_2 自身などはいずれも閉集合である。閉集合 M が，その空間の

的関係の一意化に関する第 22 問題（部分的解決；広中平裕 (1931–) の寄与がある）など。

1) 2 点 $P(x_0, x_2, \cdots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の距離が，ピタゴラスの定理の流儀によって. $\sqrt{\sum_k = (x_k - y_k)^2}$ として定義された空間。

中で有限の範囲内に納まるとき，M を有界閉集合という。上の三例のうち初めの二つは有界閉集合であり，第 3 例はそうではない。

点集合論と解析学　さて第 2 章第 7b 節で，「閉区間で定義された連続関数は，その区間内で最大値，最小値を取る」という定理をあげたが，この定理は「(n 次元ユークリッド空間の中の) 有界閉集合 M で定義された連続関数は，M において最大値，最小値を取る」という形に一般化され，一変数関数のみでなく，多変数関数の場合をも一挙に扱うことができる。これは，古典的な微分積分学の理論構成が，点集合論的考察によって整理された一例である。

点集合論は関数論にも有力な武器を提供した。例(たと)えば解析関数 $w = f(z)$ がいかに多価であっても，それが 1 点 z において取りうる値は高々可算である。この事実はボアンカレとヴォルテラの定理と呼ばれ，ユークリッド空間 R 内の有理点 (各座標が有理数となる点) の全体 M が R において稠密[1] な可算集合をなすことに基づいて証明される。

点集合論の抽象化　しかし今迄述べてきたような意味の点集合論は，やがてさらに一般化の度を進めてくる。すなわちその図形のおかれる「空間」は必ずしもユークリッド空間でなくてもよいことになり，むしろ一つの理論の舞台となる「集合」というふうに割り切られてくる。要するに「空間」とその「点」とは，「集合」とその「元」というのと同義と見なされるのである。「距離」の概念も，一般にピタゴラスの定理などは使えないから，その骨子を抽象した形で与えられ (距離空間)[2]，ついでさらに前進して，「距離」の概念も捨象した形で「極

---

1) R の任意の点が，M の点からなる或る点列の極限点となること，すなわち R の各点は M の導集合 M の点になること，一般に空間 S の部分集合 A は，A と A' との和集合 (A の閉包 $\overline{A}$) が S と一致するとき，S において稠密であると呼ばれる。

2) 空間 S の任意の 2 点 p, q に対して実数を対応させる関数 $d(p, q)$ が，

$$(1)\quad d(p, q) \leqq 0, \qquad (2)\quad d(p, q) = 0 \leftrightarrows p = q,$$
$$(3)\quad d(p, q) = d(q, p), \qquad (4)\quad d(p, q) + d(q, r) \leqq (p, r)$$

という性質をもって定義されるとき，d を「距離」関数，S を「距離空間」という。

限」,「連続」などの概念が論じられるように変っていく。これは既に位相数学の世界である。

ヒルベルト空間　以上述べた意味での古典的な点集合論が位相数学に変っていくについて, 解析学の方面で二つの重要な理論をあげておく。

ヒルベルトが積分方程式の研究を行なったことは前に触れた。積分方程式というのは，未知の関数の積分を含む方程式で，その未知関数を決定することが問題である。彼はそのとき，線型積分方程式（未知関数およびその積分の 1 次式であるもの）を，未知関数のフーリエ係数が満たすべき無限に多くの連立 1 次方程式と見なして事を運んだ（1904–10)。もっとも，彼はそこでは無限次元空間ということは明言しなかったが, 無限多変数の関数の連続性などの概念は既に組立てている。結局，それは n 次元ユークリッド空間の無限次元空間への一つの拡張になっていたわけで，やがてフォン・ノイマンが，その本質的な性質を抽象して体系化し，今日ではそれはヒルベルト空間と呼ばれている。量子力学を表現するのに最も適切な表現形式となったのはこれである。

フレッシェの関数空間　ヒルベルト空間がユークリッド空間の直接的拡張であるのに対し，フレッシェがその学位論文（1906）以来展開した関数空間の理論（もとの名は汎関数論）は，一段と抽象化が進んでいる。すなわち関数空間というのは関数の集合（従(したが)ってその「空間」の「点」は関数）で，その空間に対して「極限」,「連続」あるいは「測度」などが導入されたものである。

例(たと)えば関数列の極限と点列の極限とは，ある程度まで並行に論じられる。これをより一般的に，すなわち集合の具体的内容（実数の集合か, 関数の集合かなど）にとらわれずに，いわば「空間」の中の「点」の列のつながり具合として包括的に論じようというわけである。

実例をあげれば，閉区間 l で定義された連続関数の集合（すなわち空間）C において，その 2「点」$f(x)$, $g(x)$ の「距離」$d(f, g)$ を

$$\max_{x\in I}|f(x)-g(x)|$$

と定義すると，「点」列 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots\cdots$ が「点」$\varphi(x)$ に「収束」することは，

任意の $\varepsilon>0$ に対して，正数 N が定まり，$n>N$ である限り

$$d(f_n,\ \varphi)<\varepsilon$$

となる

ことと表現できる。これは従来の表現によると，上記の関数列が $\varphi(x)$ に一様収束することに相当することが容易に確かめられる。

このような考察を，実数の集合で得られた知識からの類推を含めて進めていくわけだが，もちろんその類推の破れるところがいろいろ出てくるので，その辺の事情はさらに吟味されねばならない。例(たと)えば上の関数空間の代りに，区間 I で定義された $f(x)$ で $\displaystyle\int_I|f(x)|^2dx$（積分はこの後で述べるルベーグ積分）が有限確定なものの全体を取ると，それがヒルベルト空間をなすことなどもわかっている。いずれにしてもこのような考察は更(さら)に抽象化され，現代の位相数学的取り扱いを生む一つの機縁になる[1)]。フレッシェに始まる関数空間の手法は，現代解析学の一つの大きな流れである。

超関数　ここで，より古典的な解析学につながりながら，しかも最も新しい方向に向いつつある一つの理論について簡単に触れておく。

物理学，工学などの分野では，従来の関数概念では説明がつきかねるにもかかわらず，用いて非常に便利な一種の「関数」があった。有名な例として，ディラック（1902–1984）が量子力学に導入したデルタ関数 $\delta(x)$ というものがある。これは本質的には

$$\delta(0)=\infty,\quad \delta(x)=0\quad (x\neq 0\text{のとき}),\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

1) 関数空間は，一般に線型位相空間と呼ばれるものの一種である。線型位相空間については，『ブルバキ　数学史』「線型位相空間」の章の他，『岩波数学辞典』のその項を参照。

という性質をもつもので，元来は量子力学において，連続的な場の中に存在する物質的「点」——場と物質の境には本質的な不連続性が潜む——が，数学的には大きさのない点として表現されざるをえない，というような事情を反映して生れたものだが，もちろんこのような「関数」は古典的な意味の関数概念では説明できない。数学の側から言うと，この種の対象は特に偏微分方程式論[1] の方面に少からずあって，そこでは関数概念の拡張が望まれていた。

この方向での研究は波動方程式に関するアダマール（フレッシェの恩師）の研究（1932）を始め，いろいろ試みられていたが，シュヴァルツは関数空間の考えを用いて，すなわち或(あ)る関数空間の汎関数を普通の関数の代用として考えることによって，関数概念の拡張である超関数 (distribution) の概念を導入し，その試みに成功した（1945）。ディラックのデルタ関数などの擬似的対象は，これによって真正の数学的対象となり，さらに加えてフーリエ解析，例(たと)えば確率論その他にも応用されるに至っている。

超関数自身の，実際に意味のある一般化もいくつか試みられている。佐藤幹夫（1928–）による佐藤の超関数はその優れた例である（1958）。また，ここでついでに一言すると，後記のルベーグ積分やこの超関数で武装した現代的な確率論は，その独特の対象と手法によって，例(たと)えば偏微分方程式論などに寄与しつつあり，急速に次の時代の数学の中心的位置の一つに迫りつつあるように思われる。ここでも日本の数学者グループの活躍が目立っのだが，残念ながら私にはこれらをうまく解説する力がない[2]。

---

1) 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，それらに関する未知関数，およびその偏導関数の間に成立する方程式を偏微分方程式という。波動方程式，熱伝導方程式などはその例である。

2) 竹内順治「コルモゴロフ」（赤・前原・村田編『数学のすすめ』（筑摩書房）所収）参照。

(b)　ルベーグ積分論

点集合論に始まった話が少し現代まで先走り過ぎたので，ここで，もう一度 19 世紀の末に戻って，リーマン以後の積分論の動きを見ることにしよう。

ルベーグ積分への道　積分法は古代の幾何学的求積法(アルキメデス)に始まり，17 世紀以後は微分積分学の基本定理が意識されると共に，微分法の逆算法という面が強調されたが，19 世紀になると解析的 (すなわち記号法的) 求積法として改めて正確に定義され，基本定理も精密に証明された (コーシー)。ついでリーマンは，コーシー流の積分概念の下で，$f(x)$ が積分できるために満たすべき必要十分条件を出し，関数概念拡張の勢いを必然にした。以上は第 2 章で述べたことだが，既に必要十分条件が出た以上，コーシーの流儀の積分概念は，何か本質的変更を受けない限り，もはや拡張の余地はなかったわけである。もちろん必要もないのに理論的拡張を試みるというのであれば，そこに格別の意味はない。しかし実際にその必要がないわけではなかった，

まずフーリエ級数については，リーマンやカントルなどの後も，いろいろの問題があり，リーマン積分によるその取り扱いは，必ずしも事を簡明にするものではなかった。また微分積分学の基本定理に関しても，特にリーマンによる積分概念の拡張後は，かえって或(あ)る面倒な事情が残った。これらはやがてルベーグによる積分概念の拡張によって，フーリエ級数に関する問題は大幅に前進し，基本定理の問題も極めて透明な形で解決することになる。

フーリエ級数に関する問題は省略するとして，微分積分学の基本定理に関する面倒な事情というのを，まず説明しておこう。リーマンの拡張によってリーマン積分可能な関数は必ずしも連続関数に限らぬことがわかったが，それと共に不連続関数の場合には基本定理が必ずし

も成立しないという事態が生じた。例(たと)えば或(あ)る関数の導関数が連続性を欠くとき，後者のリーマン積分は可能でないことがある（ディニ，ハルナック）。また或(あ)る不連続関数がリーマン積分可能なときでも，それを積分して微分すると，元の関数に戻らぬこともある（ハルナック）。ルベーグ積分はこの他多くの細かい状況を，一挙に大幅に克服したのであった。

ルベーグ (1875–1941) は，測度すなわち長さ，面積，体積などの概念一般に関する深い吟味から出発する。実際，一変数関数 $f(x)$ の積分とは $f(x)$ の縦線図形[1] の面積に当るものであり，$f(x)$ が積分不能とはその面積に当るものが（理論的に）「測れ」ないということだから，従来測れたものがもとの値のままで測れるばかりでなく，従来は「測れ」なかったものも理論的に「測れる」ように，「面積」の意味を拡大することができれば，「積分」もまた拡張されるわけである。

ジョルダン測度　積分概念に対する測度論的な吟味は，1890 年ごろからジョルダンなどの手で進められ，その結果，リーマン積分可能ということの意味は，測度論の方面からも明らかにされてきた。すなわち彼は，後にジョルダン測度とよばれる測度の定義を与え，リーマン積分可能とは，縦線図形の面積がジョルダン測度を持つことに他ならぬことを確かめたのである。

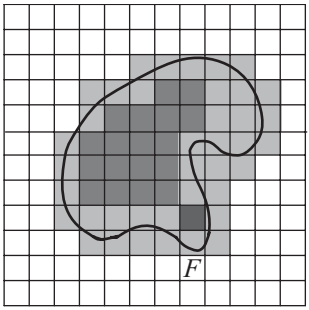


図 4-1

F のジョルダン測度，すなわち図形 F の面積は次のように定義される。F に対し，辺が座標軸に平行な多角形（凹凸を許す）で F の中に包

1) $f(x) \leqq 0$ のときで言えば，$y = f(x)$ のグラフ，x 軸，2 直線 $x = a, x = b$ の四者の囲む図形をいう。リーマンの意味でもルベーグの意味でもその「面積」が $\int_a^b f(x)dx$ である。

み込まれるものと，F を包み込む同様の多角形とで，F を内外から挟み，碁盤目を細かくしていくとき，内外の多角形による上下の近似面積の共通の極限値を，F のジョルダン測度と呼ぶ。もちろんそのような極限値がなければ，F はジョルダン測度をもたない[1)]。

ジョルダンの測度の定義はまことに自然だが，これの最も大切な特徴に有限加法性ということがある。すなわちこの測度によると，一つの図形を，周辺以外に共通点をもたない有限個の図形に分割したとき，各部分の測度が求められる限り，全体の測度は部分の測度の和に等しいことがわかるのである。もちろんこれは自然な性質であるが，この測度では，分割を無限——例(たと)えば可算個——まで拡大することはできない。この点を克服したのはルベーグの先輩のボレル (III-3–4) である。

ボレル測度　ボレルは，ジョルダンのように「可測」とは何かを，頭から決めることはせず，自分の意味での「可測」な図形（点集合）の範囲を築き上げる方針を取る。すなわち座標軸に平行な辺をもつ長方形（測度は両辺の積）から出発し，可算個の図形の和集合，共通部分を繰返し取るとき，そこに生じる図形にそれぞれ然(しか)るべき測度を与えていく。この際，周辺以外では重なり合わぬ可測な図形の，可算個の和たる図形の測度は，各成分の和（ただし和が有限の値に収束する場合）になるように定められるので，この点でジョルダン測度のない図形にまで「測度」が定義できる場合が生じる[2)]。

もっとも，ジョルダンの場合の挟み打ち論法のような手法が採り入れられていないため，ジョルダン測度はありながら，ボレルの意味では可測でない集合があったりする。しかし解析学に普通に出てくる点

1) ジョルダン可測でない「図形」はもちろん存在する。例えば，座標平面上で，一辺が 1 の正方形に含まれる有理点（縦横の座標が有理数である点）の全体からなる「図形」F は，これを包む最小多角形は一辺 1 の正方形（面積 1）であり，これに包まれる多角形は存在しない（面積 0）から，この F に「面積」はない。

2) 上註の例は，1 点のボレル測度が 0，全体はその可算集合だから，ボレル測度 0 となる。

集合は，ほとんどすべて「ボレル集合」であるなど，これは実質的には，なかなか強力な定義である。

なお，加法性を可算以上の濃度にまで拡張することは，連続の問題の本質に踏み込むようなところがあって，これは極めてむずかしい。実際，測度が 0 である「点」を連続の濃度だけ集めたものは，一方では正の長さ，あるいは正の面積などをもつ「図形」ともなり，また，カントルの与えた例の中に，連続の濃度でありながらボレル測度が 0 となるものもあるという混沌たる有様(ありさま)なのである。この問題に（たとえ側面からにせよ）攻撃を試みているのは，既に解析学ではなく集合論の先端的な部分（到達不能基数なるものの存在の問題など）になってしまう。

ルベーグ測度　ルベーグの測度はジョルダン測度とボレル測度との利点を兼ね備えた形で定義される。すなわち，まず（無限に拡がってはいない）有界な図形 F を可算個の小長方形で覆い，後者の面積の下限を，F の外測度 $m_e(F)$ と名付ける。次に F を囲み込む大きい長方形 C をとり，C から F を除いた図形（C に関する F の補集合）F' について同じことをして $m_e(F')$ を求め，C の測度（縦×横）から $m_e(F')$ を引いた値を，F の内測度 $m_l(F)$ と呼ぶ。F がルベーグの意味で可測であるというのは，$m_e(F) = m_l(F)$ の場合のことで，この等しい値を F のルベーグ測度 $m(F)$ とするのである。もし $m_e(F) > m_l(F)$ であれば，F は可測ではない。

この定義はジョルダン測度の拡張になっているのみでなく，ルベーグ可測な集合に，適当にルベーグ測度 0 の集合を加え，または引いてやると，それぞれ同じ測度のボレル集合が得られるという意味で，ボレル測度の拡張にもなっていることがわかっている。要するにルベーグの意味で可測な集合は，ボレル集合に測度 0 の集合を添えたり削ったりすることによって，ボレル集合の手の届かなかった処にまで手を伸ばしたものである。そしてこの測度 0 の集合というのは，ルベーグ

の理論の中でまことに巧妙重大な役割を演ずるのである。

ただし，早速断っておくが，このような「測度」によっても「測れない」集合は依然として存在する。というよりも，どんな「測度」を与えても，それで「測れない」集合の存在することが知られているのである。これについては少し後でまた触れる。

ルベーク積分　ルベーグの意味の積分はこの測度の定義を有効に生かす形で定義される。詳細は成書[1] にゆずるとして簡単にその方針を述べる。$f(x)$ を有界な関数 $(m \leq f(x) \leq M)$ として，まず y 軸を有限個の小区間に分割する $(m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M)$。次に関数値が y_1 以上，y_{i+1} 未満に落ちるような x の集合 $E(y_i,\, y_{i+1})$（図の x 軸の太線部分）の測度を各小区間について求め，これにそれぞれの y_i を掛けて加えると，$f(x)$ の縦線図形の下近似が得られ，y_i の代りに y_{i+1} を用いると上近似が得られる。ここで分割の幅の最大値を限りなく小さくするとき，上下の近似値が同一の極限値に収束すれば，その関数はルベーグ積分可能であって，その同一の極限値がルベーグ積分の値であると定義される。

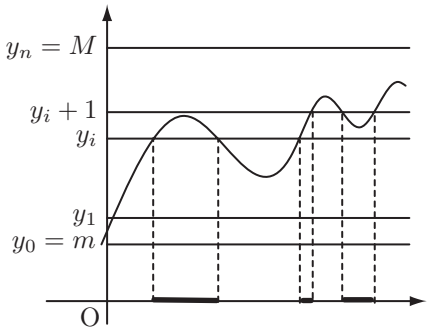


図 4-2

もちろんここで集合 $E(y_i,\, y_{i+1})$ がルベーグ可測か否(いな)かは第一の問題で，可測でない場合は除外する。y 軸の任意の分割に対して，それらの集合がつねに可測になる関数を可測関数と呼ぶと，これに対して，ルベーグ積分はつねに可能である。連続関数，リーマン積分可能な関

1) 『現代数学の系譜』（共立出版）の中に吉田耕作・松原稔訳『ルベーグ積分・長さおよび面積』がある。彌永昌吉『現代数学の基礎概念（上）』(1944) にも優れた歴史的解説がある。ルベーグ積分論については，吉田洋一『ルベグ積分入門』（1965，培風館），河田敬義『積分論』（1959，共立出版）などがある（後者はやや専門的）。

数，ベール関数 (p. 184 脚註) 等の広汎な関数が，すべて可測関数の仲間に入ることが知られている。もちろんリーマン積分可能な関数に対して，ルベーグ積分の値がリーマン積分の値と一致することも確かめられる。

ルベーグ積分の意義　次にルベーグ積分の効用について述べよう。第 2 章第 6 節で述べたフーリエ級数について，(1) 有界関数 $f(x)$ を三角級数で表わしたとき，それは $f(x)$ のフーリエ級数であるか，(2) 関数項の無限級数の項別積分はどんな場合に許されるか，の二つの問題は基本的であった。フーリエは (2) を無条件に肯定した上で (1) を導いたが，(2) にはコーシー，アーベルなどの批判があり，結局これは無条件には成立しないことがわかって，ワイエルシュトラスの手で一つの十分条件 (一様収束性) が与えられた (第 2 章第 7b 節)。ところがルベーグ積分を用いると，或(あ)る一般的な条件の下で項別積分が許されることになり，同じ条件の下で (1) もまたつねに正しいことが示される。すなわち $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ が一様に有界な可測関数であり[1)]，しかも「測度 0 の或る集合を除いて」$\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = f(x)$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

のなりたつことが確められる。フーリエの問題以来リーマン積分に至るまで，項別積分の可能性がこの学問の発展に重大な意味を持っていたことを顧(かえり)みると (第 2 章第 6, 7 節)，この定理の価値も推測できるであろう。もちろん三角級数論はこれで終結するわけではないが，この積分を用いることによって，フーリエ級数論は一段と進んだ立場に立って新しい局面を開き，他の領域とも改めて深い現代的な関連をもつようになったのである。

---

1) 各 $f_n(x)$ が有界であるばかりでなく，$|f_n(x)| \leqq M$ となる正数 M が，n に依存せずに定まる場合を指す。この仮定はもう少しゆるめることができる。

微分積分学の基本定理については，ルベーグ積分の寄与はさらに大きい。例(たと)えばこのルベーグ積分に関する小節 (b) の初めに挙げた二つの問題に対しては，次のような結果が得られている。まず $F(x)$ の導関数は，存在して有界である限り，つねに可測関数となり，従(したが)ってルベーグ積分可能，かつそれは(定数の差を別として) $F(x)$ に一致する。また $f(x)$ のルベーグ積分は，それが連続関数でなくても可測関数である限り，x 軸上の「測度 0 の或(あ)る点集合を除くと」つねに微分可能であって，その範囲では $f(x)$ を積分して微分すると，もと $f(x)$ に戻ることが分っている。

ここで二度ばかり出てきた「測度 0 の点集合を除くと」という断り書きを，ルベーグは「ほとんど到る処」という印象的な言葉で言い表わしている。すなわち彼は，フーリエ級数論にせよ，微分積分学にせよ，その他多くの場合にせよ，事柄(ことがら)を紛糾させる部分をすべてこの狭い範囲にとじこめて，事の大局的なからくりを透明に表現したわけである。

今日，実用的には大抵の場合，リーマン積分で事がすむとはいえ，(もっとも，それもルベーグ積分の特別な場合である)，理論的な目的のためには，多くの場合，ルベーグ積分またはその多少の拡張が使われている。例(たと)えば今日の確率論が厳密な意味で数学的理論になったのは，コルモゴロフによる公理的理論のでき上がったとき (1933) といってよいが，コルモゴロフは確率をルベーグ測度であると表現し，その理論の展開にルベーグ積分を用いたのである。確率論のことは後で少し触れることにしよう。

非可測集合　今迄言いそびれていたが，ルベーグ (1875–1941) はフランスの人，選択公理に関する論争 (第 3 章第 4 節) の際には，ボレルやベールと似た立場を取りつつも，その中では最も公理主義や形式主義に近い考え方を持していた。その彼がいささか得意にしていた事実

がある。それは，ルベーグの意味で非可測な集合の存在——それは前記の通り，不可避なことだが，（現在までのところ）選択公理の援(たす)けを借りることなしには，確かめられていないという事実である。

今日知られている非可測集合の作り方は，大体次のようになる（ヴィタリの集合）。一例として，長さ 1 の線分 L の中にそれを作ることを考える。L を，「合同」でかつ互いに共通点のない可算個の点集合 $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots\cdots$ に分解することができると，その目的は達せられる。実際，各 l_i が可測だと仮定すれば，その測度は同一のはずだが，それが 0 だとすると，その可算和として L の測度も 0 となり，L の測度が正だとすると，その可算和は無限大になり，いずれにせよ，L の長さが 1 という事実と矛盾した結果になるからである。そのような分解のため次の工夫(くふう)をする。まず L の両端をつないで輪にした上，L 上の有理点の全体 r_0（可算集合）を取る，次に例(たと)えば（有理数 $+\sqrt{2}$）の形の無理数の全体 r_1（可算集合）を取る（輪の上で，r_0 全体を $\sqrt{2}$ だけ滑らせる），次に残りの無理数から一つ（例えば $\sqrt{3}$）をとって同じことを繰返す。こうして L は $\aleph$ 個の可算集合 $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_\omega, r_\alpha, \cdots\cdots$ に分解されるが，この各集合からそれぞれ 1 点を取って得た集合を l_0 と置くと（選択公理），l_0 の元に順次，有理数を加える（むしろ輪の上で滑らせる）ことによって，輪の上で合同な可算個の集合 $l_1, l_2, \cdots\cdots$ が得られることがわかる。これは各 r_α，において，二つの元の差はつねに有理数であることからの帰結である。

選択公理なしにルベーグ可測でない集合が得られるか否(いな)かは，これもむしろ基礎論の問題であって，解析集合論，ゲーデルのモデル，コーヘンのモデル（第 3 章第 8 節）などの中で，こもごも大きな問題となっている。特に最近ソルヴェイは，コーヘンの手法をやや改良して，「実数の集合」が，そこにおいては常にルベーグ可測であるような，特別な集合論のモデルを作っている (1970)。ただしこれはもちろん「集合」

なるものの表現を第 3 章第 8 節で述べたような意味で厳格に捉えたときの話で，一方，どんな測度を与えても，それで測れぬ集合があるというのは，「集合」の概念を理論の外において，いわば観念的に捉えたときの話である。

なお私が測度の問題に多くのページを費したのは，言うまでもなく，これがこの本の主題と密接な関係にあるからである。すなわち以上のどの理論においても，測度 0 なる点の集合が，いかにして正の測度を得るかというゼノン的問題には触れようとしない。そのような難問はそっとしておいて，むしろ長方形のように，既に測度を持つと見られる対象を基盤にしながら，その上で「測り方」を論じようとする方向に，人びとは活路を見出しているといってもよいであろう。私が前に，ゼノンの問題は或(あ)る意味で今でも解けていないと述べたのは，このような事情を頭においての事なのである。

4-3．新しい数学の勃興

古典数学の 20 世紀における解体再編成のことは既に述べた。そこでこれに代る新しい分類は何かということが問題になりうる。しかし少くとも現在までのところ，現代数学の様相は複雑を極めており，これをまとめることは容易ではない (第 2 章第 2 節)。ブルバキの構造の老え (後述) はもとよりその試みであるが，それにしても，それがなお流動の中にあることは事実であろう。あるいはむしろ「数学の問題」におけるヒルベルトではないが，その流動の中に，生きた「数学」の姿があるとすべきかもしれない。

ともあれ，現代数学をあえて分類するとすれば，四則その他の有限的算法を本来の問題とする代数学，「点」のつながり具合を論じ極限的無限算法を問題とする位相数学，および量の問題に関する測度論などがその大きな分野であろう。測度については既に大分述べた。また

位相数学については，なお多様体なるものについて述べねばならないが，ともかく多少は触れるところがあった。結局一番大きく残っているのは代数学ということになる。以下，ブルバキによる構造の概念を念頭において，位相数学の補充と現代代数学の或(あ)る重要な面について少し触れておく。

(a) 位 相 数 学

位　相　位相数学はトポロジイ (Topology) の訳語である[1)]。この中には，図形（点集合）における点のつながり具合——位相的性質——を論ずる幾何学的色彩の強い部分（位相幾何学）と，より一般的な集合に対して，それをあたかも「点」の集合であるように見なし，位相幾何学的考察を原型としつつ，より抽象的に論ずる部分とがある

位相幾何学　位相幾何学は，幾何学的性質の中で，図形の「連続的変形」によって変化を蒙らないものの研究である。この種の関心の萌芽はライプニッツのホイヘンス宛の手紙の中に既にあると言われるが，本当に数学らしい最初の，しかも今日の意味でも大切な例は，多面体に関するオイラーの定理である[2)]。

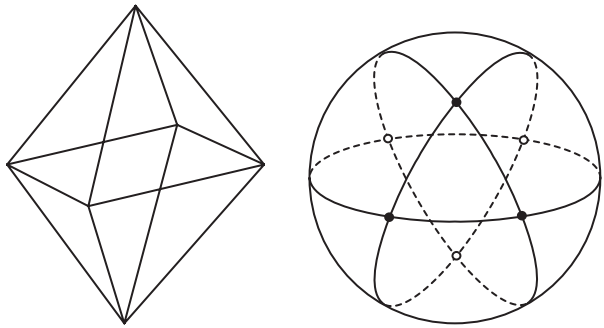
任意の凸多面体（例えば錐体や直方体）の表面について，頂点，辺，面の個数をそれぞれ α_0, α_1, α_2 と置くと，つねに

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

という関係がある。これがオイラーの定理である。ところがこの式は必ずしも凸多面体に限るわけでなく，仮に多面体を球面に連続的に変形し，もとの頂点や辺が球面上の曲線網になったとしても，やはりこ

1) トポロジイはかつて Analysis Situs とも呼ばれた（ポアンカレ）。これを「位置と形相」の学問という意味で「位相」と訳したのは中村幸四郎氏であり，他の訳語の中からこれを選んだのは高木貞治氏である。なお「トポロジイ」という言葉は，「位相数学」という意味の他に，そこで規定される種々の「位相」の意味にも用いられる。

2) デカルトも既にこの性質を知っていた。



$a_0 = 6,\ a_1 = 12,\ a_2 = 8$　$a_0 = 6,\ a_1 = 12,\ a_2 = 8$

図 4-3

の式は成立する。他方，額縁や，その連続的変形であるドーナツ型の面の場合，上式左辺の値は別の一定値となり，孔二つのドーナツ面では，また別の一定値となる。その他それらの値によって各種の曲面の区別ができ，より精密な研究への手懸りとなる。

このような「連続的変形」は一般に一対一両連続な変換，すなわち甲，乙両図形間の対応が一対一であり，かつ甲から乙への写像（変換）も，その逆の写像も，共に「連続関数」として表現できること，として規定される。また孔のない多面体表面と球面とのように，この変換で互いに移り合える図形は「同相」であると呼ばれる。位相幾何学が問題にするのは，同相な曲面の間に共通な性質を調べることを出発点とし，(i) 種々の曲面をそれらの性質によって分類すること，(ii) n 次元ユークリッド空間の「曲面」について同様のことを試みること，(iii)「連続関数」の意味の拡張解釈が可能な一般的空間——それはすでに位相幾何学の対象より広い位相空間というものである——についても，同様の考察を進めること，などとなる。

この内，2 次元曲面の分類や n 次元空間における考察に重要な貢献をしたのはベッチ，ボアンカレなどである。特にボアンカレは，n 次元多面体なるものを，それを構成する頂点，辺，面などを一般化した対象

(単体)の集合と考え(n 次元複体;多様体の一種),オイラーの定理を一般化して(オイラー・ポアンカレの公式),組合せ位相幾何学 (Combinatorial topology) という分野を開拓した (1895 年以後)。これは今日,代数的位相幾何学と呼ばれる分野の基礎をなすものである。例(たと)えば,(リーマン面などを含む) 極めて一般的な意味での 2 次元曲面を,その公式によって特徴づけ分類する問題は既に解かれている。しかし他方,これに相当することを 3 次元以上の「曲面」について行なうことは極めてむずかしい[1)]。なお,この組合せ位相幾何学に対して,カントルの始めた点集合論的な行き方は,集合論的位相幾何学と呼ばれている。位相空間 (前記 (iii)) のことは後で少し触れる。

ポアンカレ　ポアンカレ (1854–1912) はフランスの人。今まで触れる機会がなかったが,ガウス,リーマン等に続く最後の万能数学者と言われたほど,解析学,幾何学,理論物理学などを中心とする広汎な分野で活躍した人物である。ただしこれについては,「開拓者だが植民家ではなかった」とか,(同年代で現代数学の最初の人とも言えるヒルベルトと比べて)「19 世紀的近代数学の最後の大立物」などとする意見もある。しかしその一方で,例(たと)えば彼の位相幾何学や解析学の方面の仕事について,そこには,ブルバキ的な構造の考えだけでは汲み尽せぬ何物かがある,という考えの人もないわけではない。(評者の数学観がそこに反映する!)

ポアンカレにはまた,その広い視野と深い哲学的反省を駆使し,かつその達意平明な文章によって数学や自然科学の基礎を論じた多くの

---

1) (平面のように「開いた面」でなく)球面のように「閉じた面」(コンパクト)で,かつ「孔」のないもの(単連結)を,n 次元に拡張して考える場合,それらが「n 次元球面」と同相になるであろう,という予想がある($n = 3$ の場合が,いわゆるポアンカレの予想)。これは位相幾何学の最も基本的な問題の一つで,$n = 2$ ではもちろん正しい他,$n \leqq 5$ の場合にも正しいことがわかった(1960 年頃)が,$n = 3, 4$ については 1973 年現在,なお未解決である。

著作がある[1)]。数学の基礎の問題について言うと，その考え方はカントル的集合論に対してやや批判的で，しばしば直観主義の先駆者に数えられている。

位相空間論　位相幾何学的考察が解析学の方面に寄与した最初の大きい出来事は，リーマン面に関するワイル (1885–1955) の研究であろう。リーマン面は，関数論でいう代数関数なるものを特徴づける重要な要素であるが，ワイルは，当時まだほとんど存在しなかった位相数学を開拓し，位相的概念を導入しながら，これを（局所的にユークリッド平面を貼り合せた形の）2 次元多様体として表現することに成功した (1913)。

この成功は逆に位相数学自身の発展に寄与する。もちろんこれだけがその原動力ではないにせよ，この頃から，例(たと)えばワイルの仕事を整理する形で，抽象的な位相空間の研究が進んだからである。

位相空間のことは，少し上で“「連続関数」の意味の拡張解釈が可能な一般的空間”と呼んだが，これに対する第一歩として，ハウスドルフは近傍系の考えを用いて一つの位相空間を定義した (1914)[2)]。それは，ε-δ 論法 (III–2–6) において距離の概念を捨象し，ただ「空間の各点の近く」ということに相当する一群の集合（近傍系）を指定することによって，収束性あるいは連続性についての議論ができるようになっている空間である。もちろんここでも一対一両連続という性質は，位相を分類する性質として基本的であるが，ここでは空間における図形

1) 『科学と仮説』（河野伊三郎訳），『科学の価値』（田辺元訳），『科学と方法』（吉田洋一訳），『晩年の思想』（河野伊三郎訳），『科学者と詩人』（平林初之輔訳）が岩波文庫にある。『科学の価値』については創元社版もある（矢野健太郎訳）。

2) 集合 S の各点 x に，S の部分集合の或(あ)る集合 $\mathfrak{u}(x)$ が対応し，(1) $U \in \mathfrak{u}(x)$ ならば $x \in U$，(2) $U_1, U_2 \in \mathfrak{u}(x)$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{u}(x)$，(3) $U \in \mathfrak{u}(x), U \subseteq V$ ならば $V \in \mathfrak{u}(x)$，(4) $U \in \mathfrak{u}(x)$ に対して $W \in \mathfrak{u}(x)$ が存在し，各 $y \in W$ に対して $U \in \mathfrak{u}(x)$ となる。以上の条件が満足される $\mathfrak{u}(x)$ を x の近傍系，その元 U を x の近傍といい，S を（$\mathfrak{u}(x)$ によって定められた）位相空間という。ただしハウスドルフの与えた原形は，これより特殊である

というよりも，解析学における実数，複素数などに対応すべき空間の構造の方に重点がおかれている。

連続性の定義には点列の収束によるもの (ε-N) と，近傍の対応によるもの (ε-δ) とがあるが，両者は位相空間にどのような条件を与えると同等になるか；有界閉集合（前節）に相当する性質はどのような条件を与えれば現われるか；またそれらの議論に現われてくる諸々の位相空間の間の関係はどうか；例えば距離空間やユークリッド空間はそれらの中でどのような位置を占めるか；これらの問題がその二三の例である[1)]。

このような研究のため，ハウスドルフの近傍系による位相空間に続いて，フレッシェ（収束による），クラトウスキ（閉包による）その他，多くの学者によって，位相空間の定義が種々与えられ，それらの定義の間の比較検討ももちろん行なわれる。また（下の (c)「構造」で触れるような），他の演算や順序関係との関連も考慮される。要するに，一般化と具体化との二つの道が取られているわけで，解析学や幾何学における具体的対象（ユークリッド空間，リーマン面，射影平面，あるいは距離空間など）が，それぞれの学問分野で果す本質的な性質の発掘と，それらの性質の間の関係，区別，段階などの研究が行なわれている。

多様体　今日，多様体と呼ばれる概念は，普通のユークリッド空間を始め，曲線（1 次元多様体），曲面（2 次元多様体），あるいは何らかの意味で曲った空間（例えば非ユークリッド幾何学の空間）などを包摂するもので，現代数学の持つ空間概念として基本的な概念である。もちろん現代数学の一般的傾向として，この「空間」も必ずしも感覚的な拡がりにつながる幾何学的概念に限られるわけではなく，むしろ今日の

1) 2 点の「近さ」を示す「近傍」と並んで，2 点の「隔たり」を示す種々の分離公理，可算点列や有界閉集合等との関連をつける等の点で注目される可算公理などが，ここで導入される。また座標系を作ることに当る直積空間とその位相なども種々導入される

新しい解析学や代数学などと深いつながりをもつ広い抽象的な概念である。例(たと)えばリーマン面，代数方程式の根の幾何学的表現（現代の代数幾何学）なども実は一種の多様体と考えられる。こういう次第で，多様体論は既に現代数学の一つの独立した部門を形づくっているが，もともと位相数学的考察の中に始まり，かっその方法を主たる手段として展開されたものなので，ここでは便宜上，「位相数学」の項の中で説明する。

多様体（英，manifo1d，仏，variété，独，Mannigfaltigkgt）という術語およびこれに関する基本的な考え方を導入したのはリーマンであり（第 2 章第 5 節），それはまたカントルの集合概念の形成にもかなりの影響を与えている（第 3 章第 2 節）。実際初期のカントルが，実数全体のような全体者的「集合」とその部分たる或(あ)る特定の「集合」（例：三角級数に関する特異点の集合）とを統一する概念として，集合一般を示すのに用いた用語は，リーマンの論文から採った Mannigfaltigkeit であった (p. 130)。しかしもちろん今日いうところの多様体は集合一般のことではなく，リーマンが広義のリーマン幾何学を構成したときの考え方の線上で，或(あ)る種の位相空間を表わすのに使われている。

多様体の考え方を説明するには球面がよく引用される。実際，紙で風船を貼(は)る仕事を思い浮べると想像できるように，球面はその各点に小さい接平面（ユークリッド平面）を貼り合せて作られた「空間」と見なすことができるが，多様体とは，一般に局所的な n 次元ユークリッド空間を次々に「貼り合せ」て得られる「空間」のことである。問題はこの「貼り合せ」ということの意味で，リーマン空間の場合には，その「曲率」を定義するものとして「微小距離」を表わすのに使われた係数 g_{ij} (p. 78) が，その「貼り合せ」方を与えるものと見ることができる。いずれにせよ，このような仕方で，素性のよく知れたユークリッド空間を局所的に積重ねて大局的な空間像を得るという点に，多様体

の概念の骨子があるわけである。

ここで球面の場合を例として,「貼り合せ」の意味をやや詳しく説明しておこう。球面上の各点 p にユークリッド的座標平面 E_p が(例えば E_p の原点が p に来るように)接しているとし，p の近くの点 q を E_p に(例えば垂直に)射影したとすると，q には E_p 上の座標 (x_1, x_2) が対応する。ところが p の代りに，p, q から余(あま)り遠くない点 p' をとり，p'' での接平面 $E_{p'}$ (原点は p') の上に q を射影すると，q に対応する $E_{p'}$ 上の座標は (y_1, y_2) と変るであろう。しかし球面の性質上，y_1, y_2 は共に x_1, x_2 の関数として表わされ，それによって E_p と $E_{p'}$ とのつながり具合，言いかえれば球面の歪み具合(曲率)が分る。これは計算によって容易に確かめられることである。多様体における「貼(は)り合せ」はこの過程を一般化したものに他ならない。

位相空間(実は「ハウスドルフ空間」) X の各点で，その近傍が n 次元ユークリッド空間の開集合と同位相であるように定められるとき，X は位相多様体であると呼ばれる。これは球面の例に応じていえば，X の元 q に，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(y_1, y_2 \cdots, y_n)$ など，様々の坐標が対応させられるようになった状態を示している。ところでそれらの $y_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の関数として微分可能であり，かつ逆に各 x_i が $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の関数としても微分可能であるとき，X は微分可能多様体と呼ばれる。これは「貼(は)り合せ」の「滑らかさ」が微分可能という性質で示された多様体で，広義リーマン幾何学，従(したが)って各種の非ユークリッド幾何学の空間はこれの一例に他ならない。またユークリッド空間はこの立場からいうと,「歪み」の全くない素直な空間ということになる。

微分可能多様体の他にも，いくつかの多様体がある。例(たと)えば上の微分可能な関数を折れ線グラフで，すなわち直線の像が折れ線になるような関数でおきかえたものは，組合せ多様体または PL 多様体 (PL は

piecewise linear（区分的線型）の略）と呼ばれる。これはポアンカレ以来の組合せ位相幾何学を一般化したもので，いわば滑らかさの低い多様体である，他方，ユークリッド空間の代りにその実数を複素数でおきかえた「空間」を基礎にとり，「貼(は)り合せ」の関数を複素変数の解析関数でおきかえたものは解析多様体と呼ばれる。リーマン面はその一例であるが，更(さら)に（適当な修整の下で）代数方程式系の複素根を論ずる舞台として用いられる（代数的多様体）。その他，最近話題になっているカタストロフィー理論——不連続的現象への連続論的アプローチともいうべきもの——の舞台なども，多様体である。これらの問題の解明のためには，多様体自身のもつ種々の特性への研究が必要であり，それらについても述べるべきことはいろいろあるが，残念ながら私にはそれを十分説明するだけの力がない。ここでは本書の趣旨に則して，現代の大局的な空間論としての多様体論の一つの側面を示したのである。

(b)　代数系の理論

ガロアの方程式論　現代代数学の発端として第一に数えるべきものは，方程式論におけるガロアの理論である。ガロア（1811 年 10 月 25 日–1832 年 5 月 31 日）はフランスの人，ディリクレとリーマンの中間の年代である。数学と革命にありったけの情熱をそそいだその生涯は，今では広く知られている[1)]。

ガロアの方程式論の第一の結果は，5 次以上の代数方程式には一般的な代数的解法（四則と冪根のみを用いる解の公式）はない[2)]，という事実である。ガロアはこれを扱う際に，現代代数学の基本概念である群と体(たい)の二つを実質的に導入し，数学における新しい見方を示した。次

1) 小堀憲『大数学者』（新潮社），インフェルト，市井三郎訳『神々に愛された人』（1969，日本評論社）など。

2) 1 次，2 次の方程式の根の公式は周知の通りだが，3 次，4 次の場合にも根の公式は書ける。もちろん 5 次以上でも，特殊な場合に代数的に解けることはあるが，それはガロアの方程式論の第二の結果に関係することで，今回の話には関係はない。

にその考え方の大綱を述べる。

体とは有理数全体，実数全体，複素数全体などのように，その範囲で（0 での除法以外の）四則が自由にできる演算の定義された集合のことである[1)]。

さて問題が方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

の根の公式を求めよということなので，まず係数間で四則の自由にできる範囲 K を取る。話を簡単にするため，各係数を有理数とすれば，K は有理数全体からなる体とすればよい[2)]。ここで，もし K の或(あ)る適当な元の冪(べき)根（例えば $\sqrt{2}$）を選んで，これを K の仲間に入れ，しかもそこで四則が自由にできるように K の元を追加してやって体 K_1 を作り[3)]，その中に (1) の根がすべて入ってくれば，根の公式は存在することになる。さもなくとも，K_1 の適当な元 α の何乗根か（例えば $\sqrt[3]{\alpha}$）を加えて同様のことを行なって K_2 を得，必要によってはまた同様のことを行ない，有限回の後に (1) のすべての根がそこに現われる K_m に達したとしても，根の公式はあることになる。しかし容易に想像さ

---

1) 集合 K に「加法」$(+)$,「乗法」$(*)$ と呼ばれる二種類の演算が定義されており，a, b, c で K の任意の元を表わすとき，$a+b \in K$, $ab \in K$ である他，

(1)	$a+b=b+a$	(1′)	$ab=ba$
(2)	$a+(b+c)=(a+b)+c$	(2′)	$a(bc)=(ab)c$
(3)	$a+0=0; a=a$, $0 \in K$ なる元（零元）が存在する	(3′)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $1 \in K$ なる元（単位元）が存在する
(4)	$a+a'=a'+a=0$, $a' \in K$ なる元（a の反元）が存在する	(4′)	$a \neq 0$ なる限り,$aa^{-1}=a^{-1}a=1$ なる a^{-1}（a の逆元）が存在する

がすべて成り立てば，K を（可換）体と呼ぶ。(1′) の成り立たないのは非可換体である。

2) 係数が有理数に限らぬ場合は，次の脚註の操作を，各係数について予め行ない，これを K として事を始める。

3) a, b, c, d を有理数とし，$\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ $(|c|+|d| \neq 0)$ なる形の式の全体を K_1 とすれば，それがこの場合の求めるものである。

れるように，そのような適当な元を選ぶことは，根の公式を直接探すのよりもむずかしいくらいで，まず問題にならない。（なお上の K_1 を，$\sqrt{2}$ の添加による K 拡大の体と呼ぶ。K_2 は，K_l に $\sqrt[3]{\alpha}$ を添加した拡大体である。一方，K は K_1 の部分体と呼ばれる）。

そこでガロアは，まず根が見付かったとして，根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を（いわば覆面のまま）[1] K に添加した拡大体 L を作り，体 L の一般的性質の方から攻めていこうとする。その際に用いられるのが置換群の考えである。

例（たと）えば 3 個のもの $(1, 2, 3)$ を $(3, 2, 1)$ に置き換える操作を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と書いて置換と呼ぶ。今この置換を σ_1，別に

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を τ と呼び，σ を施した後に τ を施すと，1 は 3 に (σ)，続いて 2 に (τ) なるという具合で，結局，置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

が得られる，これを $\tau\sigma$ と書いて，σ，τ の（この順の）結合と呼ぶ。（$\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は必ずしも等しくならない）。以上を一般化して，n 個のもの $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ の置換の全体（$n!$ 個ある）P をとり，今述べた結合を置換の間の演算と見なすと，P は変換群（第 2 章第 4 節）の一種であることがわかる。実際，$\sigma, \tau \in P$ ならば $\tau\sigma \in P$ ということの他に，

(i)　$\tau\sigma$ はまた一つの P の元である，

(ii)　$(\tau\sigma)\rho = \tau(\sigma\rho)$　（結合法則）

(iii)　置換 σ_0 が P の中に存在して，任意の τ について，$\sigma_0\tau = \tau\sigma_0 = \tau$ となる（単位元の存在；実はどの元も動かさぬ「置換」），

(iv)　任意の σ について，$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \sigma_0$ となる置換 σ^{-1} が

1) 「覆面のまま」というこの手法はコーヘンの論法 (III–3–8) と少し似ている。

P の中に存在する（逆元の存在），

が成立する。P を置換群と呼ぶ。

ガロアは，前記の体 L のからくりを，(1) の根 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ についての置換群の性質によって解明しようとするのだが，その筋道を説明するためには，ここで部分群という概念を導入する必要がある。

一般に群 G の部分集合 H が，G の演算に関して，その範囲だけで群を作っているとき，（すなわち $\sigma, \tau \in H$ ならば $\tau\sigma \in H$ の他，(ii)—(iv) が H の中で成立するとき），H を G の部分群と呼ぶ。G の部分群には，G 自身と単位元のみからなる群との少くとも二つがあるが，他にはないこともあり，多数あることもある。ただし P のように元の個数（すなわち位数）が有限な群（有限群）の場合には，各部分群の位数はもとの群の位数の約数になることが確かめられる。

さて初めの体 K から出発して，方程式 (1) の根の公式を含む体 L 迄の拡大ができたと仮定すると，根と係数の関係などによって L と置換群 P との間には一つの重要な対応のつくことが示される。すなわち $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の間にどんな置換を施しても K の元に変化はないから K と P 自身とを対応させる。次に K を K_1 に拡大すると，（そこに添加された元のため），P のどんな置換によっても K_1 の元が変化しないとは，もはや言えなくなるが，P の部分群の中に K_1 の元を変化させないもの P_1 があることが確かめられる。これを K_1 に対応させる。K_1 を K_2 に拡大したときも同様で，P_1 の部分群（従(したが)って P の部分群）P_2 が K_2 に対応させられる。しかも上記の仮定の下では，L はこのような順次の拡大で到達できることが確かめられるのである。一方，逆に P の各部分群 P' についても，L の部分体で，P' に属する各置換で不変なもののあることが示される。してみると，L の構造は，P とその部分群との関係に翻訳できる可能性が生じたことになる。

ところで今述べた P の部分群の列

$$P \supseteq P_1 \supseteq P_2 \supseteq \cdots \supseteq \{e\} \tag{2}$$

は，P の位数の約数の範囲でしか存在しえないわけで，それだけでも吟味の可能性は有限化されたことになるが，それらは更(さら)に（L に関する前記の仮定の下では），正規部分群と呼ばれる特殊なものになることがわかってくる。ところが，5 次以上の方程式を考えるときの群 P には，上の列 (2) の中に正規部分群でないものの出現が一般に避けられぬことが示されるため，結局，5 次以上の方程式の根の公式は一般に存在しないという結論になるのである。

方程式の解法の問題は，3 次，4 次の方程式の根の公式が 16 世紀に得られてから，5 次以上の場合を目指して学界の大きな問題となっていた。ラグランジュは置換群の考えをそこに導入して，事をかなり前進させたし，ガロアの仕事の直前にも，アーベルは 5 次方程式が代数的に解けないことを証明したが，ガロアの仕事は，（それらの上に立ってのことにせよ），それらを一括する巨大なものなのである[1)]。

19 世紀後半から 20 世紀にかけての代数学は，このガロアの思考のからくりを解明する処から出発し，ひいては現代数学全体の動向にも，大きな影響を与えたのであった。そういえばリーの連続群論（第 2 章第 4 節）にしても，その最終の狙いは微分方程式論における「ガロアの理論」であったと言われている。その点からいうと，リー群論はそのための方法だったのである。

現代代数学の発端　ガロアの方程式論は極めて簡潔，難解であったため，これを整理する仕事がジョルダンの『置換論』（1870；ガロアの没後約 40 年）の頃から活発となり，公理論的な雰囲気の中で次第に抽象的な形を取るに至った。すなわち群は必ずしも変換群と限られなくなって，いわゆる「働き（操作）からもの（存在）への変換」が進行する。晩年のクラインがこの新しい動きについていけなかった事はすでに注

1) ブルバキ『数学史』の「代数学の進展」，「多項式と可換体」の各章を参照。

意した（第 2 章第 4 節）。一方，1910 年には体の抽象的定義（p. 226 脚註）が現われて，現代代数学の直接の先駆(さきが)けをすることになる（シュタイニッツ）[1]。

この間の展開については，イギリス学派 (III–2–4) の行列論ないし線型代数学，リー，クラインの変換群，あるいはデデキント，ヒルベルトなどの公理論などの影響もそれぞれ忘れがたいが，特に注目されるのは，1920 年代にゲッチンゲンにあって指導的役割を果した女流数学者 E. ネーター (1882–1935) である。抽象代数学の普及発展にあずかって力のあったヴァン・デル・ワルデンの『現代代数学』（現在は『代数学』と改題）(I, 1930 ; II, 1931) もこの雰囲気に生れたものであり，その他，抽象代数学の「最初の成功」を収めたアルティン (1898–1962)（p. 203 脚註）も，日本にこの新しい代数学を移植した正田建次郎 (1902–1977) なども，その影響下にあった。

代数系　集合 M の元の間に，（加減乗除を原型とするようなタイプの）演算が一つまたはそれ以上定義されているとき，M を代数系という。群や体は代数系の一種である。位相空間が，極限論的無限算法を原型に持つ演算の定義された集合と呼べるのに対比して言えば，代数系は有限的演算の定義された集合となり，現代代数学の主目的は代数系の構造の解明であるということになる。

位相数学の場合と同じように，ここでも種々の代数系が，それぞれ具体的な理論を踏まえながら定義される。ところがそれらは，一見遠い関係にある数学的対象の間に，或(あ)る共通の性質——共通の数学的構造——を明らかにしてくれる。例(たと)えばクラインの変換群，ガロアの置換群の他に，加法を結合関係とするときの整数全体や，乗法を結合関係とするときの（正の，または正負の）有理数の全体，あるいはまた，自然数を素数 p で割るときの剰余類（結合関係は積）[2] などはいずれも「群」の

1) 群の公理論的取り扱いはケーリー (1850)，クロネッカー (1870) 頃から始まる。
2) 自然数を，p で割るときの余り i によって組分け（類別）した全体：$\{N_0, N_1, \cdots, N_i,$

一種になる。すなわちこれは，古典的数学の種々の分野の対象を，演算あるいは操作という別の見地から，一般的に論ずる道を拓くものである。

ところが事はそれだけではない。ガロアの理論では，代数方程式の根の公式という問題が，まず或(あ)る体の問題に移され，次にそこで取り上げられた或(あ)る群の構造に移されたのだったが，このような各代数系の構造やお互いの間の関係，あるいはまた抽象論を（例えば行列というような）より具体的な対象によって表現するという表現の問題などが，より広い視野の下で改めて一般的に吟味されるに至る。そこにおいて問題にされた代数系には，群や体はもちろん，環，束，線型空間などがある。

大まかに言えば，環は加減乗の自由にできる集合で，正負の整数を原型とするが，多項式，行列，あるいは連続関数など，多くの対象がこの一般論の下で取り扱われる。束は集合とその部分集合との間に見られるような，（広義の）順序関係を規定分類するものだが，集合と論理との間に集合算に見られるような深い関係のあることもあって，例(たと)えば射影幾何学の理論構造などを始め，広い適用範囲をもっている。また線型空間はベクトル，行列などの一般化から出発するが，微分方程式論その他，解析学の分野にも極めて広く深いつながりをもつ。また，本来は代数的整数論の舞台として導入されたイデアール（第 3 章第 3 節）なども，環の或(あ)る部分集合として，環の抽象化が進むにつれて，代数系の理論の中で取り扱われるようになる。

ここで「構造」あるいは「表現」などの例をあげておく。例(たと)えば素数個の元からなる群は，単位元を e，他の 1 つの元を a とすると，必ず

$$\{e,\, a,\, a^2,\, \cdots,\, a_{p-1}\}$$

の形に表現されることが知られている。この種の，抽象群に具体的な

$\cdots,\, N_{j-1}$), N_i と N_j との「積」とは，自然数 $i,\, j$ の積を p で割った余りを含む組と定める。

形を与える問題だけに関しても，未解決のものは極めて多く，その中には新しい見方を要求するであろうものも少くない。早い話が，n が素数でないとき，n 個の元をもつ群が実質的に幾通りあるかという問題など，「その一般解を求めることはほとんど不可能である」（『岩波数学辞典』「有限群」参照）が，それは，n 個のものの置換全体からなる n 次対称群の部分群で表わすことはできるといったたぐいである。

体については，有限個の元をもつ体は必ず「乗法」の交換法則を満足し，従って可換体となる（ウェダーバーンの定理）ことを，一例として挙げておこう.。

こうして現代代数学は古典的面目（めんもく）を一新した学問となり，最近では多様体論と共に解析学の方面にまで適用され，ここで詳しくは述べられないが，例（たと）えば関数論の古典的難問などにも，この方面からの検討が進められている（例えば『岩波数学辞典』「ゼータ関数」などを参照）。

(c) 構　造

今まで述べてきた新しい数学の考え方は，全体としてブルバキの構造の考えの原型となり，次いでそれにより整理されたものである。ところが構造ということになると，事はこれだけではすまず，全体の様相はもう少し複雑になる。

種々の型の構造　ブルバキは構造の主要タイプとして，代数，位相，順序の三者を挙げ，次にそれを基とした複合的な構造ということを述べている。この辺の事情を，ありきたりでない場合に迄立入つて解説することはむずかしいので，「数」の概念を例として，ここではその事情を示唆（しさ）する程度に止める。

幾何学や解析学の根底には実数や複素数が深く食い込んでいる。更（さら）に複素数は数論や代数学の本質にもつながっている。ところで，それらの個々の分野では，実数にせよ，複素数にせよ，代数的な体という性

質の他，極限算法の現われる位相空間としての性質も介在すれば，実数の場合には大小に関する順序の概念も介在してくる。複合的な構造とは，このような現実の情況に対応するもので，例(たと)えば順序体，位相群，線型位相空間などという構造が新しく考えられる[1)]。すなわち現代数学は数論，代数，幾何，解析などと分けにくいのみでなく，代数系，位相空間，順序などと単純に分けることもむずかしいのである。

新しい型の帰納と演繹　しかしまたそれは，数学の永遠の対象である自然数，実数から，複素数，連続性，大小や包含の関係，対応等々が，実は互いに入り組んだ形で数学的現実に関与していることを示すものに他ならない。言いかえれば，最も抽象的な議論に見えるそれらの構造は，本当はつねに現実に密着しそこから絶えず新しい発展の原動力を吸い上げているというわけなのである。ブルバキはこれを，帰納と演繹とが平衡を保って行なわれているものといい，様々に分岐したこの「数学」なるものは，構造の研究という一点によって単一のものと見られると述べている。このような事情のため，ブルバキは数学のことを，従来からある mathématiques という複数形を捨てて，わざわざ mathématique という単数形で呼んでいるくらいである。

こうしてみると，構造の考えは現代数学における新しいマテシス・ウニウェルサリス（第 1 章第 3 節）のようなところがある。実際，（次節 (d)「数理科学」で触れるように），それは，この世界におけるもろもろの事象の中から，「数学」によって処理できるものを捉(とら)え，それと共に「数学」自(みずか)らを改変するという姿勢を持っている。あるいはそのための指導原理のようなものである。しかもそれは，自(みずか)らの中につねに

1) 体 K の元の間に$>$で示される全順序関係があり，(1) $a > b \to a + c > b + c$, (2) $a > b$, $a > b$, $c > 0 \to ac > bc$ が成立する場合，K を順序体と呼ぶ。また群 G が同時に位相空間であり，x, y から xy へ，x から x^{-1} への対応が連続写像になっているとき，G を位相群と呼ぶ。線型位相空間についても同様の方針で定義が与えられる。

新しい発見，創造の芽を宿している。（ブルバキは哲学を口にすることを意識的に避けているように見えるけれども，考えてみると，これはまことに大きい哲学だと思われる）。

しかしまた，デカルト，ライプニッツのマテシス以来，あるいはむしろ古代ギリシャ数学の発見と論証への関心（例えばパッボスの「解析論」）以来，すべてのこうした試みがそうであるように，特に発見的精神というものは，或(あ)る表現によって固定されることを好まないように見える。すなわちそれは，何らかの表現がそこに与えられるたびに，なおその奥へ隠れるとでもいうか，一段と高度な発見的方法の表現が求められねばならないような状況が，すぐ現われてくる。「構造」の考えを踏まえはするものの，それだけでは必ずしも捉(とら)えにくいところに今日の最も新しい数学が進みつつあるという意見が，時として人びとの口にのぼるのも[1]，一つにはこうした事情によるのであろう。

(d) 数理科学

新しい応用数学 数理科学というのは，20 世紀的現代数学かその本来の性格をそのままに，新しく開拓しつつある応用数学である[2]。すなわち，上で構造について述べたときの実数や複素数の代りに，広い意味での自然や社会の現建をおき，例(たと)えば実数などを念頭において組立てられる順序体などの代りに，現実に対する理論的解釈としての数学的理論をおき，一種の実験科学的手法をもって，現実を理論的に処理しよう，あるいはもっと適切な言い方をすれば，現実の中から理論的に処理できる部分を発掘しようという考え方が，今日の数理科学である。

1) たとえば彌永昌吉「数学思想の流れ」（赤・前原・村田編「数学のすすめ』（1969，筑摩書房）所収）参照。
2) 赤・茂木・村田編「数理科学の諸問題』（『数学講座』第 17 巻，1971，筑摩書房）参照

このような言い方をすると，ギリシャ時代におけるユークリッド幾何学も，17 世紀以来の数理的自然科学も，それぞれ一個の数理科学たる面をもっていると見られる。しかし現在の数理科学の特徴は，現代の新しい数学的成果を根底に置いて，従来，数学が手控(てびか)えていた文化科学や社会科学の中にまで，その適用範囲を拡大しつつあることである。17 世紀の学問が，一方で数学を新しく創り上げながら，他方，その数学を自然界の現象に適用して成功した例があることでもあり，社会科学や文化科学に手をのばしつつある今日の数学の動きにしても，決してこれを数学の出しゃばりなどと決(き)め付(つ)けてはならないであろう。またそれだけのものを，今日の数学は備えてきていると思われる。もちろん「数学」自身，自分の力の限界は弁(わきま)えて行動したときの話である。例(たと)えば数学が，パスカルのいう「繊細の精神 (esprit de finesse)」の隅ずみにまで適用される日が来ようなどとは，第一に数学者自身が考えていないであろう。

次に現代の数理科学の実態の一端を示す意味で，確率論と電子計算機のことに軽く触れておく。

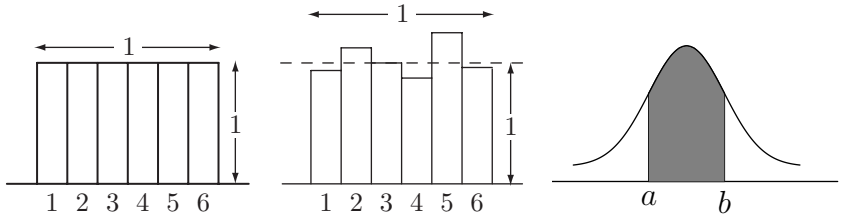
確率論　確率論の歴史はしばしば 17 世紀のパスカルとフェルマの書翰にまで遡られる[1)]。しかしこの段階は，数学以前の混沌を数学化するきっかけを作ったという点——それは重大なことだが——を除くと，まだ本当の数学とは言えない。

確率論の数学化はむしろ 18 世紀に始まる。すなわち，「場合の数」の計算に基づくいわゆる先験的確率（投銭の結果たる表裏に各 $\frac{1}{2}$ の「確率」を天降(あまくだ)りに与える等）を一方におき，試行の繰返しに基づくいわゆる経験的確率（投銭を何度も行なって表の出る回数の全体に対する比率を求める等）を他方において，（後者が大局的に前者に近づくという）いわゆる大数の法則を初めて表明し，これに一応の数学的証明を与えたのは，

1) より古く，ガリレイ，あるいは 16 世紀のカルダーノにまで遡らせることもできる。

J. ベルヌイである。またこれらの確率論の体系を一つの数学的体系に組織化したのは，19 世紀初めのラプラスである (*Thérie analytique des Probabilités. 1812*)。

しかしラプラスの確率の定義にはいろいろ問題があり[1)]，確率論は厳密な取り扱いのできる数学ではないと見なされる時代がしばらく続いた。しかし 19 世紀には，一方に近代国家組織の充実などに伴って社会統計の必要性が増すとか，他方，気体運動論を始めとする物理学の方面に統計的性格のものが種々現われて，そこに確率論を適用しようとするとかという種々の外的な刺激があり，それと共に，数学の中でも例の公理主義的方法論や集合論的存在論の形成という事情があり，それらが相俟(あいま)って，20 世紀になると確率論はすっかり面目を一新した。特にヒルベルトの第 6 の問題 (物理学的な原理，なかんずく先(ま)ず，確率論と力学を公理論的に扱うこと) に答えたコルモゴロフの確率論の公理論は，確率論を純数学的理論として整備したのみでなく，その「確率」概念の適用範囲の広さのために，応用に対しても新しい道を拓(ひら)いたものである。



(「正しい」さいころ)(くせのあるさいころ)　　(誤差曲線)

図 4-4

1) ラプラスの場合，一つの偶然を伴う試行で，起こりうべき基本的事象（根元事象）が n 個にきっかり分類され，その各々が「同等の確からしさをもつ」とき，その n 個の内の r 個のどれかが起こるという事象 E の確率を $\dfrac{r}{n}$ とする。ここで，「同等の確からしさをもつ」とは何かがまず問題になる。また，場合の数が無数にある場合は処理できない。

コルモゴロフは「確率」を，全測度が 1 であるような特定のルベーグ測度であると定義する。簡単に言えば，起こりうべき全事象の総体に面積 1 を与え，それを各々の根元事象にいわば分配した上で，そのような「確率」のもつ性質を調べようとするのである。（前頁図は，左から，さいころについて各々の目の出る確率を $\frac{1}{6}$ と定める場合，同じく経験的に或る「くせ」のあることのわかったものの場合，さいころとは別に，誤差曲線の場合を示したものである。前二者は単位正方形の面積を 6 個に分割している。また誤差曲線の場合は，その曲線と横軸との間の面積を 1 としておき，例えば測定値が a, b の間に落ちる確率は，図の斜線部分の面積で示されるようになっている）。

要するにコルモゴロフの定義は，個々の場合について，先験的にせよ，経験的にせよ，具体的にどんな確率を与えるかには立ち入らず，およそ「確率」なるものの持つべき数学上の基本的性質を上からおさえ，「確率」ということに対してここに一つの数学的モデルを作ったわけである。しかもそれがルベーグ測度（具体的にはしばしばボレル測度）として捉えられているため，無限個の根元事象のある場合にも，もちろん利用できる。そればかりでなく，この定義の下では大数の法則，あるいはその一般化に当る無限試行の列の取り扱いが極めて理論的に明快に説明され，統計学と確率論とのつながりは根底の深いものとなっている．

例(たと)えば抜き取り検査による品質管理や，比較的少数の例を基としての世論調査などは，不良品何%とか，内閣の支持率何%などという或(あ)る種の結果を，ただし（例えば，それらの結論は，95%の確率をもって正しいというような）確率論的但し書きつきで，与えてくれる[1]。それの

1) この但し書きは決して曖昧さを残すための逃げ途でなく，同一の条件で同じ事態が繰返されることが百万回あれば．その内の九十五万回位はそうなることが，確率論によって結論できるのである。商品などの品質管理は，その点でこの理論の適用に適切であるが，世論調査など，一回限りであることを本質とする歴史現象

みでなく，詳しくは述べられないが，今日の確率論は，現代解析学などとの間に深いつながりを生じ，むしろ或(あ)る面では解析学のために新しい進路をさえ拓(ひら)きつつある。確率論もまた次の時代の新しい数学の中心の一つであるように思われる[1)]。

電子計算機　話がここまで来れば，次は当然, 電子計算機の歴史とその意義などに触れるべき処だが，私はこの歴史を余(あま)りよく知らない上，既に紙数を大幅に超過しているので，極めて簡単に触れるに止めておく。

自動計算機の歴史も少くともパスカル, ライプニッツの昔に遡る。特にライプニッツの夢の中には，（アルゴリズムとの関連の点で）今日の電子計算機の原理に近いものがあったと言われる。19 世紀には英国学派のバベッジが，より進歩した計算機を企画し，或(あ)る程度まで実行に着手している。しかしそれらはすべて歯車などの機械仕掛けであって，今から見ると実現の可能性はがなり薄かったと言わざるをえない。今日の計算機の進歩の背後には，19 世紀以来の電気学の進歩，特に 20 世紀になって大幅に進歩した弱電関係——電信，電話，ラジオ，テレビ，録音技術など——からの奇与が大きい。

けれども今日の電子計算機の原理には, それらと格段に違った点がある。それは今日の計算機が単なる加減乗除や微分積分等の計算をするだけのものでなく,「計算」なることの本質に立ち返ってこれを要素に分解し，人間の行なう計算の中から形式化できる部分一般を，その中に取り入れた点にある。

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 12 \\ \hline 68 \\ 34 \\ \hline 408 \end{array}$$

一例として筆算による掛算をとる。注意すべきは, この計算が，一旦その原理と「九九」の表を覚えた後では，万事，機械的に運ばれるということである。すなわち右のように，まず 34 と 12 とを一

の場合には，そこにかなり本質的な問題のあることは否めない。

1) たとえば竹内順治「コルモゴロフ」（赤・前原・村田編『数学のすすめ』（筑摩書房）所収）参照

定の位置に書き，まず 4 と 2 に注目して「二四が八」を思い出し，その結果を所定の位置に書く。次に目を 4 の隣りの 3 にうつして「二三が六」を思い出し，……というたぐいである。今日の計算機は大雑把にいうと「何と何とに着目し，そこにどの規則を用い，それをどこに記録するかを一単位とし，次々と同様の単位操作を繰返した上で，どの段階で終るか」までを自動的に行なうことのできる機械である。そこで，計算すべき資料（上の 34，12），用いるべき規則ないしその規則のための手順（上の九九の表，あるいは九九の表の作り方），および計算全体の流れ，あるいはプログラム（どこで始め，何をいかに反復してどこで終るか）を与えてやれば，四則計算や大小比較その他の初等的計算はもちろん，解析学的算法（例えば特殊関数の値，定積分，微分方程式の解など）の近似計算や確率の計算も，さらにはそれらに「翻訳」できるものである限り種々の資料の分類整理等も可能になるわけである。この際最も大切なのは，最後にあげた計算プログラムまでも機械に与えてやることで，これが今日の電子計算機を過去のものと原理的に切り離す最大の点である。その意味で，これはプログラム内蔵方式による高速計算機と呼ばれる。

プログラム内蔵方式の原理は，数学基礎論の或(あ)る面とつながっている。実際これを理想的な形で数学化した英国のチューリング (1912–1954) も，それを実現したフォン・ノイマン（ハンガリー生れで，後にアメリカに移住）も，共に同時に基礎論の学者であり，チューリングはその形をむしろ基礎論の問題として扱ったのであった。他方，フォン・ノイマンはヒルベルトの弟子として，集合論や基礎論にも多くの貢献をした学者である。

電子計算機のもたらすであろう種々の社会的影響については，第 1 章で少し触れたが，全体的に見て今なお流動的な状態にあるとすべきであろう。ただ，十進位取り記数法とそれによる筆算法の発明，対数

の発見などが，それぞれ次の時代の学問あるいは社会一般に及ぼした影響を考えるとき，電子計算機の普及が将来に及ぼすであろう影響には，かなり重大なものがあると見るのが妥当と思われる。

もっとも，この計算機が人間の能力をどこまで代行できるかという点は，かなりむずかしい問題である。実際その原理は上で示したように，人間の思考活動の或(あ)る部分を要素に分解し，それをアルゴリズムとして再構成するという分析的な処に特色をもつものであり，それだけに，その手続きにのらぬものは扱いにくい。要するにアルゴリズム化できないものは取り扱えないのである。例(たと)えば「文字（の形）を読む」というような，いわゆるパタン認識の働きは，テレビの画像のように，字の書かれた紙を黒白の点の列に分解してやれば，計算機でも実行することができる。しかし「くずされた文字」はこの方法では極めて「読み」にくい。人間ならばその文字の前後関係によって「綜合的」に判断できる場合がよくあるが，現在の機械にはまだそういう仕事はできないようである。計算機による自動翻訳についても同様で，人間のように文脈によって読み進むということは，機械には困難である。これもまた一種の「綜合的」理解の要求される問題であり，この辺に現在の電子計算機の原理的な障害があるのか，それともこれもまた現在の原理を根本的に改めることなく克服できることなのか。考え方によると，これは今日までの「数学」に，本質的に新しい要素を付け加える必要があるか否(いな)かの問題にもつながることのように思われる。

数理科学については，行列の理論に準拠する線型計画法などの数理計画法，ゲームの理論その他のオペレイションズ・リサーチ，情報理論などを含む広汎なサイバネティックス等の多くの話題があるが，ここではそれらに触れることはできない[1)]。

---

1) これらの問題には多くの参考書があるが，ここでは電子計算機の原理を含めて，村田全・清水達雄・前田浩一編，『玉川児童百科　数学』の中に（2 章 2 節，11 章，

第5章　終　章
——いくつかの深い疑問について——

第1章以来いろいろなことを述べてきたが，さて改まって数学とは何かと考え直してみると，その問題はむしろむずかしさの度を加えた感がある。そこでここでは本書のまとめに代えて，それに関する二三の疑問を書き添えてみたい。

われわれが本書の全体を通じて多少とも明らかにしえたかと思うことの一つに，数学とは現実のもつ「合理的」側面に対するモデルである，あるいはむしろ，現実の「合理的」側面は数学なるものによって最も明瞭に摘出される，ということがある。そして実を言えば，特にそのことを集合論的無限論あるいは同じく存在論の形成発展と関連づけ，これが人間の描きうるモデルの世界を飛躍的に拡大した有様（ありさま）を明らかにしようとするのが，私がこの「歴史」を書こうとしたときの，そもそもの狙いだったのである。

もちろん，ここで「合理性」とは何かということが直ちに問題になるかもしれない。こういう哲学的問題に深入りすることは本意ではないので，ここでは現実の模写を前提においた論証体系で表現できる知識すなわち「数学」，という程度に考えることにして話を進めたい。

数学の応用可能性について　さてわれわれの上記の目標は第4章までで一応終ったことにして，まずそのようなモデルの真理性や応用可能性について考えてみたい。するとここには多くの深い問題のなお残されていることが意識されてくる。実際，それらのモデルが一方では現実とつながりながら，他方では一個の独自の世界を形づくっているという事実は，この「数学」なるもののもつ根本的な問題なのである。

老えてみると，幾何学や解析学はもとより，自然数や論理のような

12章），清水達雄，広瀬健，小林竜一の諸氏による初等的な解説が与えられていることを紹介しておく。

基本的な事柄(ことがら)にしても，あるいはさらに遡(さかのぼ)って，もろもろの「もの」を区別し，それに命名をする働きにしても，それらはすでに一面において抽象的モデルの世界を組立てることである。強くいえば，全く虚心に見るときは「眼前一箇の縫い目のない塔[1)]」ともいうべき影像に過ぎない「知覚の対象」を相手にして，そこに我と彼，動と不動を分ち，もろもろの形なるものを（これは「本」，これは「机」，これは「私の手」などとして）識別し，論理を摘出し，空間・時間を截断(せつだん)し，自然数を刻んでいく——それはすでに，茫々(ぼうぼう)たる現実に対する一つの合理的モデルではないか。より数学に密着していえば，早い話が存在証明というようなことにしても，その対象が現実を或(あ)る程度は離れたものだからこそ，改めて「証明」する必要が生ずるのである。「現実」に存在するものならば，何を好んで「存在証明」などをする必要があるであろうか。

ところが一方，それらのモデルは，数学の歴史の進むにつれて，例(たと)えば解析学に典型的に見られるように，当初の目標を越えて広い適用範囲を獲得する。例(たと)えば数理物理学という広い分野の大部分がそれである。さらに自然数がいかに深く広くその性質を示すかは，「ガウス」の節や「集合論の多様化」の節を引用するだけで十分であろう。要するに，作りもののはずのモデルが独り歩きを始めて，広く客観的実在（と呼ばれるもの）の解釈に用いられ，時と場合によっては，その成り行きを予言し，そこに応用の途を拓(ひら)くのである。これはまことに不思議なことである。

もちろん，これに対しては，「それは当然のことだ。客観的事実が，あるいは人間の認識作用が，そのような仕掛けになっているのだ」とする見方もある。しかし「合理的」思考が自然界を，そして人間社会

1) これは元来は禅の言葉であろう。ただし私のこれに関する連想は，ベルグソン『物質と記憶』の邦訳に添えられた西田幾多郎氏の序言につながる。

の或(あ)る側面までを，このように支配していること，そこに不思議は何もないといいたくなること，これらの事実こそ，改めて考えてみると，まさに不思議中の不思議といわざるをえない。少くともその不思議を説明する途は，もはや「合理的」な議論によるわけにはいかないようである。

言うまでもなく，これはゼノン，プラトンの昔から，人間にとって永遠の問題であろう。そして近代・現代の数学を論じているわれわれとしては，デカルトやライプニッツ以前にまで視野を拡大する必要はないと思うが，カントルがその根拠づけに神あるいは万有の統一性を持ち出していたことは前に触れた通りである。その一方，例(たと)えばブルバキは，特にこのことについて立ち入るのを避けているようだが，その場合には結局その不思議の中に黙って身を委(ゆだ)ねるだけと言ってよいであろう。これに対して，ブルバキのこの態度を批評した人に，ロシアのリアプノフがある。しかし彼はその唯物論の立場からして当然のことながら，世界の構造がそうなっているのだという意見の一本槍であって，そうなればこれは説明でなくて信念に外ならない。いずれにしてもプラトンの昔から，ここには合理的説明などはありそうにないのである。

もっとも，われわれはこうしたことと共に，このような問題自体が，人類の思想史のどこにでも認められることでなく，例のピタゴラス的な「万物は数」という格率の線上にある歴史にのみ認められるもののようだ，という点には注目しなくてはなるまい。というのは，この線上での広義の数学の底に認められる「(或(あ)る広い意味での)万物は数である」式の見方は，今やすでに単にギリシャ的世界ないし西欧的世界だけのものではなく，むしろ人類共通の一つの重大な思想的契機になっていると思われるからである。われわれがこの不思議を「客観的」な事実と認めるとすれば，それはこうした思考を経(へ)た上での，言わば既

成事実的・経験的な根拠に拠るものに過ぎない。

数学の多様性と単一性について　ところでこうした数学的モデルは，特に現代に近づくにつれて，ますます多様化の度を加えてくる。もちろんブルバキはそれを構造の概念によって統一しようとし，そこに帰納と演繹との新しい調和を見出している。しかしそれが現代の「数学」の現実を尽しているかという点も問題である上，そもそもその構造は複雑多岐であって，例(たと)えば人間が「数学」を，もう一度 ABC からやり直すとしたときにも，何百年か何千年かの後にやはり今日のような結果に到達するとは限らぬのではないか，という疑問さえ残るほどである。これに対しては，例(たと)えば非ユークリッド幾何学が二三の人の手でほぼ同時に生れたではないか，というような反論の余地は確かにある。しかしこの場合も，カントやガウスの潜在的影響はあったという位の再反論も不可能ではなく，いずれにしても数学が絶対的真理の体系であることを，多少とも疑うような場合には，上記の問題もまた避けがたいのである。

もっとも，私の感じを率直に言えば，少くとも人間を含むこの世界の中に何らかの意味での「合理性」が働いていることを信ずる限り，「数学」あるいは「合理性」の統(す)べる領域は，ある一個の必然的な形相の彼方(かなた)へと展開していくような気もまたする。もちろんそれは自然数の観念や論理の形式などの基本的な対象が定まって後のことであり，かつそこにはギリシャ的精密論理の作用が働き始めていなくてはならない。これは当然のことだが，あえて数学の中から譬(たと)え話を取るならば，一つの基本領域に発して領球を拡大しつつ全体に達する解析接続 (p. 113) のようなことに対応するとでも言おうか。この場合，「数学」の世界は解析関数の概念にも似て，精美統一の形を取ると言える。

しかしその反面，例(たと)えば今挙げた解析関数からの連想で思いつくことだが，リーマン面という一見非合理的な対象は，あえてこれを思考

の中に描き出したリーマンのような人がいなかったとしたら，果して「数学的存在」となりえたか否(いな)かと問い直す道もまたあるであろう。しかもリーマン面という対象を欠いた場合，位相数学は果して今日あるような形をとりえただろうか，という問いさえ可能なのである。

以上で述べたことは，数学の単一的・必然的な真理性に対して，数学史のもつ多様的・偶然的な側面に照明を当てたものと言ってよいであろう。そしてこうした考え方を取る場合には，終局的・必然的な「数学」の概念が果してありうるのかという疑問もまた禁ずることができない。カントルやデデキントを欠いたとしたときの現代数学というようなことを考えると，事はさらに深刻になると思われる。この問題は元来ブルバキの示唆(しさ)したものであるが，ブルバキがこの問いの広さと深さを本当に掴(つか)んでいたかどうか，私には多少疑問である。

数学の単一性と多様性の問題については，今考えているギリシャ的伝統の下にある数学以外に，インド，中国，日本などにおける歴史的な「数学」までを考える場合には，さらに一段と多くの問題が生じると思うが，それについてはここでは触れない[1)]。

数学の真理性について　このようなことを考えていると，数学は(古典的意味にせよ現代的意味にせよ)，果して本当に真理の体系でありうるのか，という疑問さえ浮んでくる。ただ，一方で数学の世界の整った美しさ，その(或(あ)る前提の下での)もっともらしさを垣間(かいま)見ているだけに，かつそれを知ることが或(あ)る深さをもつだけに，一本調子に疑問を貫(つらぬ)くこともまたできない。言いかえれば，その信頼，讃美を一方に持ちながら，なお疑問を禁じえないだけ，疑問もまた深いと言わねばならない。これは苦痛を伴うことですらある。

こういう場合，われわれはむしろ心を強くして，より経験的な立場

1) 村田全「数学の単一性と多様性をめぐる試論」(『思想』1972年4月号)，「和算の性格と伝統——西欧数学との思想史的対比——」(『思想』1974年10月号)参照。

をとり，次のような考え方を試みる途はないものであろうか。すなわち，数学とは，少くとも古代ギリシャの或(あ)る時期以来，人間が歴史の中で試みてきた永い永い帰謬法(きびゅうほう)の試みの連鎖ではないか，と考えてみるのである[1)]。その意味はこうである。われわれは，この世の中に合理性の支配する部分のあることを期待しながら(立場 A)，まず，かえってその否定——この世には合理性の支配する領域など存在しない——を仮定する (仮定 B)。次に仮定 B に対して，例(たと)えばユークリッド幾何学という学問領域をとり，この「図形」の世界に「合理性」が存在することを示すことによって，A は一つの反論を試みる。ところが人間の外なる経験や内なる知識の拡大と共に，例(たと)えば非ユークリッド幾何学が形成されると，仮定 B がまた息を吹き返してくる。すなわち (単一の法則の支配という意味での) 従来の合理性はここで破綻した，という形の再反論が起こりうる。しかし立場 A は，幾何学ないし公理主義ということの意味を拡張することによって，より広くかつ新しい「合理性」の意味づけを獲取し，これによって事態を切り抜けようとする。けれどもこれに対する B からの反撃もまた必ず起こりうるであろう。というより，この最後の反撃などは，現代数学を含む現代社会のまさに眼前にあるのではないか (第 1 章第 4 節)。

さてこうした過程のどこかにおいて合理性擁護の立場 A が答えられなくなるようなら，その反対の B の立場が勝って，最終的絶対的な合理性支配の信念も崩壊せざるをえない。しかも仮定 B の持ち出される余地は，人間の経験や知識の拡大と共に，おそらくどこまでも続くであろうから，この場合，絶対的な意味での合理性の支配ということが

1) ここに述べた考え方は，私の昔の手記にあり，私は長い間これを自分の勝手な考え方と思っていた。ところが数年前『数学セミナー』の誌上で，吉田洋一先生がそれと同じ系統のことを書かれたのを見て，私は自分が吉田先生の影響を多分に受けているだけに，それが先生の影響下のものなのか，それと独立のものなのか，わからなくなってきた。しかしともかく，ここではそのどちらであるかに関係なく，現在の私の考え方として述べる。

根拠づけられる可能性はないとせねばならない。ここで確実に言えるのは，少くとも今日の視点において見る限り，「合理性」の支配が今までのところ少しづつ着実に増している――と思われることぐらいであろう。もちろん，以上がユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学との対比だけの問題でないことは言うまでもない。大きくは(西欧的伝統の)数学全体の歩み，小さくはその個々の分野の交錯流転の様相，それらの中に，上記のような気の長い帰謬法(きびゅうほう)の過程が見出されるのではないか，というのが，私のここで言おうとすることである。既に大方の考えられる通り，この筋書きは，いわゆる弁証法的過程に他ならないのかもしれない。しかしわれわれは，あらかじめ合理性の支配する部分の存在を予想しつつ，しかもその一方で，われわれにはどうすることもできない経験的事実の存在をも認めている点で，ここではこれを帰謬法(きびゅうほう)的過程と呼んでみたのである。もし以上のような考え方を採るとするならば，数学的真理の絶対性など永遠に確立されないであろう。そしてそれは西欧的哲学にとって極めて深刻な問題でなくてはならない。それというのが，西欧の知識哲学の伝統において超経験的真理の存在を問題にするとき，その最も確実な例と見られてきたものこそ，他ならぬ数学的真理だったからである。また一方，数学にとって，それは耐えがたい屈辱であり後退であると見えることであろう。だからこそ，われわれはこの項の初めに「心を強くして」という言葉を添えたのである。

ただその反面，こういう考え方の場合には，その過程の中に現われる数学的モデル現実の或(あ)る断面に関する一つの理想化された合理的解釈は，その解釈の能力や限界と共に，その解釈のために立てられた前提の妥当性をも試す結果になるであろう。第3章の後半で述べたような，また，新しい公理主義の根底にある言わず語らず的相互理解のような(第1章)，何となく歯切れの悪い事態を数学の真理性の底に残す

くらいならば，上記のような思い切った見方を取るのもまた一法ではないか。これが私の考えの筋道である。

集合論とその表現との距離について　より具体的な形で，われわれの無限の問題に密着したところにも，或(あ)る種の問題があるように思われる。われわれは，第 3 章で集合論の多様化について触れたとき，形式的集合論全体が，従(したが)ってまた数学的推論を含む形式論的数学の世界全体が，直観的な自然数全体という終りなき過程の中に展開される様相を見た。してみると，その表現は，およそ連続的なるものの原型というべき時の流れ——あるいは意識の流れ——のようなことがなくても，可能であるように見える。言いかえれば，例(たと)えばディジタル電気時計の示すような，跳び跳びの時刻と共に推移する世界の中でも，そうした表現は可能であるかのようにも見えるのである. 実際，論理とは，一つの主張が時の経過と共にもやもやと「連続」的に変化する態のものではなく，「甲である」，「しかるに甲ならば乙である」，「故に乙である」などという具合に，いわば飛び石づたいにディジタルな歩みを取るものなのである。してみると，われわれの現実の中に確かにあると思われる連続的時間，この不思議きわまる現象は，事，論理に関する限り，ただその「飛び石」の過程に場を提供するだけのものなのであろうか。

しかしその反面，およそ連続なるものは，幾何学，解析学はもとより，もろもろの数学分野において，つねにその不断の源泉であり，最も重要な対象の一つであった。それのみではない。われわれの思考は，つねに連続的な時間の中にある。特に体系化される以前の創造的活動において，それは一段とそうであるように見える。ガウスにおいてもリーマンにおいても，カントルにおいてもデデキントにおいても，そしてまたゲーデルにおいてもコーヘンにおいても。ところが上来述べてきたことは，それを「客観的」に「正確」に表現する仕事が，連続

的流れでなく，自然数という散点的刻み目の中に，はめこめるという事態である。

してみると，ヒルベルト，ゲーデル，スコーレム，コーヘンと続く今日の形式論的理論の線上には，何かそこに漏れたものがあったのではないかと問うことも，また許されてよいであろう。考えてみると，（恐らく近代物理学における熱力学第二法則——エントロピーの増加に関すること——と，その背後にある自然現象の統計的性格を摘出する仕事あたりを例外として，）この不可逆で多様多彩な「時間」なるものが，われわれの「数学」的世界認識の中で，真に決定的な役割を演じたことはなかったのではないか。何が漏れているのか，それは私にはわからない。しかし私は，何かがそこに漏れているという予感のようなものを禁ずることができない。

しかし——と，また言う——その反面において，スコーレム，コーヘンなどの歩みの線上にこそ，合理的思考の本質的なものがあるのだという思いもまた，その反対の思いと共に深い。実際，合理的思考なることを，まず人間が任意有限の言葉によって対象を命名し，同じく任意有限の法則などに頼って事象を記述することに始まり，やがてその中に展開される認識の様式であると解する限り，コーヘンの結果に立到（たちいた）るような事態こそ，およそ避けがたいことのように思われる。実際，世界の合理的解釈などということは，つねに一つの理想化であるように見える。clear cut な概念，それはもはや現実そのものではない。前にも触れた通り，「命名」ということがすでに現実に対する一種の「截断（せつだん）」なのである。

こうした見方からすれば，カントルの集合論自身，時の流れの中における事象の継起ということを手がかりとして生れた一つの理想化に他なるまい。そして最も「本質的」な連続なるものの合理的把握という試みには，所詮（しょせん），茫漠とした何物かが残ることを，われわれは容認し

なくてはならないのかもしれない。いささか低徊趣味も度が過ぎるような気がするけれども，ともかくこの問いは，第 4 章までに既に何度か示唆(しさ)した無限定の限定という問題にからみ，またもちろんゼノン以来の動と不動の問題にもからんで，私に多くのものを思わせる。もっとも，この種の問題は，気軽に口にするぶんには楽しいかもしれないが，そこに数学的な何らかの事実を打ち立てようとすると，生涯を棒に振って悔いないだけの覚悟が必要であろう。ただ幸か不幸か，これはすでに歴史の問題ではない。

× × ×

数学全体はもとより，その中の無限という局面(のおそらく一部分)だけを捉えても，こうしてみると，そこには文字通り無限の可能性が秘められているように思われる。そしてそれは，われわれがその歴史を辿(たど)ってきた「数学」なるものの中に，なお永遠無限の変貌発展の可能性が残されていることを示すものなのではないだろうか。

数学的無限について最初の言葉を述べたのがゼノンであるか否(いな)か，それはもはや永遠の忘却の淵に沈んでいる。それに対して，今日の問題として言うとき，無限について最後の言葉を述べたのがカントルだとも，コーヘンだとも，私には思えない。およそ限定されざるものである無限者は，なお果しない霧の彼方(かなた)にあって，それに対して合理的限定の試みの行なわれるたびに，一段と深い内奥に，その真の姿を隠すもののごとくである。

参　考　文　献

以下は，本書の執筆に当って少しでも参考にしたものを中心に，たまたま筆者の眼に触れたものを

(1)　近代・現代数学の歴史的概観を与える概説書（文献番号 101〜）

(2)　近代・現代数学の各分野の理解を助ける原典および理論史（同 201〜）

(3)　近代・現代数学史研究のための手引書および史料（同 301〜）

の三つに分類したものである。網羅的であることは考えなかったが，本文の対象が局限されていた点を考慮し，それを補うため，実際には使わなかった文献も挙げてある。（全く使わなかった文献には番号に*を付けた）(1)，(2) では主として日本語の本を挙げることとし，邦訳のある書物の原典の出版所は省略した。なお日本語による科学史関係の著書，論文の網羅的なリストが，1965 年以来『科学史研究』に載っている。すなわち

(1)　石山洋ほか編，科学技術史関係年次文献目録

なお，これに似たものは同誌創刊当時にもあった。また 1947–72 年に発行された数学史関係の邦書の主なものは次で知られる。

(2)　『数学セミナー』1972 年 8 月号所載，「歴史の図書一覧」

(I)　一般向き概説書

本書で現代数学と呼んだものの解説書は数多いが，それを歴史的に大観する本格的な歴史書はまだないと言ってよい。当然のことながら，時機尚早なのである。本書も勿論（もちろん）その一面観に過ぎず，これを補足，拡大，深化するために，まず

(101)　N. Bourbaki，*Éléments d'histoire des mathenatiques*, 1 éd. 1960, 2éd. , 1969（村田全，清水達雄訳『ブルバキ　数学史』

1970，東京図書）

(102)　彌永昌吉『現代数学の基礎概念（上）』1944，弘文堂

(103)　彌永昌吉「空間概念の拡張」，『科学』1957 年 8 月号–1958 年 1 月号

(104)　彌永昌吉「現代代数学の形成」，『科学』1960 年 1 月号–7 月号

(105)　彌永昌吉「位相的代数的方法」，『科学』1962 年 1 月号–7 月号

を挙げる。後三者は (102) の続篇と見られる。(102) には増補，復刊の予定があると聞く。また純然たる歴史書ではないが，次の書物も加えてよい。

(106)　吉田洋一，赤摂也『数学序説』1954，改訂版 1961，培風館

本書で近代数学と呼んだ 19 世紀的数学の歴史については

(107)　F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundrert*, I. 1926；II. 1927, Springer (1956, Chelsea)

(108)　高木貞治『近世数学史談』1933，復刊 1970，共立出版

があり，その次の時代で現代数学に移行する時期の状況については，論文集

(109)　F. le Lionnàis (éd.). *Les grands courants de la pensée mathematique*, 1 éd. 1948；2 éd.，1962（村田全監訳『数学思想の流れ』(1) 1974，(2) 1974，(3) 1975，東京図書）

のいくつかの論文が役立つ。

通史の中で近代，現代に記述のあるものには，

(110)　ルイブニコフ（井関清志，山内一次訳）『数学史 (1)〜(IV)』，1963–66，東京図書（原著は vol. 1,1960；vo1. 2, 1963）

その他いろいろあるが，新しい書物として

(111)　C. B. Boyer, *A history of mathematics*, 1968, J. Wiley & Sons.

(112*) M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times.* 1972, Oxford Univ. Press.

を追加する。これらは特に個性的な書物とも言えまいが，近代・現代数学史に関する基本文献は，(101) とこの 2 冊とで大体知られよう。より広い視野の下では

(113) R. Taton (ed.), *Histoire générale des sciences*, t.1 (1957), t.2 (1958), t.3-1 (1961), t. 3-2 (1964), Presse Univ. de France

の第 3 巻第 1 分冊（19 世紀），第 2 分冊（20 世紀）があり，逆に，より簡潔な概観としては，(109) 所収の二三の論文の他，

(114) 赤摂也，前原昭二，村田全編『数学のすすめ』1969，筑摩書房

所収の論文　彌永昌吉「数学思想の流れ」

(115) 森毅『数学の歴史』1970，紀伊国屋書店

などがある。後者は本来の意味での歴史というより，著者の史論として意味あるものであろう。なお百科事典の中にも

(116) 『世界大百科事典』（1955—，平凡社），「数学」の項

(117) *Grand Larousse Encyclopédique*, 1960–, ‘mathématiques’ の項

などの記事がある。他にも類例はあるであろう。

数学上の予備知識については，とりあえず，(106)，初等的な (114) の他

(118) R. Courant, H. Robbins, *What is mathematics?*, 1941（森口繁一監訳『数学とは何か』1966，岩波書店）

(119) T. L. Saaty (ed.), *Lectures on modern mathematics*, vo1. 1–3（1963–65）

（彌永昌吉，吉田耕作監訳『現代の数学』I–III (1965–68) 岩波書店）

を挙げる。詳しい参考文献表はこれらの本の巻末にある。またスタイ

ルは違うが，

(120)　高木貞治『数学雑談』1933，復刊 1970，共立出版

も加えておきたい。

数学の基礎，数学の哲学，数学思想史などに関しては，特に以下のものをあげる。

(121)　H. Poincaré, *La science et l'hypothése*, 1902（河野伊三郎訳『科学と仮説』1938，岩波文庫）

(122)　L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, 1912, Alcan（復刊 1962, Blanchard）

(123)　P. Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, 1920.（河野伊三郎訳『数学思想史』1943，岩波書店）

(124)　三宅剛一『学の形成と自然的世界』1940，弘文堂（復刊 1973，みすず書房）

(125)　下村寅太郎『科学史の哲学』1941，弘文堂

(126)　下村寅太郎『無限論の形成と構造』1944，弘文堂

筆者は特にこの二冊に大きな影響を受けている。

(127)　近藤洋逸『数学思想史序説』1947，三一書房

この第 3 章は，本書との立場の差異は差異として，読みごたえがある。

(128)　H. Weyl, *Philosophy of mathematics and natural science* (rev. ed), 1950,（旧版はドイツ語，1927）（菅原正夫，下村寅太郎，森繁雄訳『数学と自然科学の哲学』1959，岩波書店）

(129)　O. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geshichitelicher Entwicklung*, 1954, K. Alber Freiburg. München

(130)　G. Martin, *Klassische Ontologie der Zahl*, 1956（斎藤義一訳『数理哲学の歴史』1963，理想社）

(131)　S. F. Barker, *Philosophy of mathematics.* 1964（赤摂也訳『数学の哲学』1968，培風館）

(132) S. Bochner, *The role of mathematics in the rise of science*, 1966（村田全訳『科学史における数学』1970，みすず書房）

(133) S. Bochner, *Edosion and Synthesis*, 1969, Benjamin

なお，第 1 章の背景にある筆者の考え方については，次の書物を参照されたい。

(134) 村田全『数学史散策[1)]』1974，ダイヤモンド社

ポアンカレのその他の著書については (II) で再び触れる。

以上の他，哲学史，物理学史から特に次の三つを挙げておく。

(135) B. Russell, *History of western philosophy*，1946（市井三郎訳『西洋哲学史（上）（中）（下）』1954–56，みすず書房）

(136) E. Lund. M. Pihl. J. Sløk（英訳 W. G. Jones）, *A history of European ideas*, 1971（オランダ語による原書，1962）

(137) 広重徹『物理学史 (1) (2)』1968，培風館

(II) 原典の邦訳および個別的理論史

原典のことは (III) で述べる。古典的な著書や論文を邦訳，解説した叢書として

(201) 正田建次郎，吉田洋一監修『現代数学の系譜』1969—，共立出版

がある。第 1 期 10 冊（既刊 9 冊。『系譜 1』などと略記），引続き第 2 期 10 冊が予定されている。この叢書の場合，原著書名は省略する。

(II–1) **本文第 2 章**の各主題では，一般に (101)〜(113)（就中(なかんずく)(107)）の然(しか)るべき箇所が参考になる。特に近代的代数学の歴史では，

(202*) L. Nový, *Origins of modern algebra*, 1973, Noordhoff International

がある（1770-1870 を扱う）。また幾何学の方面では，

(203) リーマン，リッチ，レビ・チビタ，アインシュタイン，マイ

1) 「科学図書館」所収 `http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/ramble.pdf`

ヤー（矢野健太郎訳・解説）『リーマン幾何とその応用』（『系譜 10』）1971

(204)　ヒルベルト『幾何学の基礎』，クライン『エルランゲン・プログラム』（寺坂英孝，大西正男訳・解説。『系譜 7』）1970

がある。(203) の「解説」は「微分幾何学小史」，(204) の解説は射影幾何学から数学基礎論に至る歴史で，特に後者は百ページに及ぶ力作である。これらの原典の或（あ）るものは

(205)　B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grundeliegen*, 1868（菅原正巳訳『幾何学の基礎をなす仮説につ（いて』1942，弘文堂。復刊 1970，清水弘文堂）

(206)　D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*，1899（中村幸四郎訳『幾何学基礎論』1943（第 7 版，1930 の訳），弘文堂（復刊 1971，清水弘文堂））

にも解説付きで訳されており，利用できる射影幾何学の歴史については，

(207)　J. L. Coolidge, *A history of the conic sections and quadric surfaces*, 1945, Oxford Univ. Press (1968，Dover)

に一応の記述があるが，それ以上を知らない。

(208)　M. Chasles, *Aperçu historique sur le developpement des methodes en geometrie*, 1837（2ed., 1875）, Gauthier-Villars

は史料としても重要だが，手に入りにくいであろう。非ユークリッド幾何学でも

(209*)　F. Engel, P. Staekel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß*（Urkunden Sammlung ⋯）, 1895, Teubner

(210*)　F. Engel, P. Staekel, *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, Teil I. *Lobatchevski*, 1899 ; Teil II, *Die beiden Bolyai*, 1913, Teubner

などは手に入りにくいが，この歴史の場合は，力作

(211) 近藤洋逸『新幾何学思想史』1966，三一書房

がある。旧版『幾何学思想史』(1946) の改訂版である。哲学的には

(212) B. Russell, *An essay on the foundations of geometrie*, 1897, Cambridge Univ. Press (1956, Dover).

の第 1，第 2 章もおもしろいと思う。

近世の解析学に移ると，

(213) コーシー（小堀憲訳・解説）『微分積分学要論』（『系譜 1』）1969

がある。これはいわゆる《Résumé》（1823）の訳だが，現在

(214) A. L. Cauchy, *Cours d'analysis de l'École politechnique*, 1821（(1968, Darmstadt）

も手に入る。次の史料集は（今回は利用できなかったが）便利である。

(215*) G. Birkhoff (ed.), *A source book in classical analysis*, 1973, Harvard Univ. Press

近世解析学史では，(102)，(127)，(109) 所収の二三の論文などの他，

(216) G. Cantor（P. E. B. Jourdain 訳），*Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, 1915(Dover 版あり）

に訳者が与えた 'lntroduction' がおもしろい。入手困難ではあるが，

(217) E. Picard, *Sur le development de l'analyse et ses rapports avec diverses science*, 1905, Gauthier-Villars

(218) G. Julia, *Essai sur le développement de la theorie des fonctions de variables complexes*, 1933, Gauthier-Villars

などもある。実関数論の主な流れは (102) でも読める。なお『系譜第 2 期』に

(219) コーシー，ワイヤシュトラス，リーマン，ワイル（吉田洋一，山中健訳・解説）『複素関数論の形成』

が予定されている。無理数論の古典たる

(220)　R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, 1872
は，現在 (221) との合本の形で手に入る（1969，Vieweg）。
(221)　R. Dedekind, *Was Sind und wassollen die Zahlen?*, 1887
この二つの論文の邦訳には
(222)　デデキント（河野伊三郎訳）『数について』，1961，岩波文庫
がある他，次の書物が『系譜　第 2 期』の中に予定されている。
(223)　デデキント，ワイル（河田敬義訳・解説）『連続と無理数』
(II–2)　**本文第 3 章**関係の古典としては，まず (221) と共に
(224)　G. Cantor,（E. Zermelo 編）*Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, 1932, Springer（1962, Oims）
が挙げられる。その中の重要な論文（英訳 (216)）の次の邦訳も予定されている。
(225)　カントール（功力金二郎訳・解説）『超限集合論』（『系譜 8』）
記号論理，集合論，基礎論関係の原典で手に入りやすいのは，以上の他，
(226*)　G. Boole, *An investigation of the laws of thought*, 1854, Londres（1958, Dover），（『系譜　第 2 期』に，赤摂也訳・解説『思考の法則』の予定あり）
(227)　ペアノ（小野勝次，梅沢敏郎訳・解説）『数の概念について』（『系譜　2』）
(228)　B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, 1919（平野智治訳『数理哲学序説』1941，弘文堂；1954，岩波文庫）
(229)　A. N. Whitehead, B. Russell, *Principia mathematica*，3 vols, 1 ed.，1910–13 ; 2 ed., 1925–27 (Paper back ; vol. 1, 1964), Cambridge Univ. Press
(230)　D. Hilbert, *Hilbertiana*，1964，Darmstadt（1918–25 の 5 論文）
(231)　K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of*

the generalised continuum hypothesis, 1940, Princeton Univ. Press

(232) P. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, 1966 （近藤基吉，坂井秀寿，沢口昭章訳『連続体仮説』1972，東京図書）

などであろう。その他 Frege の著作を始め最近この方面で復刊される例が少なくない。史料集としては (129) の他に，

(233) M. Davis (ed.), The undecidable, 1965, Raven

(234) J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel ——A source book in mathematical logic, 1879–1931——*, 1967, Harvard Univ. Press

がある。他方，この方面の歴史ないし史的概観としては，(101)，(216) の他

(235) R. L. Wilder, *Introduction to the foundations of mathematics*, 1965（吉田洋一訳『数学基礎論序説』1969，培風館）

(236) J. Cavai1lès, *Philosophie mathematique* 1962, Hermann

(237) 功力金二郎『解析学要論 1』1951，弘文堂

が目につく。(236) は遺文集で，『集合論形成史』（1938），『Cantor-Dedekind 交換書簡(仏訳)』(旧版 (1937) は原文)，『超限と連続』(1947；執筆は 1940)が集められている。Cantor の書簡は他に，(224)，《*ActaMath.*》t. 50 ((1927) 《*Archives for histroy of exacr sciences*》vol. 2 ((1965)) などにも見られる。フランス経験主義に関しては，(101)，(134) の他，

(238) 近藤基吉『解析集合論』1938，岩波書店（所載の平野次郎の論文）

が参考になる。なお或(あ)る時期迄の集合論，記号論理の文献探索には

(239) A. A. Fraenkel, *Abstract set theory*, 1952, North-Holland

(240) A. Church, A bibliography of symbolic logic, *Journal of symbolic logic*, vol. 1, 1936；追加訂正，vol. 3, 1938

などが網羅的で便利である。他の分野にもこのたぐいのものはあると思う。

(II–3)　**本文第 4 章**の内容は特に「歴史」と呼びにくい部分で，成書も少ない。ここでも (101)〜(106) はつねに基本的であるが，それと共に

(241)　日本数学会編『岩波数学辞典』第 1 版，1954；第 2 版，1968，岩波書店も考慮してよい。全体的には「歴史」の辞典ではないが，「歴史」という小見出しのある項目 (約 40)，全体として歴史的記述をとっている項目 (約 20) などがあり，多くの基本的文献もこれによって知られる。歴史のためには第 1 版も捨て難い。

ついでに次の二つの辞典を挙げておく。

(242)　林達夫ほか 4 氏監修『哲学事典』1971，平凡社

(243)　伊東俊太郎編『現代科学思想事典』1971，講談社

本文第 4 章 §1 については，

(244)　ヒルベルト (一松信訳・解説)『数学の問題——ヒルベルトの問題』(『系譜　4』)，1969

が力作である。同じく §2(a)，§3(a) の位相数学については，最近

(245*)　J. P. Pont, *La topologie algébrique——des origines à Poincaré*, 1974, Presse Univ. de France

が出た。『系譜　第 2 期』にも (219) の他，

(246*)　リスティング，ボアンカレ (小松醇郎，蟻坂仲明訳・解説)『トポロジー』

(247*)　フレシュ (功力金二郎訳・解説)『抽象空間』

が予定されている。§2(b) の積分論については

(248)　T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration——Its origins and development——*, 1970, Wisconsin Univ. Press

がまとまっている。非可測の問題の歴史はまだ書かれていない。本文第 4 章 §2 (b) （代数）の関係では，『系譜 第 2 期』に

(249*)　アーベル，ガロア（守屋美賀雄訳・解説）『群と代数方程式』

の予定がある。また本書で触れなかった重要なテーマたる位相群の古典

(250*)　カルタン（杉浦光夫訳・解説）『連続群』

も予定されている。同 §3(c)（構造）については，(101) の他，(109) 所載のブルバキ，ヴェイユ，デュドンネなどの論文があるが，

(251)　彌永昌吉『純粋数学の世界』1942，弘文堂

の中に，その形成期の雰囲気のうかがえる部分がある。また

(252)　森毅『現代数学とブルバキ』1967，東京図書

も参考になる。同 §3(d) の数理科学では (114) 所載，竹内順治「コルモゴロフ」の他

(253)　北川敏男『統計学の認識』1948，新版 1968，白揚社

などがあり，サイバネティクス，電子計算機関係では次のような例がある。

(254)　N. Wiener, *Cybernetics or Control and communication in the animal and the machine*, 1948（池原止戈夫ほか訳『サイバネティックス』1957，第 2 版，1962，岩波書店）

(255)　M. Gardner, *Logic machines and diagrams*（McGraw-Hill）（仏訳，M. Ghezzi, *L'étonnante histoire des machines logiques*, 1964, Dunod）

(256*)　高橋秀俊『電子計算機の誕生』1972，中公新書

以上，成書を中心に述べたが，一般にこの時期の個々の分野の歴史については，普通の書物の序文，付録などの中におもしろいもののあることがある。例(たと)えば

(257)　小松醇郎『位相空間論』1947，岩波書店

(258)　岩沢健吉『代数函数論』1952，増補版：1973，岩波書店

(259)　一松信『多変数解析関数論』1960，培風館

など，この他にも多数あると思われる。

或(あ)る時点で或(あ)る学者の与えた学界展望も，情報源としてだけでなく史料として有益な場合が少なくない。例(たと)えば第 2 回国際数学者会議 (Congrés, 1900) における Hilbert の講演 (140) は別格としても，第 1 回同会議 (1897) における Poincaré の講演，1937 年の国際数学者集会 (Reunion) における A. Denjoy の講演，あるいは《*Amer. Math. Monthly*》所載の J. Pierpont の論文（1904 ; 本文 III–2–1)，同じく J. Dieudonne の論文 (1964) などは，報告としても史料としても有意義である。基礎論の方面では G. Gentzen (*Forschungen zur Logik*, No. 4, 1938)，Mostowski (*Rozprawy Math.*，IX, 1955) などが目につく。この種のものも類例は多いであろう。「展望」となると，日本数学会の雑誌『数学』にもよく現われる。特に日本における現代数学の浸透，展開については，次の書物が一応の展望を与える。

(260)　日本科学史学会編（清水達雄，村田全責任編集）『日本科学技術史大系　XII，数理科学』1969，第一法規出版

(II–4)　個人の生涯，業績について本書では余(あま)り触れなかったが，

(261)　小堀憲『大数学者』1968，新潮社

(262)　S. テユーリング（渡辺茂，丹羽冨士男訳）『アラン・テューリング伝』1969，講談社

(263)　H. Meschkowski,*Problem des Unendlichen, Werk und Leben Georg Cantors*, 1967, Braunschweig

(264*)　C. A. Valson, *La vie et les travaux du Baron Cauchy*，2 vols，1868（合本復版 1970, Blanchard）

(265*)　C. Reid, *Hilbert*, 1970　（彌永健一訳『ヒルベルト』1970，岩波書店）

などは数学的内容にも触れていて興味がある。(204)，(265*) 所収の Weyl の記事は特に大切である。

数学者の自伝，懐想録，あるいは友人の伝記や追想には，歴史的な意味の加わる場合も少なくない。例(たと)えば

(266) ソーニャ・コヴァレフスカヤ（野上弥生子訳）『自伝と追想』1933，岩波文庫

(267) B. ラッセル（中村秀吉訳）『自伝的回想』1959，みすず書房

(268) N. Wiener, *I am a Mathematician*, 1956（鎮目恭夫訳『サイバネティクスはいかにして生まれたか』1956，みすず書房）

(269) P. Lévy, *Quelques aspects de la pensée d'un mathematicien*, 1970，Blanchard（飛田武幸，山本喜一訳『一確率論研究者の回想』1973，岩波書店）

(270) 竹内外史『現代集合論入門』1971，日本評論社（の「序章」）

(271) H. Poincaré, *Savants et écrivants*, 1910（平林初之輔訳『科学者と詩人』1928，岩波文庫）

なお Poincare の思想を知るには，(121)，(271) の他，

(272) H. Poincaré，*La valeur de la science*，1905（田辺元訳『科学の価値』1916，岩波書店；1927，岩波文庫。別に矢野健太郎訳，創元社版もある）

(273) H. Poincaré, *Science et methode*，1908（吉田洋一訳『科学と方法』1927，岩波文庫，改訳版あり）

(274) H. Poincaré (G. L. Boned.), *Derniers pensees*，1913（河野伊三郎訳『晩年の思想』1939，岩波文庫）

などがある。なお最近フランスで彼の哲学に関する研究書が出た。

(III) 近代・現代数学史研究の手引書および史料

まず数学史一般に関する研究手引き書，便覧のたぐいとして

(301) G. Sarton, *The study of the history of mathematics*, 1936, Harvard Univ. Press

(302) G, Sarton, *The study of the history of science*, 1936, Harvard Univ. Press (両者の合本，1957，Dover)

(303*) G. Sarton, *Horus, A guide to the history of science*, 1952. Ronald

(304) R. C. Archbald, *Outline of the history of mathematics*,1949, Supplement of *Amer. Math. Monthly*, vol. 56

(305*) M. Daumas (ed.), *Histoire de la science*, 1957 (2 éd. 近刊)，(*Encyclopedie de la Pleiade*), Gallimard

(306) F. Russo (éd.), *Elements de bibliographie de l'histoire des sciences et des techniques*, 1954 ; 2ed., 1969, Hermann

(307) K. O. Nlay (ed.), *Bibliography and research manual of the history of mathematics*, 1973, Toronto Univ. Press

(308) C. C. Grllispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, 1970–, C. Scribner's Sons (約 20 巻の予定)

などを挙げる。さしあたっては (101) の他，(111) または (112) と共に，(301)，(306) を使うのが便利であろう。なお (306) の著者は (303) との併用を勧めている。(304) は 19 世紀半ば迄で少し古い。その点 (306)，(307) は最近の問題まで覆っているが，それでも自分に関心のある分野の文献は結局自分で探す他ない。むしろこれらの書物の項目にないテーマの中に，真の数学史的問題の見出される場合が少なくない。(305*)，(308) は個人中心の調査に特に便利である。

フランスで，原典抜萃のある手軽な文献案内として

(309) G. Canguilhem (éd.), *Introduction à l'histoire des sciences*, vol. 1, Elements et instruments, 1970 ; vol. 2, objet，méthode, exemples, 1971, Hachette

なる小冊子を見たが，日本にも，こうしたものがあるとよいと思う。以上のものとは全く別の型の書物だが，

(310)　広重徹編『科学史のすすめ』1970，筑摩書房

も一読に値しよう。

史料集 (source book) は分野別のものを既にいくつか挙げた。一般には

(311*)　D. E. Smith, *A source book in mathematics*, 2 vols. 1929. McGraw-Hill (1959, Dover)

が有名で，今でも対象によっては便利だが，近代・現代史向きではない。

(312*)　D. J. Struik, *A source book in mathematics—— 1200–1800* ——, 1969, Harvard Univ. Press

もほぼ同じで，むしろ

(313)　J. R. Newman (ed.), *The world of mathematics*, 4 vols,1956, Simon & Schuster

などが役立つかもしれない。筆者は《vol.3 *The mathematical way of thinking*》を見ただけだが，はやし・はじめ訳『数学から超数学へ』(1968, 白揚社)，林雄一郎の訳編で『空間についての数学』，『数学と論理と』，『自然のなかの数理』(各 1970，東京図書）が出ている。なお今迄に挙げたのは，思想史 (129)，非ユークリッド幾何学史 (209)，(210)，解析学 (215)，基礎論 (233)，(234) などである。

個人の全集，著作集，書翰集などは数学史研究の基本である。まず，フランスの学士院会員だった人に限られるが，本人が学士院入りの際に書いた業績録

(314)　Notice sur les travaux scientifiques

は便利である。著作集などに再録されている場合が少なくない，より本格的には，研究，対象たる原典と共に，

(315)　*Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften mit Ein-*

schluß ihrer Anwendungen, 1898–1935, Teubner

の然(しか)るべき部分などの参照も必要であろう。同じことは現代数学についても当然言われるが，(315) に相当するものとして何を選ぶかが問題である。

本書で言及した学者の全集，著作集などで気の付いたものは次の通りである。全集と選集とのあることが分っているものは全集の巻数を挙げたが，もちろん完全ではない。また全集とはいっても，単行本は除外されている例が多い。G. Frege その他，この種の出版は最近とみに増加しつつある。

(316*)　N. Abel (2 巻)

(317*)　B. Bolzano (企画中，約 50 巻)

(318)　E. Borel (4 巻)

(既出)　G. Cantor ((224) ; 1 巻)

(319)　A. Cauchy (12+15 巻)

(320)　R. Dedekind (3 巻)

(321*)　J. Fourier (2 巻)

(322*)　E. Galois (1 巻)

(323*)　C. F. Gauß (12 巻)

(324)　G. Gentzen (1 巻)

(325*)　J. Herbrand (1 巻)

(326)　D. Hilbert (3 巻)

(327*)　F. Klein (4 巻)

(328*)　L. Kronecker (6 巻)

(329*)　J. Lagrange (14 巻)

(330*)　P. Laplace (14 巻)

(331)　H. Lebesgue (5 巻)

(332*)　P. G. Lejeune Dirichlet (2 巻)

(333*) S. Lie (6 巻)

(334*) J. von Neumann (6 巻)

(335*) G. Peano (3 巻)

(336*) H. Poincaré (11 巻)

(337) B. Riemann (1 巻)

(338*) T. Skolem (1 巻)

(339*) K. WeierstraSS (7 巻)

(340*) H. Weyl (4 巻)

書翰集では,

(341) Cantor-Dedekind, *Briefwechsel*, 1937, Hermann

(342*) D. Hermite, *Correspondance avec Stieltjes*, 2 vols, 1905, Gauthier-Villars

などが重要である ((341) は (236) に仏訳されたものの原典) 書物の形のものは，この他にあまり知らないが，雑誌にはよく現われる。

数学史の専門論文の載る雑誌の内，筆者がよく参照するものを次に挙げる。

(343) American Mathematical Monthly, 1894–

(344) Archives for history of exact sciences, 1960–

(345) Archives internationales d'histoire des sciences, 1947–

(346) Historia mathematica, 1974–

(347) Isis, International review of the history of science, 1913–

(348) Japanese studies for the history of science, 1962–

(349) Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung, 1890–

(350) 科学史研究，1941–

(351) Mathematical Review, 1940–

(352) Revue d'histoire des sciences et leurs applications, 1947–

(353) Scripta mathematica, 1932–

(344) は特におもしろい。廃刊になったものでは，現代数学前夜迄で終っているが，

(354) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 1868–1942

は貴重である。この他，雑誌については (301)，(306) などを参照されたい。

〔**あとがき**〕この文献表を作っている内に，本書第 III 部の欠点が目につき始めた。すなわちこの部分はいささか「無限の問題」にこだわり過ぎたようで，少なくとも第 4 章は，§1 の後，例(たと)えばブルバキの構造主義に焦点を当て，その形成過程を示すと共に，ブルバキ主義では覆いえず，むしろそこから離脱しようとする動きをも示唆(しさ)するよう，試みるべきであったと思う。筆者の力自身の問題ではあるのだが，できるだけ早くこのような点を改訂できることを念願している。ただし勿論(もちろん)本書は本書で一個の完結した書物であり，筆者としてこの全体に責任を持つことは言う迄もない。

（1975 年 1 月）

・『数学史』(「数学講座第 18 巻、筑摩書房、1975 年 4、初版）所収。
・本書は、筑摩書房刊行「数学講座」第 18 巻『数学史』の第 3 部を摘出したものである。
・巻末の索引は省略した。
・適宜振り仮名をつけた。
・PDF 化には LaTeX 2_ε でタイプセッティングを行い、dvipdfmx を使用した。

科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは,

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs