日本数学史

三上　義夫

目次

第一部 **3**

一　総　　説 3
二　支那の数詞 6
三　算　　木 9
四　算　　法 14
五　数　　学 17
六　天 元 術 22
七　四 元 術 26
八　演 段 術 28
九　点 竄 術 35
十　方程と方程式 39
十一　行 列 式 42
十二　招 差 法 47
十三　円の算法 51
十四　円　　理 57
十五　角　　術 64
十六　累 円 術 69
十七　整 数 術 76
十八　方程式解法 80
十九　規矩術と幾何学 83

二十　円理豁術の諸問題 91
二十一　和算より洋算への推移 99

第二部 **107**
一　日本古代の数学 107
二　算盤の伝来 109
三　徳川時代に於ける数学の勃興 110
四　関 孝 和 113
五　関孝和と同時代及びその門下 119
六　関孝和直後の時代，円理の発達 125
七　安島直円と其時代 131
八　会田安明及びその時代 140
九　和田寧及びその時代 147
十　幕末の諸算家 153
十一　幾何学の発達 158
十二　西洋の影響 168

跋 **175**

第一部

一　総　　説

数学と云えば，又一般に科学と云えば，近世の西洋は頗(すこぶ)る進歩発達したものであって，我国でも現に西洋からこれを学んで居る。今の状態では何(ど)うしても西洋から学ばなければならぬ。けれども西洋の数学，科学と雖(いえ)どもその発達は文芸復興以来の近世数百年間の事に属し，それ以前の中世に於ては，暗黒時代と言わるる通り，数学にしても，科学にしても殆(ほと)んど見るべきものなく，至って幼稚なものであった。然(しか)るに宗教上，社会上，経済上等の変動と共に，文芸復興と呼ばれた時代が現出し，精神生活の著しく伸張することと為り，茲(ここ)に数学，科学の絶大な浸出となったのである。それには古代希臘(ギリシア)の幾何学並に印度(インド)の算術，代数も伝えられ，且(か)つ回々(ふいふい)〔イスラム〕文化の実験尊重の研究方法も伝承せられ，之を基礎として新らたに開拓の歩を運び，努力に努力を重ねて，幾多の障碍(しょうがい)に打勝ち，遂(つい)に一歩一歩，今日見るが如(ごと)き状態に到達したのであった。その間には幾多の偉人傑士が輩出し，全く惨憺たる辛苦の結晶である，壮大雄偉の構成が築き上げられたのも決して偶然ではない。我等が之を伝え，之を学び，之を尊崇するのも固(もと)より当然である。

併(しか)しながら，西洋の数学でも，科学でも，飜(ひるがえ)ってその発達の源泉を回顧するときは，古希臘(ギリシア)の整備した幾何学などに負うところも多いけれども，而(しか)も東洋の影響を受け，東洋の要素をも尠(すく)なからず混入し伝承して居ることも，亦決して之を忘れてはならない。

現に我々が習熟慣用するところの亜剌伯(アラビア)数字は，その名称の示

すが如(ごと)く，元来は東洋の所産である。亜刺伯(アラビア)数字と云うのは名称は稍々(やや)変であるが，もと印度(インド)で発達し回教国に伝わり，回教国から西欧に伝えた為めに，初めに印度(インド)数字とも称せられたが，接触の密接な回教国の方が痛切に感ぜられるところから，遂(つい)に亜刺伯(アラビア)数字と云う名称の方が普通一般に行われることとなったのである。そう云う歴史はあるが，印度(インド)にもせよ，亜刺伯(アラビア)にもせよ，東洋から出て遂(つい)に欧洲をも風靡することとなった，亜刺伯(アラビア)数字の筆算式計算法が至利至便として重要必須のものとなったのは，即ち東洋文化が欧洲文化を培養した一ツの適例である。

紙の製造も支那で始まった。印刷術も支那で始まる。活字も亦支那で始めて之を造る。磁針で方位を示すことも，支那の発見である。火薬も支那で発明された。紙幣の用途も支那の創意である。銅像の鋳造も支那で初めて試みられた。麻酔剤を用いて手術を行うことは，印度(インド)医学の業績である。支那にも亦同じような記録が見える。鉱物性薬品を内用に使ったのは，印度(インド)並に支那で早くから行われたことであり，希臘(ギリシア)の医学から始まるのではない。

この種のものが，現代西洋の科学，西洋の文化を構成する上に，如何(いか)ばかり大きな関係を及ぼして居るかは，蓋(けだ)し測り知るべからざるものが有る。

思うに世界歴史の大勢は，東洋と西洋との対立が古今を通じての最大の案件である。希臘(ギリシア)と波斯(ペルシア)との衝突から羅馬(ローマ)とパルチアとの対立となり，欧洲諸国と回々(ふいふい)国とがその対立を継承し，成吉斯汗(ジンギスカン)が出ては欧洲を圧迫する。土耳其(トルコ)も亦侵入する。

かくの如(ごと)き後を承けて，欧洲の文化は異常の発達を現出し，数学，科学の雄偉な歴史を彩ることとなる。或る意味から言えば，欧洲諸国は東洋の圧迫に対抗せんが為に，東洋との対立を有利に展開

せんが為に，諸科学の開発を余儀なくされたとも見ることが出来る。東洋から火薬を学んで，鉄砲の発明に精進した如(ごと)きもそれであり，印度(インド)との交通を土耳其(トルコ)の為めに遮断されて，道を南方と西方とに取って印度(インド)に迂回到達せんことを企て，その結果は地理上の大発見となった如(ごと)きもそれである。

その頃までの西洋は文化の程度に於て，科学の造詣に於て，東洋より進んだものでなかった。従って稍々(やや)もすれば東洋の為めに屈従を余儀なくされそうであった。然(しか)るに是れから奮励努力して文化の開発に努め，数学乃至(ないし)は諸科学に至るまで，隆々として進歩の域に進み，科学応用の力は遥かに東洋の先進国を凌駕して，全く之を威圧し屈伏せしめることとなった。過去三四百年間の歴史は，即ち西洋の異常なる科学の進歩に依って，世界の覇権を称し，之れが為めに東洋諸国は受動的の立場に置かれるに至った。

この悲運を打開せんが為めには，科学に於ても彼に比して引けを取ってはならない。彼の既成の科学を取入れて之を学習し，応用し得るし得た国に日本がある。

しかし皆意味もなく，西洋の科学なり，数学なり，むやみに模倣したと考えてはならない。学習し，応用し得た原因は西洋の数学，科学の開発にも順序があり，由来が有ったと同じように，我が日本に於ても最良の努力を捧げんが為めには，決して盲目的であった筈はない。歴史の回顧は過去の業績を誇る為めではない。之を鑑(かがみ)として，将来に伸びて行くことを目的とする。歴史の意味は其処(そこ)に在る，数学の歴史も亦その同じ理想を含蓄する。必ず我に力を与えるものでなければならない，西洋の数学発達の由来を正視することも甚(はなは)だ大切であるが，我等東洋人として，我等日本人としては，我が東洋の数学の歴史，我が日本の数学の歴史に通ずるこ

とは，即ち我が自覚の力となる。

私はこの意味に於て，東洋数学史，日本数学史が数学教育上にもその力を伸ばすことを望む。この故に支那，日本の数学に関して注意すべき事項を選び，茲(ここ)に之を略述して見たい。固(もと)より紙数にも制限があるし，極めて簡略に記(し)るすのみに止まる。細論の如(ごと)きは凡(すべ)て之を別の所に護る。

私は固(もと)より諸先輩の業績を尊重する。けれども妄(みだ)りに之を過信してはならない。長所は之を明らかにすべく，短所も亦之を知って補わなければならぬ。妄(みだ)りに過大に妄想して，徒(いたず)らに過去を誇らんとするが如(ごと)きは，我等の採らざるところである。何処までも正視して欲しい。我等は西洋に対して東洋を誇らんとするものではない。我が東洋，我が日本の業績を考え，我が自覚を高めるの料とし，将来の努力に信念と勇気を与え，回顧反省の力を加え，東洋と西洋との対立の舞台に於て充分に力を伸し得るように努めたいのである。

二　支那の数詞

1. 現に我々が使い慣らされて居る数詞，一十百千万億兆と云うのは，固(もと)より支那の数詞である。支那で古くから用いられ，我国へも随分古くから伝えられたものである。言うまでもなく，この数詞に於ては一十百千万までは，一桁毎に別々の名称を附してあるが，万から先きになると，十万，百万，千万，それから億であり，又十億，百億，千億，それから兆であって，万の万倍が億であり億の万倍が兆となり，次第に万倍を以て進む。

かくの如(ごと)き数詞の命名法は，全く普通一般に行われて居るのであるから，之(これ)に就(つ)いて我々には殆(ほと)んど何等(なんら)の感じもない。けれど

もこれは極めて巧妙に出来た数詞と云うべきである。即ち

三千八百四十一億七千六百五十九万二千四百二十三

と云う風に，一から九までと十百千万億……等の文字を使用するだけで，如何(いか)なる数でも自由自在に言い表わし，書き表わすことが出来る。その文字の組合せ方にも唯一の原則が適用せられ，些(すこ)しの例外もなく，極めて具体的にその命名法が成立つのであって，明瞭的確，誠に驚くべきである。

2. 此の数詞の命名法には掛けると寄せるとの原則が用いられる。即ち三千，四千，……と云うのは三，四，……を千に乗ずるのであり，三千四百と云えば，三千へ四百を加えるのである。

かくの如(ごと)き原則は西洋の数詞にも同じく存在する。併(しか)しフランス語では八十の事を quatre-vingt，即ち「二十の四倍」と呼ぶことになって居るが，これは頗(すこぶ)るまずい。支那，日本の数詞はそんなまずい事はない。

英語では十一，十二，十三，十四，……を

eleven, twelve，thirteen, fourteen,……

と呼ぶのであるが，十三以上は凡(およ)そ形式が同様な語法であるとはいえ，十一と十二とはその形式も異なる。我が数詞にはかくの如(ごと)き不体裁は無い。且(か)つこの英語の数詞では十と一二三……の組合せに於て，その原文の辞の形を変じて居るが、我が数詞では原文字の変形と云う事が無いから，その点に於ても明瞭適切な訳である。

英語では一般には千の倍数として繰返し呼ぶのが原則であり，三位循環になって居るが，併(しか)し

1931 を nineteen hundred thirty one

と称し，即ち十九百三十一と呼ぶ如(ごと)き異例になり，甚(はなは)だ不整正である。我が数詞にはこう云う不体裁もない。

又桁数の多い数を西洋の言葉で丹念に書き表わすこととすれば，随分長たらしいものとなる。我国では漢字の数詞が甚(はなは)だ適切である御蔭で極めて簡潔に書き表わされる。

3. 西洋では数詞の命名法が適切簡明でない為に，文章中に於ても長たらしい数詞を避けて，亜刺伯(アラビア)数字で書き表わすことが便利ともなる。けれども我国では数詞が整頓して居るから，その必要に乏しい。而(しか)も近年に至り昭和9年1月31日など云う如(ごと)く書き表わす風も多少用いられて居るが，之を昭和九年一月三十一日と書いたのと，何(いず)れが感じが好いか。かくの如(ごと)きは恐らく単なる西洋かぶれに過ぎないであろう。

西洋の数詞では，三位循環になって居るから，亜刺伯(アラビア)数字で書く場合に三桁づつ区切るのは当然であるが，我国の数詞は四位循環であるのに，之をすらも三桁づつに区切る風が出来たのは全く西洋の模倣であり，甚(はなは)だ感服し難い。必ず心すべきであろう。

4. 四位循環の数詞命名法は，我国では現に普(あま)ねく行われて居る。けれども和漢を通じて，古来凡(すべ)て同様であったのではない。江戸時代の和算書中にも之とは異なれる命名法が時に見られる。即ち

五兆八千五百六十七万六百五十一億一千二百三十八万三千……

と云う如(ごと)く，億の上に万字を加えて，億の億倍が兆となると云う風に命名したものがある。この命名法で兆から上も矢張(やは)り同様に兆の億倍，京の億倍と，億倍づつに進む。即ち八位循環であり，その八位は万を中に入れて四位に区切ってのものである。

この種の八位循環の命名法は支那では全く普通のものであった。

我が日本でもこの種の命名法が多少は用いられながらも，四位循環に統一されたのは，恐らくその方が簡便なのであろう。

5. 支那では現代でも億と言わずして，万万と記(し)るすこともある。

万万と万を重ねて記(し)るすのは「漢書」の中にも財政の事などに関して見えている。万万に違いはないが，万万と云うよりも，唯一字で億と云った方が簡便である。我国では全くその簡便な方を撰ぶことになったのである。

6. 支那で初めに教詞の作られた時には，億と云うのも万万の意味ではなく十万の意であった。初めには各桁毎に別の名称を附して，全くの十進法を用いたのであろうが，後に十万，百万等と称することとし，大数の数え方に新紀元を作ったらしい。

併(しか)し「数術記遣」などに見えて居る如(ごと)く，大数命名法には色々と試みたものと見える。

希臘(ギリシア)では万で循環して数えること支那と同じであったが，極めて大きい数の数え方に就(つ)いて，Apollonius や Archimedes などが万を中に入れて八位循環の数え方を工夫したのが，著しいものだと言われて居る。その数え方は支那の普通の大数命名法と一致する。その間に関係があるか何(ど)うか，支那では希臘(ギリシア)の第一流の大数学者の工夫と云われるものが，容易に一般に通用したと云うのも，注意して置くべきであろう。

西洋で百万を million とし，百万の千倍を billion と呼ぶことになった如(ごと)きは随分容易なことではなかったようであるし，又その年代も支那に較べて比較にもならぬ新らしい事であった。

三　算　　木

1. 算木（サンギ）とは江戸時代の和算家の間に用いられた一種の算器である。普通には小さい方形の木片で之を作る。稀には竹製のものもあった。

江戸時代には，普通に算盤（ソロバン）を用いて日常の計算を

したのであるが，又算木も之と並んで用いられた。併し普通の計算をするのに，算盤と算木とを併せ用いたのではない。算木には自ら別の用途があった。即ち之を用いて代数計算を行うのである。算盤では加減乗除は甚だ便利であり，又開平開立も之を行うことが出来るけれども，算木では高次方程式の近似解法を行うことが出来た。即ち Horner の近似解法と原則を同じうする解法が出来るのである。それは算盤では出来ない。故に高次方程式を取扱うものは必ず算木を使用した。算木が出来ると言えば，単なる算術家ではなく，代数に通じ高次方程式をも取扱い得ると云うことであって，普通の算術家よりも優れたもののように思われたのである。

2. 和算家は算木を使った。併し算木は和算家の使い始めたものではない。支那で古くから使われたのである。我国へも王朝時代から伝来して居る。

算木は古い算器であり，算盤は算木に較べるとずっと新らしく出来たものである。算盤の無い時代には，日用の計算にも算木が使われたと見える。それは支那でも日本でも同じである。併し算盤が出来てからは普通の計算には算盤の方が便利であるから算盤ばかり行れるようになり，それだけならば算木は廃絶する筈であったけれど代数計算の用途が有った為に算木も亦後代までも行われた。

而も支那では算盤の用いられた為めの結果であるか，算木は何時の頃よりか忘れられてしまったらしく，後には算木と云うものは無くなる。

然るに我が日本では和算家が頻りに之を用いて，代数計算を盛んにやったものである。支那で創意された算木使用の器械的代数学が，支那では忘却されたに反して，日本では算木を使って盛んに之を活用した。その結果は和算家に特殊な一種の代数学が成立

し，発達し，自由に運用されることになって，和算の隆盛を見ると云うことになった。

支那では算木の代数学は，それだけで終ってしまい，和算家の考案に成ったような特殊の代数学は遂(つい)に成立することとならなかった。

3. 算木（サンギ）と云うのは日本での名称である。和算家は之を筭籌(さんちゅう)と書いて，サンギと訓(よ)んだこともある。筭(さん)も籌(ちゅう)も共に支那古来の文字であり，両者共に算木を意味する。この外に策とも言った。

筭(さん)と云い，策と云い，籌(ちゅう)と云えば，その文字に異同が有る如(ごと)くその形状並に用途にも異同が有ったであろう。併(しか)しこれ等の文字が古くから存在するのを見ても，算木が古くから行われたことが思われる。算木の算法は全く支那古来の計算法である。

筭(さん)と云い算と云うも，江戸時代の和算家の間には別に区別はなかった。現代の我々にも区別は無い。併(しか)し支那で古くは区別の有る文字であった。筭(さん)は竹冠に弄字を配し，竹製にして弄するもの即ち運用するもの，換言すれば算器であることをその字形が示めす。算字はその字の中に目を入れてあり，これは計算法と云う意味のものである。

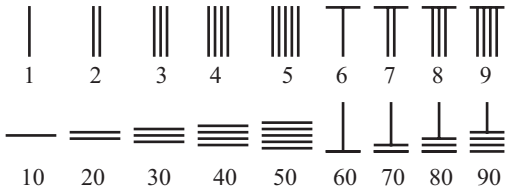
たとえ文字にその区別は有っても，算字もその起原を思えば，矢張(やは)り算器たる筭(さん)字から改造されたものであろうから，算法と云うものは即ち算木の計算法から発達したものと云うことになる。支那算法の大体は，算法と云う意義を有する算字の構成だけ見ても，その性質を了解し得られる。

4. 支那の数詞一二三の字形を見ても，算木を並べた形から出たものである。四は古くは亖の形に書いたのがある。

十，二十，三十と云うのも，十，廿、卅，卌と書いたものがあ

るが，これも算木を並べた形に基いたのであろう。

算木の並べ方は，後の時代には



の如き形に並べ，それから百位，千位，……と縦横を交互にしたものであるが，数詞は一位に於て一二三となり十位に於ては十廿卅と書くと云うのは，一位と十位とが縦横を異にしながら，後の算木の並べ方とは相反する。百と云う字も一と白とより成り，白は音標であるから，横になった一に意味があるのであり，百は横布となる。

然らば数詞作製の頃の古代には，算木の布列は一位が横，十位が縦とされたのであろうが，後にその並べ方が変遷したと認むべきである。

この変遷は恐らく易占の事に基づいたのではあるまいか。

5. 易では八卦とか六十四卦とか云う事が言われる。それは陰陽二種の算木――と－ －とを用い，之を三つ重ねて組合わせると，☰☱☲☳☴等の八種の組合せを生ずる。それが八卦であり，この八種を二つづつ組合わせると，六十四種の組合せを生ずる。之を六十四卦と称する。

この八卦なり六十四卦なりは，夫々意義あるものとせられ，それから占筮もされるのであるが，かくの如き組合せは算木の布列と密接な関係を有する。恐らく計算上に算木が普通に行われて居る為に，之を利用して八卦の布列を作り，易占をも行えば，又之に

よって特殊の哲学体系をも成すことになったのであろう。八卦は陰陽思想の産物であるから，計算用の算木の使用以前からのものとは思われぬ。又数詞の作製以前からのものとも思われぬ。従って計算の算木の関係があって，易の算木は作られたと見て宜(よろし)い。

算木の計算に勝れた支那で，八卦の算木を使って彼れの如(ごと)き広大なる哲学体系が作られたのも偶然ではあるまい。

易占では筮竹(ぜいちく)を作って或る数を求め，それに基づいて算木を並べる。筮竹(ぜいちく)は言わば縦にして之を用い，易の算木は横に之を並べる。茲(ここ)にその区別を見る。

この事情が発生してから，計算の算木も亦筮竹(ぜいちく)で出て来る自然の数と関聯するものとして，一位がもと横布であったのを，今は縦布にすることにしたのではあるまいか。全くの想像ではあるが，そうも考えて見たい。

算木布列の縦横を変更することは理論上には何(ど)うでも宜(よろし)いとは言え，実際に使い慣らされて居るのが変遷したのは，極めて重大な事であったと謂(い)わねばならぬ。

6. 算木の計算法では加減乗除は勿論(もちろん)，開平開立なども行われた。その開平開立の算法は「九章算術」等の古算書に見える。随分立派に考案されたもので，後にはその同じ算法から二次方程式並に三次方程式，四次方程式の近似解法も試みられることとなった。二次方程式の場合は「九章算術」にも見えて居るし，「周髀算経」の註にも出て居るから，少くも後漢末には出来て居たのである。

更にその算法を進めたのが，後に宋元時代の天元術となり，四元術ともなり，又高次方程式の近似解法ともなる。

その天元術が朝鮮に伝わり，又日本に伝わる。日本の和算家の手に移ってからは，支那では天元術も忘れられ又，算木も恐らく

忘れられて居たろうと思われる時代に於て，算木の算法が盛んに学習せられ，算木は算盤(ソロバン)の外に甚(はなは)だ大切な算器として，和算の終末までもその生命を有した。

四　算　　法

1. 算と云う字は計算法と云う意味であることは，前に之を述べた。「九章算術」と云う書名も，亦之を記(し)るした。「九章算術」は時には太古黄帝の時の隷首の作と言われたり，若(もし)くは周公の時代のものと言われる。宋の楊輝が十三世紀の頃に於て「黄帝詳解九章」など云って居るのは，黄帝の時のものと見ての事である。周公の時のものと言うのは，魏の劉徽が「九章算術」の序に記(し)るして居る。併(しか)し実際の作者も判らないし，今伝うるところの形のものとしては，後漢末の頃には在ったと見て宜(よろし)いのであろう。

併(しか)しこの古算書に「算術」と云う名称が附せられて居る。「漢書」の芸文志(げいもんし)を見るに「九章算術」の書名は出て居(お)らぬが，他に「杜忠算術」及び「許商算術」と云う二部の書名が有る。両書共に現存せぬので，その内容を知ることは出来ないが，而(しか)も「算術」と呼ばれるのは，「九章算術」と同じい。

現代の我々に取って算術と言えば代数並に幾何に対しての事であるが，漢代の算術とは左様な意味ではない。その当時に於ける数学の全般を指して云うのである。

現に「九章算術」には開平開立，比例，差分等の現代の意味での算術的の部分もあるが，併(しか)し又句股弦などに関する幾何学的事項もあるし，聯立(れんりつ)一次方程式解法と云う如(ごと)き代数に属すべきものも詳述されて居る。

2. 「九章算術」の註を作った魏の劉徽は，「重差」の著があった。

これは測量術に関する。後の唐代になってその巻首に海島測量の問題が有るところから，之を「海島算経」と称することになった。

この外に「五曹算経」,「孫子算経」,「張丘建算経」,「夏侯陽算経」,「輯古算経」など云う諸書が有り，これ等は何(いず)れも算経と称せられて居る。「五曹」と「輯古」は別であるが，他の三書は皆人名を冠して算経と言って居る。漢代ならば「某々算術」と云う所であったろう。併し算術と云っても算経と云っても畢竟(ひっきょう)同じである。「輯古算経」も初めは「輯古算術」と称したのである。

これ等諸書の中には漢代に在ったものもあるかも知れないが，併(しか)し大概は六朝時代に存したのである。「輯古算経」は唐初の作である。

六朝時代にも周の甄鸞(けんらん)の「五経算術」は算術の名称を附してある。

3. 宋末になると「宋楊輝算法」と云うものがある。尤(もっと)もこの書名は後に楊輝の著書若干(じゃっかん)を集めて刊行した時に命じたものであろうから，宋末の名称ではあるまい。

けれどもこの書中の一部に「続古摘奇算法」と云うのが有る。これには明らかに算法と見える。

明末には程大位の「算法統宗」(1592 年）があり，これも亦算法と言って居る。

併(しか)し元の朱世傑は「算学啓蒙」(1299 年）の著があった。算法と云わずして，算学とあるのが異なる。けれども又明の顧応祥は「句股算術」,「弧矢算術」等の著述が有り，書名に算術の二字を用いたのが，漢代と同じい。

これ等は凡(すべ)て現存の算書に就(つ)いて言ったのであるが，何(いず)れも算術，算経，算学，算法と有りて，皆算字を使用して居る。

算の字は数学全般を代表して居ると言っても宜(よろし)かろう。清の梅文鼎の「暦算全書」(1823 年) も天文暦術と算法の全書と云うこと

であり，矢張(やは)り算字が数学を代表して居る。

4. 和算書には何々算法又は算法何々と題した書物が甚(はなは)だ多い。澤口一之の「古今算法記」(寛文十年，1670)，関孝和の「発微算法」(延宝二年, 1674), 建部賢弘の「研幾算法」(元和三年, 1683), 宮城清行の「和漢算法」(元禄七年，1694 年) 等を初めとし，「算法闕疑抄(さんぽうけつぎしょう)」(万治三年，1660)，「算法算俎(さんそ)」(寛文三年，1663)，「算法発蒙集」(寛文十年，1670)，「算法明解」(延宝六年，1678) 等の如(ごと)く，この種の例は極めて多い。これ等は凡(すべ)て和算初期のものであるが，後代になると算法の二字を後附したものは少なく，この二字を冠したものが極めて多い。

算法点竄(てんざん)指南録，坂部広胖，文化七年 (1810) 序。

算法点竄(てんざん)指南，大原利明，同年。

算法天生法指南，会田安明，同年。

算法新書，長谷川寛閲，千葉胤秀編，文政十三年 (1830)。

算法求積通考，長谷川弘閲，内田久命編，弘化元年 (1844)。

算法開蘊，剣持章行，嘉永元年 (1848)。

これ等は教科書として作られたものであるが，皆算法の二字を冠して居る。教科書以外のものとしては，

算法雑俎(ざっそ)，白石長忠閲，岩井重遠編，文政十三年 (1830)。

算法奇賞，馬場正統，文政十三年 (1830)。

算法円理鑑，齋藤宜長閲，男〔息子〕宜義編，天保五年 (1834)。

算法瑚璉，竹内武信閲，小林忠良編，天保七年 (1836)。

算法方円鑑，萩原禎助，文久二年 (1862)。

この外にも幾多の書がある。

算学の二字を題したものも，「算学稽古(けいこ)大全」(文化五年，1808)，「算学鉤致(こうち)」(文化十年，1813) 等がある。又「算学志元録」(元禄

九年，1696）と題するものもあった。

上記の如(ごと)き算法又は算学の二字を冠し，若(も)しくは後附した書物は，何(いず)れも数学全般に亘(わた)ってその説述の範囲を拡げて居る。

福田理軒の「算法玉手箱」（明治十二年，1879）は数学の歴史を略叙して居る。藤田貞資の「日本算者系」及び小澤正容の「算家譜略」等は数学者の系図を記したものである。

算者と云えば，普通に数学者の事を云う。斎藤宜義は幕末から明治前期にかけての上州の偉大な数学者であるが，その郷里に於ては今でも之を板井の算者と云って居る。

支那でも日本でも算と云えば即ち数学を指すのである。算と云う字が数学を代表するとは，言うまでもなく計算が重きを成して，それに原づいて来たことである。

五　数　　学

1. 「数術記遺」，これは後漢末の徐岳の撰にして，北周の甄鸞(けんらん)が註をしたものと言われて居るが，この書名には数術の二字が見える。

後漢の張衡は世界最初の地震計を作ったりなどして，数学並に暦術に関しても有力な人物であったと云うが，崔玲の作った碑文に

　　数術窮天地　　制作侔造化

と述べて居る。これは誠に有名な句である。張衡の数術の力は天地を窮むる程であったと云うのであり，数術とは即ち数学と云う意味である。普通に云われた算術と云うのと全く同義と見れば宜(よろし)い。

劉宋の祖沖之 (429–500) 並に唐初の王孝通は，共に有力な算家であるが，この二人の文中にも数術云々と云うことが見える。

2. 宋の秦九韶(しんきゅうしょう)の「数書九章」（1247 年）は，数書の二字で数学

の書であることを示めしたもので，これは前に数術と云う熟語のあったのに対する。併(しか)しこの書名は後に附せられたもので，元来は「数学」と称したのだと云う。然(しか)らば数学の二字を以て算法書の名称に用うることが，茲(ここ)に起きたとも言って宜(よろし)かろう。

明末に至り「数学通軌」と云う書物が出た。柯尚遷(かしょうせん)の著にして，万暦六年 (1578) の序文が有る。この書は支那では伝って居なかったが，伊勢の神宮文庫に一本が有り，先年之を写して支那の数学史家へ伝えたことが有る。この書にも明らかに数学の二字を書名に冠する。十五年後に成れる「算法統宗」(1592–3) に算法の二字を冠したのと何等(なんら)の差異もない。

明末の忠臣方以智の子，方中通の著わした「数度衍」も数の字を数学書の名称に使ったものである。

清の康熙帝は帝王として極めて立派な人物であったがこの皇帝の御製と云うことになって居る「数理精蘊(せいうん)」は数理の二字で数学の事を表わしたのである。この書は支那の算法と西洋の数学とを併せ採ったものである。

「白芙堂算学叢書」の中には「数学拾遺」があり又曹汝英の著に「数学上編」（光緒己卯 1879）と題するものがある。

数術，数理，数学とは一般に算法，算学と云うのと同じく，現に云う数学の全体に亘(わた)ってのものであった。

3. 和算家も矢張(やは)り同様に数学と云う熟語をも使った。

関孝和の著に「数学雑著」と題するものが有り，池田昌意編の「数学乗除往来」（延宝二年，1674），田中佳政編の「数学端記」（元禄十年，1697），多田弘武の「数学松社編」（安永四年，1775）等に数学の二字を使って居る。

会田安明撰の「数理学貫通術之巻」と云うのもある。尤(もっと)もこれ

は後に数理学の三字を冠したのかも知れない。

白石長忠閲の「数理無盡蔵」(文政十三年，1830) と云うのもある。

川北朝鄰は数学諸問題の解義を集めて之を「数理起源」と題した。伊藤雋吉は萩原禎助の草稿類を整理して「数学通解」と題したが，これは大正初年の事であった。

和算家の間に数学，数理など云うのは，算法，算学と云うのと少しも意味に相違は認められない。

4. 然るに英国人偉烈亜力 (Alexander Wylie) が編した「数学啓蒙」(1853 年) は，この人が多く数学諸書を漢訳して伝えた最初のものであるが，この書には主として算術的事項を説いたのである。この書は我国でも飜刻された。

維新後の我が日本に就いては，西洋の数学を飜訳し若くは之を伝える事が甚だ急務であった。西洋の科学を採り入れて，彼れと対抗競争の場裡に立たなければならぬのが，何よりの急務であって，一切諸般の事凡てこの大目的の為めに進展したかの観がある。是に於て数学にしても，彼れから学んで，軍事，工芸その他の用途にも事缺かないようにしなければならなかった。それには支那訳書を利用することが早道であった。これが為めに漢訳数学書に見えたる訳語は，どしどし採用せられ，従来和算の慣用述語は適否良邪の区別もなく捨てられた。代数，幾何，微分，積分，抛物線，双曲線，方程式など云う述語が用いられるようになったのは，皆その事情から来たのである。点竄術，開方式，適盡法など云う旧来の述語は消えてしまった。

この際に当り数学と云う名称にも甚だしい変動が有った。

等差級数，等比級数の事を，数学級数，幾何級数と呼ぶのが「数学啓蒙」の用例であり，それが我国でも用いられた。明治初年の

算術書を見ると，数学級数と書いたものが珍らしくない。

数学とは全く今で云う数学全般の事ではなく，唯，算術と云う意味で言われたのである。

「数学三千題」又は「新選数学」など云う極めて広く行われた教科書は，数学と云っても全く代数に対しての算術と云う意味のものであった。

数学と云う名称は，元来の数学一般と云う広い高い地位から蹴り落とされたのであった。けれども事情は長くは続かなかった。

5. 東京数学会社が設立されたのは明治十年〔1877〕であった。立派な学会であるが，その類には会社と云う名称を用いた。勿論，前言う如く単なる算術と云うのみの意味で茲に数学と称したのではない。

後に東京数学物理学会が成立したのは，数学会社からの変改に拠る。

数学協会は明治二十年〔1887〕に設立されたが，勿論，数学一般を意味して数学と云うのであった。川北朝鄰が「本会発起の主意」を述べた中に，

> 抑モ泰西ノ数学ヲ初メテ本邦ニ伝播セシコトラ計リシハ，実ニ本邦固有ノ数学者ニシテ，即チ天明間本邦数学ノ面目ラ一層改進セシ頃ナリ。而シテ学者ノ最モ意ヲ洋法ニ注ギシハ天文，地理，航海，治河等トス。

とあるが，天明間云云と云うのは何うかと思うけれどもここにも全く現今の意味で数学と言って居る。

6. 此の趣意の中に更に言う。

> 嘉永癸丑，北米合衆国軍艦ノ浦賀ニ来ルヤ，初メテ泰西ノ事物ヲ聞見シ，遂ニ数学ヲ以テ開明学術ノ一大要部トナスコト

ヲ知覚セリ。此ニ於テ幕府ノ海軍所ヲ設クルヤ，数学ノ教授ヲ置ク。尋(つ)イテ講武所ニ陸軍ヲ設クルヤ，又斯学ノ教官ヲ置ク。而(しこう)シテ皆泰西ノ法ニ倣(なら)フ。其方法ハ和蘭(オランダ)ノ書ヨリ之ヲ取リ，傍(かたわ)ラ支那刊所ノ訳書ラ以テシ，蘭学ヲ修ムルモノソノ任ニ当リ曾(か)ツテ本邦固有ノ数学者ノ之ニ関セシモノアラズ，是ヨリ之ヲ数学ニ和洋ノ別ヲ生ジ，之ニ従事スル者概(おおむ)ネ数理ハ一理貫通，東西ノ別ナキコトヲ判決スルコト能(あた)ハズ，甚ダシキハ本邦数理ト云ヘバ，珠算ヲ使用スルニ過ギザルモノトナスニ至ル。……

川北朝鄰の師たる和算家内田五観が講武所に居った如(ごと)き例もあるから，嘗(かつ)て本邦固有の数学者の之(これ)に関せしものあらずと云うのは，恐らく当を得ないところもあるが，講武所の数学教授の事情などは誠に注意すべき事象なのである，川北朝鄰のこの趣意書は，今之を読んで洋算伝播の歴史に資するところが多い。

7. 数学と云う名称は，一時は今の意味での算術と云う如(ごと)き局部的の意味に堕したこともあるが，併(しか)し久しからずしてその本来の広い一般的意義に復帰した。

之(これ)に反して算術と云う名称は，前には数学一般と同義であったのが，代数に対しての算術と云う狭い意味に局限せられることとなった。明治二十年代の初めに出た上野清の「近世算術」や寺尾壽の「算術教科書」が出てからは，全くその名称はその狭い意味に固定してしまった。

西洋の数学が伝播するようになって，之を洋算と称し洋算に対して和算の名称も起きたが，柳河春三の「洋算用法」（安政四年，1857）に於ては所謂(いわゆる)算術のみ説(と)いて居るとは云うものの，和算と云うのは日本の数学全般の意味を包蔵するものであった。珠算の

み説(と)いて「和算用法」と名づけた書物も有るし，又珠算と云う意味で和算と云う人も無いではない。併(しか)し今では和算と云えば，全く日本の数学と云うことになってしまった。この「和算」と云う中に，算の字の古来伝統的の意味が今に至るまで保存されて居るのである。

数学と云うのは一般的広い意味のものとなり，算術と云うのは狭い意味に局限されたのは，恐らく数並びに算と云う字の字義からではなくして，学と術と云う文字の意義に制約されたのであったろう。支那は固(もと)より我が和算家時代にも，術も法も学も左まで区別を立てられるほどの事は無いのであったが，数学と算術との区別が判然とするようになったのは，即ち学問に対する自覚の高まった所以(ゆえん)でなければならない。

此処(ここ)まで来ると，数と云う概念と，算すると云う動作との間にも区別が有り，一方は数学と成り，一方は算術と云うことになるのも亦無意味ではないらしい。

けれども幾何学なども包括して一般に数学と云うのは，異様の感もあるが，それには矢張(やは)り伝統の力が働いて居る。

六　天 元 術

1. 天元術とは，これ則ち支那の代数学である。算木を使って行うところの器械的代数学であって，支那では古くから算木で計算を行い，その計算法に熟達して居るし，又開平開立なども自由に算木で行うことが出来るのであり，三次方程式も唐初に王孝通の「輯古(しゅうこ)算経」中には見えているのである。その三次方程式も算木を使って之を近似的に解くのは開立の方法に類似した仕方をすれば宜(よろし)いのである。

斯(か)く三次方程式を構成し，之を近似的に解くと言うのは，随分計算に達したものであったと言って宜(よろし)い。

その三次方程式近似解法も，算木を使って行うとはいえ，原則に於ては英国の Honer の解法と同じである。

2. 王孝通が三次方程式を用い，或る場合には四次方程式をも得て居るが，それは唐初の事であった。けれどもそれ以上の高次方程式が取扱われたのは，ずっと時代を下り，宋末元初即ち十三世紀の事である。宋の秦九韶(しんきゅうしょう)に「数書九章」(1247 年）を著わし，元の李治に「測円海鏡」(1248 年）と「益古演段」(1259 年）を著わし，これ等の書中に所謂(いわゆる)天元術と言うものが見える。その天元術は元の郭守敬が「授時歴」(1281 年）を作った時に，その暦書中に使った代数学である。又元の朱世傑も「算学啓蒙」(1299 年）があり，天元術を使って居る。朱世傑は更に「四元玉鑑」(1303 年）を作り，この書中には四元術と称するものが見える。

これ等は現に存して居るのであるが，天元術，四元術の発達にはこれ等以外にも関係の人々があったが，僅かに伝えられて居るのみでその著書など残って居(お)らぬ。

3. 天元術とは実は和算家の呼んだ術名である。支那では之を立天元一術と言う。即ち天元之一を立てて代数的演算を行うから，この術名を生ずる。

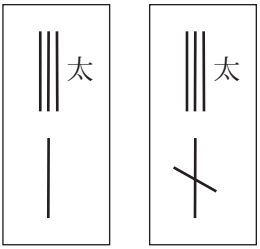
天元之一とは一本の算木を立てて未知数を表わすことである。「数書九章」には天元之一と言う事は言ってあるが，それは大衍(たいえん)求一術と言う算法に使ってあるのであり，用法が全然別である。即ち不定方程式

$$ax - by = 1$$

の整数解を求める為めに，天元之一と云う事が出て来る。李治や

その他に於てはそれとは異なる。一本の算木で未知数を代表せしめ，之を使って代数式を構成し，代数演算を施して，高次方程式を作り，矢張(やは)りそれを算木の使用に依って解くのである。

4. この算法に於ては絶対項を太極と云い，未知数を算木で代表したものを天元之一に立てると云う。



(1) (2)

図式 (1) は $3+1x$ を表わすところの式である。

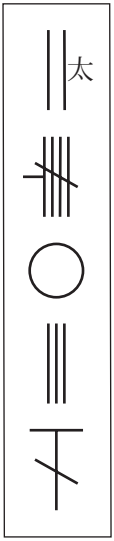
(2) は $3-1x$ を表わす。

算木で布列する場合には，正数は赤，負数は黒の算木を使って，正負を区別するのであるが，之を紙上に書き表わす為めには，秦九韶(しんきゅうしょう)はもと赤と黒とで書き表わしたと云うが，李治は (1) と (2) とに書き表わしたように，負数の場合には斜線を用いたのであった。この書き表わし方は後に我が日本にも伝わり，盛んに使われたのである。

何分算木の布列で表わすのであるから，太極の既知数と天元之一の未知数とは，両者共に同様の布列にする外はない。従って之を区別する為めには，布列の位置を以てする。即ち (1)(2) の図式に見る通り，未知数である天元之一は絶対項の下方に之を列する。高次の式に就(つ)いても，例えば図式 (3) は

$$2-14x+0x^2+3x^3-6x^4$$

を表わすのであり，x の高次の項になるだけ次第に下方に布列する。



(3)

x の次々の乗冪(じょうべき)の中で缺(か)けたものがあるときは，

書き表わすには○を書いて置く。これは印度並に
回教国あたりで行われた零の記号が、西域との交通の為めに伝えられたものであろう。かくの如き布列を用うることは，秦九韶も李治も朱世傑も皆同じい。

秦九韶は高方程式作製の代数演算に於て，立天元之一と言うことは言って居らぬが，併し立派にその算法を使ったのである。

この算法は算木を列して行うのであり，全く器械的に構成された特殊の代数演算であって，他の諸国にこの種の例あることを知らぬ。

5. かくの如く立天元之一の方法に依って得るところの方程式は，別に等号の工夫もないので例えば前記の式 (3) を得た場合に之を零に等しと置くとすれば，(3) の如く列しただけでそれが方程式となるのである。

そう言う有様であるから，方程式は必ず等号の一方にのみ諸項を有するものの形となる。算木使用の事情から自然にそうなったのである。

6. 立天元之一術では，算木の布列に依って数を表わし，そう言う諸数を上下の位置に置いて未知数の乗冪を表わすと言う手段を採る以上，取扱われる所の一切の算式は凡て数字係数のみ有するものに限られる。係数は単なる数であり，記号的のものとすることは出来ない。

これは天元術の代数演算に必然的に附随する制限である。

7. 天元術に依って得るところの高次方程式は，勿論，数字方程式に相当するものであって，之を解く為めには，Horner の近似解法と原則の相同じき方法を，算木を使って行うことにした。その解法は「数学九章」に丹念に書いてある。勿論，一桁づつ次々に

求めて行く。

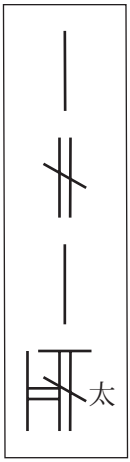
この解法は，古来の開平開立の算法を推し拡めたものであり，自然の発達であった。英国で Horner が発表したのは 1819 年の事であるが，それ以前に伊太利(イタリア)の医者で数学者であった Ruffini も亦之を得て居るけれども，併(しか)し支那で立派に同じ方法で高次方程式を処理したのは，約五百五六十年前であった。

8. 李治は前にも言う通り二部の書がある。二部共に立天元之一術を取扱う。然(しか)るに不思議なる哉(かな)，天元之一を立てて代数算式を表わし，方程式を表わす仕方がその二部に於て同様でない。「測円海鏡」では前言うように布列する。

「益古演段」では，上下を顛倒(てんとう)して図式 (4) の如(ごと)く布列しこれは方程式

$$-127 + 1x - 2x^2 + 1x^3 = 0$$

を表すものとなる。



(4)

同一人の李治が十年ばかりの年所を隔てて何(ど)うして斯(か)くも上下を反対にした布列方法を試みたのであろうか。これは恐らく両書共に依拠するところの先輩の原本があって，その原本に使われた原則の異同に依(よ)るのであろう。

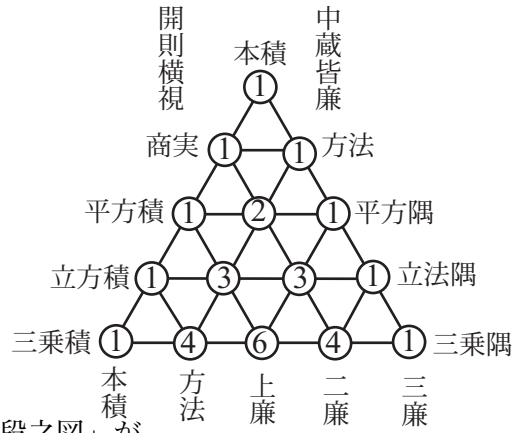
それにしても別々の人が別々の原則を使うと言うのも何か理由があろう。兎(と)に角(かく)，天元術発生の初期のもので未だ一定して居ないと言う事もあろう。

又後の四元術関係の何ものかがあるのではないか。私はそう考えたい。

七　四 元 術

1. 四元術は元の朱世傑の「四元玉鑑」に之を記す。天元術で天元之一を立てて未知数を表わす如く，四元術に於ては天地人物の四元を立てて四つの未知数を表わし，その算法を行う。けれどもこの書の本文中に於ては，術曰立天元一為（何）……とあるのみで，普通の天元術の形式と同じになる。而もそれは四元術の結果である。

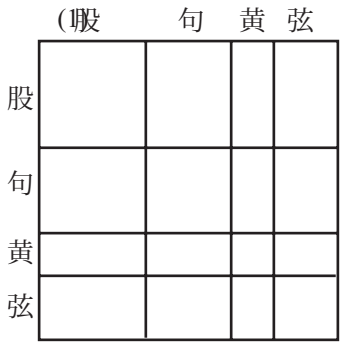
この書の巻首に「今古開方会要之図」があり，又「古法七乗方図」がある。即ち，この後者は図 (1) の如きものである。これは高次方程式解法に使用するものであった。



2. 次に「四元自乗演段之図」があり図 (2) の如きものとする。即ち

$$(\text{股} + \text{句} + \text{黄} + \text{弦})^2$$

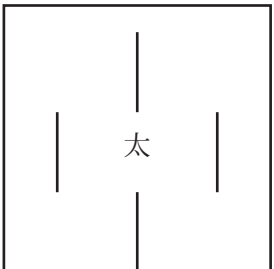
が如何なる形式のものとなるかを図に依って示す。



(2)

そうしてこの和を表わす為めに図 (3) の如く布算し，その和を自乗して図 (4) の式を得るものとする。

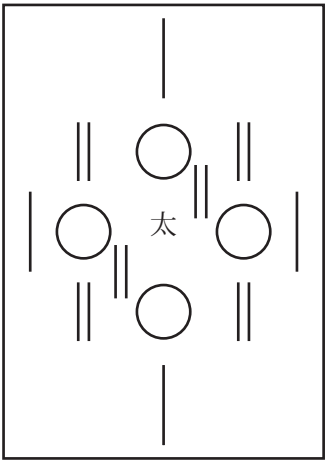
即ち上下左右の位置に依って四元の数を表わし，之を使ってその代数演算をも行う。



斯(か)くして四元を含める式四つを作り，それから消去を行うときは一つの天元の一のみ有する式に到達する。それが四元術である。

この算法に於ては，四元悉(ことごと)く備わらないでも，二元だけ三元だけでも矢張(やは)り同様に演算し得られる。

3. 著者朱世傑の友人祖頤(そしん)の後序に，地元を用いたものは平陽の李徳載の著書に在り，霍山の刑頌不の高弟劉大鑑の書には人元の二問が有ると見える。これで来歴の有ったことを知る。



(4)

4. この四元術は如何(いか)にも巧妙なものであるが，併(しか)し上下左右に列するのであるから，それ以上に五元の場合を取扱うことは出来ぬ。

又理論上には立派に出来るけれども，算木の演算で之を試みるのは随分繁雑なものであったろう。茲(ここ)に支那の器械的代数学は最高の発達に到り，そうして再び発達することなく後には忘れられてしまった。

天元術も同様に忘れられる。

天元術は日本に伝わり日本の代数学の基礎になるが，四元術は日本に伝えられた形跡がない。

八　演 段 術

1. 江戸時代に数学が発達するのは，支那の算書が伝って之を学習したのが，大きな関係がある。明の程大位の「算法統宗」(1592–3年）と元の朱世傑の「算学啓蒙」(1299年）が最もその関係が大きい。特に「算学啓蒙」は支那の天元術を伝えたものとして，和算の発達上に極めて大きな影響を与えた。この書は支那では失われて居たけれども，朝鮮では飜刻されたことが有り，用いられて居たので，朝鮮から伝ったのであろうと思われる。

東京文理科大学〔現：筑波大学〕の蔵書中に朝鮮本の「宋楊輝算法」と「算学啓蒙」とが有るが，「養安院蔵書」の印を押す。養安院とは幕府の医官曲直瀬(まなせ)氏の事であるが，初代曲直瀬(まなせ)正琳が宇喜多秀家夫人の怪疾を治療したので，秀家が朝鮮役の時に将来した書籍数車を豊臣秀吉から与えられた事がある。秀家夫人は前田利家の女(むすめ)にして，秀吉の養女であった。文理科大学の朝鮮本「算学啓蒙」はその中の一冊であったろう。

曲直瀬(まなせ)養安院は初代正琳の時から引続いて代々医者であったが，この養安院で所蔵の「算学啓蒙」が如何(いか)に利用されたかは明らかでない。

2. けれども「算学啓蒙」は万治元年 (1658) の年紀を以て，久田玄哲が之を飜刻した。之を梅所道雲の飜刻とされたこともあるが，跋文に梅所土師道雲謹書とあるから，道雲の飜刻と思い誤ったが，その文中に玄哲云々とある。又梅所は道雲の号にして，土師(はじ)が姓であろうが，梅所が姓のように誤り考えられたのである。

玄哲は紀州の人，洛〔京都〕の東福寺の虫干(むしぼし)の際に「算学啓蒙」を見出して，之を伝えることになった。寛文十二年 (1672) に至り，玄哲の教を受けたる筑前の人星野実宣は，更にこの書の解説を作った。

建部賢弘も亦元禄三年 (1690) に「算学啓蒙諺解(げんかい)」を編した。

「算学啓蒙」が如何に和算家の間に重要視されたかはこれで知られる。

3. 「古今算法記」，澤口三郎右衛門一之編，寛文十年 (1670)，この書は佐藤正興の「算法根源記」（寛文六年，1666）に於て提出された一百五十の問題の答術を公にしたものであるが，悉く之を天元術を使って解いたものであった。即ち「算学啓蒙」から学び得たる支那の天元術が，茲に充分の活用を見たのである。

「根源記」の問題は，外にも之を取扱った刊行の算書が有り，随分注意を惹いたものであった。何れも天元術を使用して居るが，その取扱方に無理らしいところも見られる。「古今算法記」に於ては少しも無理が無い。極めて明瞭に天元術を了解し，巧みに之を応用した。

然るのみならず，「算学啓蒙」や他の支那の算書に見るところによりも，一歩を進めたものがある，即ち二様の解答の有り得ることに注意した。換言すれば，一つの方程式に二根の有ることをも知ったのである。

けれどもかくの如き場合を正当のものと見ることが出来ないで，問題に無理が有るのだと考えた。故に之を飜狂と呼ぶ。問題を病的なりと見たのである。その飜狂を治癒して，正常のものに復帰せしめなければならなない。これには或る條件を附して制限したのもある。併し又問題中に所与の数を変更して，之を改めたのもある。

一元方程式に二根の見出されるものの有ることに遭遇して，あわてたのは，今から思えば変に感ぜられもするが，併し新らたにその事情に出会った場合の処置としては，誠に同情すべきである。斯くして支那では全く気附かなかったものに，今や気附くことに

なったのは，一歩の前進である。

支那では宋元時代の天元術，四元術が明代には忘れられ，清代になってもその意義を了解されないのであったが，西洋の借根方を伝えられて，之と比較して，天元術も借根方と原則を同うするものなることを悟り，欣喜措く能わざるものがあった。それは康熙末年の事で，西紀十八世紀初である。之に比すれば，我が日本では「算学啓蒙」のみに拠って，独自に天元術の真意を発揮し，盛んに之を応用したというのは，その相違も偉大である。

4. 澤口一之の門人佐藤茂春は「算法天元指南」(元禄十一年, 1698) を作りて天元術を詳らかに説明したが，後，寛政四年 (1792) に至りこの書は藤田貞資が再刻したことがある。貞資の如き数学教育に熟達した功労者が，この挙の有ったと云うのも，如何に天元術が後代までも重要なものであったかの確証である。この書の序文に言う。

> 難算ヲ解ノ術ニ至テハ，天元術ヲ越ユルコト無シ。予澤口一之ニ随テ之ヲ学ビ，其理ヲ得ルコト有ニ似タリ。夫レ此道ヲ学ブ者，天元ヲ明メザルトキハ，難算ヲ解クコト能ハズ。寔ニ天元ハ難算ヲ解クノ階梯ナリ。

又澤口先生は「根源記」の一百五十好に就いて，「天元の一を立てて之れが答術を施し，一百五十好，三十日に満たずして術成る」と言い「寔ニ本朝天元ノ元師タリ」と言う。

佐藤茂春は摂州高槻藩であった。

大島喜侍の作と思われる「数学紀聞」に拠れば，澤口一之は大坂の橋本伝兵衛正数門人にして，後に宗陰と称したが，

> 日本ニテ天元術之祖ハ，大坂川崎之手代橋元伝兵衛也。蓋啓蒙ニヨツテ也

と言い，伝兵衛は寛永明応の頃の人と記す。且つ「啓蒙」は紀州之士人玄哲が東福寺で見出したことを言う。徳島の岡崎宜陳の文書に，伝兵衛は「本朝ニテ朱世傑ノ天元術ヲ始テ仕候人」にて古今算法記，天元術，いろいろ書を著わしたものであったことを言う。「古今算法記」の著作には澤口一之の師橋元正数の関係があったものであろう。一之は大阪の人，後に京都に住し，京都で終った。

一之は時には関孝和の門人なりと言われ，名を後藤角兵衛と改め，後に終るところを知らずとも言われて居るが，前記の所載の方が正しいであろう。

5. 「古今算法記」の末に一十五問の問題が提出されて，之に答えたのが，関孝和の「発微算法」（延宝二年，1674）である。その諸問題は込み入ったもので，演段術と称する新算法を使って之を解いた。この書には結果の術文だけしか記るされて居らぬが，後に「発微算法演段諺解」（貞享二年，1685）が刊行せられ。その演段術の解法が見える。

「古今算法記」の諸問題は複雑であり，単なる天元術の適用だけでは之を処理することが六ケしい。天元術では天元の一に立てたる唯一つの未知数が記号として用いられるのみで，他の諸数は算木の布列に依って表わし得られるだけである。即ち天元術の式中に於て，諸係数は凡て数字であるものに限る。然らざれば算木を用いて表わしようがない。従って単に一元方程式が初めから一元の式だけで構成されることとなる。それは如何にも窮屈であった。

然るに問う所の未知数の外に他の一つの数を取って之れをも記号で表わし得ることとし，この両者の間に二つの方程式を作れば，消去に依って所問の未知数だけの一元方程式が得られる。関孝和の演段術では，この仕方を工夫して使用したのである。

併(しか)しながら天元術の代数演算を基礎にして居るから，余程巧みに考察を立てないと，その目的は達せられない。

この為めに今云う補助に仮用するところのものを天元之一に立てて，方程式を作ることにして見るが，所問の未知数はその方程式の諸係数中に包含されることとなるのであって，文字を使ってその未知数を書き表わし，算式を凡(すべ)て書いて表わし，算筆式に一切の演算をすることにする。

かくの如(ごと)き方程式二つを作れば，それから消去を行いて，所問の未知数のみ含める一つの方程式を得る。

この仕方では文字を記号に使うのであって，問題中の既知のものでも，凡(すべ)て記号で書き表わしても，固(もと)より差支(さしつかえ)ない。

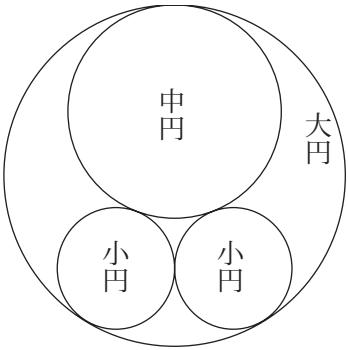
関孝和の演段術は大体に於て，今言う如(ごと)き性質のものと見て宜(よろし)い。

初めに作る方程式は勿論(もちろん)単に二つには限らず，三つ四つ等が出来ても宜(よろし)い。

場合に依っては，$y = \sqrt[3]{x}$ と置いて，y の方程式を作り，この方程式を変形して $y^3 = x$ と置き替え，それで x の方程式を作るものなども見られる。

要するに，仮りの補助数を使ってその補助数の方程式を作り，それからこの補助数を消去して，所問の未知数の一元方程式を得るのが，演段術の真意義である。

6. 一例を言えば，図 (1) に於て大円の面積より中円一個，小円二個の面積を引いた残り 120 歩と，中小円径差五寸とを知りて大中小円径を求める問題に於て，先ず小円径を求めることとする。

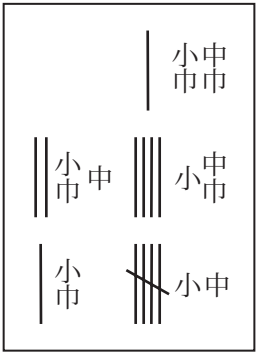


(1)

若(も)し之を天元術で処理するならば，天元之一を立てて小円径とする。即ち初めから小円径を未知数として，一本の算木で之を代表せしめ，問題中に言う所の條件に依りて中円径と大円径の両方とを小円径の式として布列する。即ち天元の式で之を表わす。

然(しか)る上にて図形上の関係に基づき，今得たる大円，小円の式を用いつつ，凡(すべ)てのものを小円径の式として列しつつ，計算を進めて最後の小円径の方程式に到達する。

その演算の全過程に亘(わた)って算式は凡(すべ)て小円径の式として表わされ，その式の諸係数は悉(ことごと)く算木の布列で示めされ，従って単なる数字係数に限られる。



(2)

7. 然(しか)るに演段術に於ては斯(こ)の如(ごと)き制限を撤廃し，先ず「小円径アリ，中円径アリ，大円径巾アリ」とする。巾字は冪(べき)の略字である。そうして仮りに天元の一を立てて大円径とする，即ち大円径を径数 (Parameter) として算式を作ることとする。斯(か)くして図形に基づいて，図式 (2) に示めす如(ごと)き方程式を得る。これは天元術の算式に依拠したものであって大円径が一本の算木で表わされて居るのであり，図式 (3) に相当する。小巾，中巾とあるのは 小^2，中^2 で

$$
\begin{aligned}
&\text{小}^2\text{中}^2 \\
&+(2\,\text{小}^2\text{中} + 4\,\text{小中}^2)\,\text{大} \\
&+(\text{小}^2 - 4\text{小中})\,\text{大}^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(3)

あり，これ等は縦線の右方に書いてあるが，並べて書けば之を相乗ずることとする。小中等の文字が直ちに記号となり，全然，書いてその演算を行うのである。

この式を得た上で，問題に言える條件に依りて，先ず $大^2$ を消去する。次に中を消去する。そうして小円径の一元方程式を得る。

8. 斯(か)くして天元術の解法に於ては，何処までも算木を用いての布列に拠る演算であるが，演段術に於ては算木の算法たることを離れて，全く筆算式の記号的代数学となり，文字を記号に使用して，代数演算が著しく自由になったことが異なる。算木を並べた形で数字係数を表わし，天元の一に立てたる大円径は天元術の場合と同様の形式に表わされ，大円径の次々の乗冪(じょうべき)は天元術の算式に於けると同じように，上下の位置に依って表わされて居るのは，天元術の形式を保存して居るものであり，天元術から発出したことを示めす。

是に於て算木使用の器械的代数学からして，文字を記号に使用するところの筆算式代数学が産み出されたのであり，和算後来の代数演算を自由に運用して著しい進歩を遂げることとなったのも，この演段術の考案に基づくのである。

支那ではこの種の筆算式記号式の自由な代数学は成立しなかった。

我が和算家の代数学は西洋近世の記号的代数学に比して少しも遜色あるものではない。

九　点 竄 術

1. 普通に関孝和は演段術を発明して，然(しか)る後に点竄(てんざん)術を発明したと言われる。遠藤利貞の「増修日本数学史」（頁 113–6）に

関孝和……初メ演段法ヲ発見シ，進ンデ点竄(てんざん)術ヲ発明セリ。…

…点竄術ハ一ノ筆算法ナリ。関孝和初メ天元演段法ヲ発セリ。此法朱世傑ガ天元術ニ勝レルコト数等ナリ。聞者感歎セザルハ無シ。孝和乃チ之ヲ拡メテ遂ニ点竄術ヲ発明シ，因テ……諸術ヲ発明セリ。…

関氏演段法ハ即天元演段法ナリ。天元術ノ解法ヲ筆シテ而シテ其術理ヲ視ルモノトス。是故ニ運算ノ法甚ダ易シ。……蓋シ演段術ハ維レ点竄術ノ由リテ生ズル所ノ根元ナル乎。是時点竄術ハ甚ダ之ヲ秘シテ，関門ノ徒モ其室ニ入ラザレバ之ヲ聞クヲ得ズ。演段ニ至リテハ天元術ニ次ギテ此法ヲ授ケタリ。是故ニ門外ノ者モ亦速ニ之ヲ知ルヲ得タリ。……点竄術ハ傍書筆算法ニシテ，西洋ノ所謂代数学ナリ。……

と説く。

又理学博士林鶴一君の如きも，近年に至りて関孝和の天元演段術は天元術から少しばかり進歩した如きものであったが，後に点竄術が発明せらるるに及んで，著しく便利なものになったと云うように説いて居る。

この種の見解は果して演段術と点竄術との区別につき正当適切なものであろうか。然らば点竄術には演段術の運用以外に如何なる妙味が有るのであうか。これ等は充分に之を了解することを要する。

2. 「増修日本数学史」（頁 113）に言う。

孝和始テ点竄術ヲ発明セリ。時ニ之ヲ帰源整法ト云フ。後チ松永良弼其主君内藤政樹ノ意ニ従ツテ之ヲ点竄術ト改ム。以後点竄術ノ名一ニ維レ行ハレテ，帰源整法ノ名世人之ヲ知ラザルニ至リヌ。

この事は関流数学の免状の目録の割註に記るされて居るのであるが，延享四年(1747) の免状控にも出て居る。これは見題目録中の記載であり，その記載は (1) に示す。

この見題目録中には，簡単な術名，書名などが多く並べられて居るのであるが，この中の点竄と云うのは左まで広い意味で言ったものではない。

単伏点竄の語も見えるが，これは単伏演段と云うのと，餘り相違もないのではないかと見える。演段術には単伏と衆伏との区別がある。

一 統術。関夫子名曰二帰源盈縮一。後松永良弼。蒙二岩城侯命一。更二名統術一。
一 点竄。関夫子名曰二帰源整法一。同レ右
一 籌策。
一 ……
一 単伏点竄。
……

(1)

3. 松永良弼編「絳老餘算」の目録解に，点竄を解して次の如く言う。

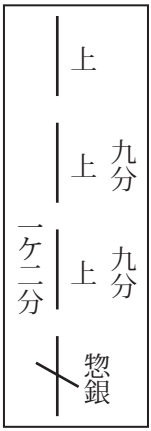
> 点はたとへば猶添といはんことし。
>
> 竄はたとへば猶削といはんことし。但し添は古法式数策数を云。点は専ら傍書に掛る。削は古法正負を主とす。竄は亦傍書を重しとす。意味少しき別なり。所詮式数策数正負等は古法既に盡せり今新法は傍書の新術にあり。故に点竄と云て，添削此内に有りと思ふべし。

これで見ると，点竄とは添削と云う如き意味であるが，添削と云うのは古法の傍書を用いざる算式に就いて云う事であり，点竄とは傍書を使用する算式に就いて云うのである。点竄と云うのは傍書の新法に在る。

傍書とは演段術に於て用いられた如き代数記法を云う。縦線の傍に文字を記るして之を記号とするから傍書と云うのである。

然らば点竄術とは，天元術の古法に対する傍書式代数学の新体系を指すものと見える。

4. 「絳老餘算」点竄の部には，簡単に問題若干が記るされ，傍書の代数紀法を使用して，簡単に之を解いて居る。



(2)

問題が簡単であるから，前言う演段術の処理のように, 面倒な消去を行うことなどは見えない。唯, 傍書を使って，代数演算を行い，それで問題を解くのである。

この部門には (2) の如き傍書の算式も見える。これは

$$上 + 上 \times 9\,分 + \frac{上 \times 9\,分}{1.2} - (惣銀) = 0$$

に相当する算式であり，上は上銀を代表する。縦線の左傍に記るしたのは，割ることを意味する。

点竄とは右乗左除の傍書紀法を使って，代数演算を行うことを云うものと見える。

割算を表わすのは左除の形式のみに限らぬが，兎に角，傍書式の代数演算が点竄術なのであろう。

5. 久留米侯有馬頼徸が，豊田文景と云う名前で編した「拾璣算法」(明和三年，1766) は点竄術を初めて公開した書と云われて居るが，この書の首に点竄の定則と用例を挙げたのは，矢張り右乗左除の傍書式代数紀法を使用して，代数演算を行うことに関する。

そうして点竄に就き，秘中の秘であり，関流の門に入りてその室を窺うものに非ざれば，その妙旨に達すること能わずと説く。

これは点竄術が甚だ秘せられたと云う見解の由って起るところであるが，ここには点竄は題に臨み術を施すの始め，術路を正し，技巧を審にするの法にして，天元演段より諸般の算法に到るまで，点竄の術路技巧を明らかにして運用しないでは，或は過誤に陥り，迂遠となるを免れないから，その辺のところを充分に心懸けなければならないと云うのであり，寧ろその運用の技巧など云う特殊のものが秘せられたと云うのではないかと思う。

右乗の傍書は早くから公開されて居たが，左除の紀法は「拾璣算法」に記載されたのが公開の初めである。

6. 是に於て思うに，点竄術とは傍書式筆算式の代数演算に普ねく関するものにして，別にそれ以外特殊のものではない。

然らば演段術は傍書紀法を用うる代数の算法であるから，これも点竄術の中に属する。演段術が創意考案されたときに，点竄術は最早自然に成立したのであり，その後に傍書紀法の様式や運用方法は次第に進化発達したこと言うまでもないけれども，併し関孝和が初めに演段術を発明して，然る後に点竄術を発明したなどと言うような性質のものではない。演段術の発明は同時に点竄術の生誕であった。

演段術は特殊の消去方法に関するけれども，点竄術は一般の代数演算を意味し，従って演段術は点竄中の一部門を成す。

私はかくの如く了解する。この故に諸先輩の見解に聴従することが出来ない。

十　方程と方程式

1. 方程とは一次聯立方程式の事であった。支那の古算書「九章算術」に見え，算木を使って之を布列し，算木の運用に依って之

を解く，算木には正と負が有り，正は赤にして負は黒である。そうして式の首に負のものを列する程に大胆なこともされて居る。

この算法は如何(いか)にも能(よ)く整頓し，少くも後漢時代に斯(か)くも立派な算法が存立したことは，支那数学の誇りである。

希臘(ギリシア)の数学にも聯立(れんりつ)方程式はあるけれども、支那の方程のように整頓したものではない。

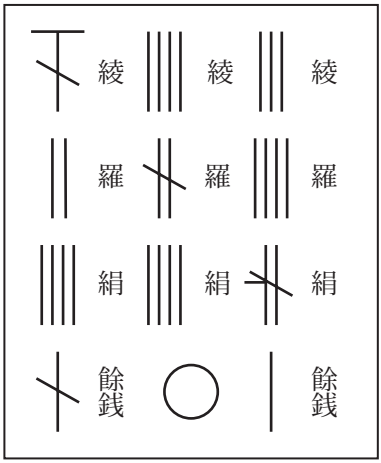
正算，負算を斯(か)く刻明に使いこなしたことも，亦支那の偉いところであった。

「九章算術」の方程の算法では，次々に第一項を消去し，得た結果に於ても亦次々の第一項を消去し，斯(か)くして次第に進むものであった。

魏の劉徽は方程新術と称して，稍々(やや)この形式を破り，消去は何(いず)れの式からやっても宜(よろし)いことにした。劉徽は色々の方面に於て偉い算家であった。

方程は後の時代の算書中にも見え，又我が和算家の間にも伝えられた。和算の発達上に方程の関係も亦大きい。

2. 方程の算法は「算法統宗」(1592–3 年) にも，「算学啓蒙」(1299 年) にも出て居るが、和算家はこの両者を併せ学んだであろう。「統宗」の方には算式の図はない。「啓蒙」には図が有る。(1) は即ち其一つで，かくの如(ごと)く図に記(し)るされた形は和算家が演段術の傍書式代数紀法を考案する上に必ずや大



(1)

きな参考になったろうと思わ
れる。

3. 現今用うるところの方程式と云う述語は，言うまでもなく，古来の方程の名称に準拠したのであるが，併(しか)し古くから方程式とは云わなかった。方程は全く一次の聯立(れんりつ)方程式にのみ限る。一元方程式は之を開方式と呼ぶ。即ち開平，開立も同じように開方の算法を用うべきものであるから，その名称を生じたのであろう。和算家は開方式の語を盛んに使った。方程式と云うのは、和算家の間には全く用いられたことがない。

英人偉烈亜力 (Alexander Wylie) が李善蘭と共に漢訳した「代数学」(咸豊九年，1859) は代数学と云う術名が早く使用された書の一つであるが，この書の目録には一次方程，二次方程，多元一次方程等の名称が見える。併(しか)し一次方程の文中に「凡(およ)そ方程式を作るには」と云うこともあり，方程式の術名はこの書中に用いられたのである。

英国伝蘭雅口訳，華蘅芳筆述の「代数学」巻六には一次方程式などと云い，盛んに方程式の語を使用する。方程式の語が盛んに用いられるのは，これからであろう。偉烈亜力訳の「代微積拾級」(1859 年) の中にも方程式の語は僅かに見えるのみで，唯，二次式，三次式と云う。

4. 我国に於ても明治四年，今村謙吉，塚谷逸郎共編の「代数学」には方程式，一元二次方程式，二元二次方程式等の語が有る。

けれども明治五年刊の柳澤信丸訳「代数啓蒙」には「簡相等第三」の章に於て

> 相等ハ，二不等代数ノ相等シキコトヲ言フナリ。英語 equation ト謂フ。

と見え，例として

$$x^2 = 3x - 2$$

は唯 $x = 1$ 或は 2 の時にのみ相等を見るべしと記(し)るす。

この書には方程式と云う訳語は見えない。併(しか)しその後一般に方程式の語が行われることとなった。

和算上の開方式と云う名称は廃(す)たれてしまう。

十一　行 列 式

1. 西洋の数学上に於て行列式 Determinant が初めて見えたのは Leibniz から始まる。而(しか)も Leibniz は未刊の草稿中に記(し)るしたものと，人に与えた書状中に在るのが十九世紀に至って発見されたのみで，その時代には公表したこともなく，他に之を説くものもなかった。

西洋で行列式の算法が出て来るのは，この外には十八世紀の半ば頃から以後である。

然(しか)るに我が日本に於ては，Leibniz と同時代に之を説いたものがある。関孝和の「解伏題之法」（天和三年，1683 重訂）並に島田尚政門弟井関知辰編「算法発揮」（元禄三年，1690）などがそれである。その以後に至っても亦之(これ)に関する幾多の文献がある。

この事情から考えても，我国の行列式は西洋の関係が有るものではない。

支那の数学上にも勿論(もちろん)，行列式に関係のものは見出されて居(お)らぬ。

2. 我が和算家の行列式は，例えば k の二つの方程式

$$a_0 + a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 = 0 \tag{1}$$

$$b_0 + b_1k + b_2k^2 + b_3k^3 + b_4k^4 = 0 \tag{2}$$

から，k を消去することに関して起る。

これは即ち関孝和の演段術の部門に属すべきである。

行列式は演段術の一種として説かれる。演段術中の重要な一方法なのである。

上記の如(ごと)き二つの式からして，

$$(1) \times b_4 - (2) \times a_4 = 0 \tag{3}$$

$$(1) \times b_0 + (2) \times a_0 = 0 \tag{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

の如(ごと)き演算を行いて，k の三次方程式が四つ作られることなれば，その四式を (5) の如く書き表わす。

D_4	C_4	B_4	A_4
D_3	C_3	B_3	A_3
D_2	C_2	B_2	A_2
D_1	C_1	B_1	A_1

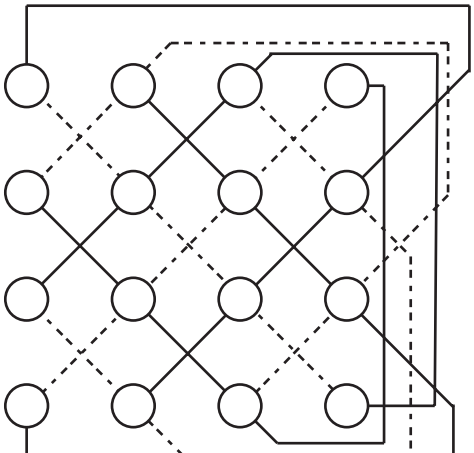
(5)

勿論(もちろん)，縦の行がこれ等の各方程式を表わす。この四ツの式から k, k^2, k^3 を消去すれば，演段術の眼目たる消去は行われる。

その結果は (5) の行列式となる。

この行列式を展開すればその諸項が得られる。

3. この展開には先(ま)ず逐式交乗之法と云う仕方がある。それは行列式中の各格を互に掛け合せて得る所の諸項の符号や，若(もし)くは有無を検するものとする。



かくの如き結果につき，更に交式並に斜乗と云う二つの方法を用いて，機械的に展開を行うことを工夫する。図 (6) は四式の場合の斜乗図である。点線に従える乗積は凡て生にして，実線に沿えるものは凡て尅とする。生尅とは正負と云う如き意味であるが，行列式の諸格中には正もあれば負もあって，その為めに支配されるのであるから，特に正負の語を避けて生尅と云って居るのは，用意の程が思われる。

この斜乗の結果は展開の諸項中の一部分しか得られない。故に諸式の順序を換えて，然る上にて斜乗を行えば諸項全部が整う。その諸式の順序を換えることを，交式と云う。

交式と斜乗とで行列式を展関するのは誠に巧みなものである。

五式の行列式でも六式の場合でも凡て同様に処理される。

4. 「算法発揮」には交式斜乗の事は書いてないが，行列式第一行の諸項の小デターミナントを使用して，その展開を行うこととし，図を挙げて之を説明する。

小デターミナントを使っての展開は西洋では Laplace の方法と言われる。而も Laplace に先きだつこと約一百年。

関孝和の逐式交乗の法と云うのは委細に解説はしてないが，矢張り小デターミナントを使用した結果に当る。式を逐うて交乗する，即ち次第に乗ずると云えば，恐らく「算法発揮」の如き方法に拠ったのであろう。

「算法発揮」は流布に乏しいが公刊の書であり，行列式に就いて公刊されたのは，全く世界の嚆矢である。島田尚政は大阪の算家。

京都の算家田中由真も亦行列式の事を説く。由真も亦凡そ同時の人。

5. 前記の (1)(2) の如き両式から，k を消去するのは，演段術として当然の手段であるが，併し両式が例えば四次の場合には，k の三次の式四つを構成して，それから k, k^2, k^3 を消去すると云うのは，能くも思い附いたものである。

この考案には方程の算法が基礎になったであろう。行列式の諸式を構成するにも，方程に於て両式の相当項を互に相乗じて加減する方法が，直ちに消去方法に適用されて居るのであるし，行列式の形にすることも亦方程の布列形式に依り，その展開にも亦方程の次々の消去から，思い附いたのが，大きい関係であったろう。

而も方程は元来が算木の算法であるから，この点に於ても，算木の算法から演段術の重大な一方法が産み出されたと謂って宜い。

6. 関孝和の交式斜乗の法は極めて立派な考案であるが，併し悲しいことには交式にも斜乗にも誤りがあった。

この書の数多き写本の中には，実のところ交式の誤ったものと誤らないものとが混在する。併し関流算家中の錚々たる戸板保佑並に菅野元健もこの書の交式が誤れりと言って居るし，享保三年 (1718) に寺内小伝が解伏題の交式には相違ありと話したことを記るした稿本もある。元来，誤って居たのであろう。正しいものがあるのは後に訂正したのであろう。

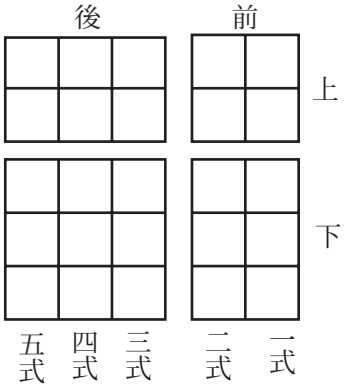
「解伏題交式斜乗之諺解」と題して，正徳五年 (1715) 寺内良弼重訂の写本には交式の構成を正しく説く。「解伏題」の誤りを訂正したものと見て宜い。

けれども斜乗の誤りはこの書にも説いていない。仙台藩の戸板保佑の「生尅因法伝」(宝暦九年，1759) 及び久留米城主有馬頼徸の

「開方要旨」（宝暦十二年，1762）にも交式斜乗の事を説きながら矢張り斜乗の誤りは指摘されて居らぬ。斜乗は理論として如何にも立派であるが，実地の応用は殆んど試みられなかったので，誤りのままに多年の間を通じてその儘に放置されたのであろう。

三式，四式の斜乗は固より正しいが，五式の場合には誤まる。これは四つの場合に区別すべきものを，二つに区別して行うたからの事であった。之を訂正したのは菅野元健の「補遺解伏題生尅篇」（寛政十年，1798 年二月）と石黒信由の「交式斜乗生尅補義」前篇とである。信由のこの書は後篇の尾に「寛政十戊午超夏下旬」と記す。前篇の成った年月は判らないが，恐らく元健の書と前後のものであろう。二人同時にその差誤に注意し，之を訂正したのも奇観である。関孝和の「解伏題之法」が作られてより正に百十餘年の後であった。

7. 菅野元健の「交式斜剰捷法」（寛政戊午九月，1798）には行列式を図の如く上下前後に分けて，右上の 2^2 格のデターミナントへその小デターミナントたる左下の 3^2 格の展開結果を乗じ，又式の順序を変更して同様の斜乗を行い，展開式の諸項全部を得ることを説いて居る。



「算法発揮」に於ては唯一項に対する小デターミナントを用うるものであったが，元健に至りては小行列式の考えが一歩を進めたのであった。

序文にこの方法は事理を盡くしたもので，労煩錯誤の患なしと

称し，久留島義太に捷法の工夫ありと言われるのはこの方法であったろうと言って居る。

「久氏遺稿」中にこの種の算法の略叙が有る。故に久留島の創意と思われるが，元健の稿本には解説が整うて居る。

8. 和算家の行列式論は大概上述の如(ごと)きものにして，誠に立派なものであるが，併(しか)し錯誤が有って多年の間に容易に注意せられないで，その儘(まま)に存続した如(ごと)きは，行列式論は理論だけ考案され，伝承もされたけれども，併(しか)し実地の問題には殆(ほと)んど応用されなかったものであるらしい。

そうして斜乗の錯誤が訂正され，小行列式の適用が整頓した以後には，行列式論は最早(もはや)新らしい開拓を見ず，この以後にも実地の応用に使われることはないのであった。

行列式論は理論としては如何(いか)にも面白いけれども，併(しか)し之を適用して問題を解く場合には，無用の因子を包含して，迂遠に陥る恐れがあったので，好んで利用されなかったのではないかと思われる。

和算家の行列式論は方程の算法から着想工夫されたとも思われるが，併(しか)し一次聯立(れんりつ)方程式の解法に行列式を応用したものは，数多き和算書中に未だ之を見出したことが無い。西洋では一次聯立(れんりつ)方程式の解法から出て，その応用に重きを為したのとは，事情を異にする。

十二　招 差 法

1. 和漢数学上の一方法に招差法と称するものが有る。その算法を簡単に言えば，仮りに

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

の如く置いて，未定係数 a_1, a_2, a_3 を決定することに関する。$x = x_1, x_2, \cdots\cdots$ の時に $y = y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots$ となるとすれば，一組の聯立一次方程式を成すのであって方程の算法の発達した支那で，斯の如き未定係数決定法が成立したのも不思議はない。

斯く方程の形に造り上げて解くことを，和算家は方程招差法と称した。方程招差法は招差法の各種形式の中に於て意義最も刻明である。

2. けれども招差法の最も本格的のものと見做されるのは，関孝和遺編「括要算法」（正徳二年，1712，刊）に見るところの累栽招差法である。

招差法を適用すべき問題では，x の何乗まで採って宜いか，実は初めから左まで明瞭でない。見込みが附き難い。故に漫然と幾つとはなしに仮りに置いて見る。そうして方程招差の如き解法を試みて見る。例えば

$$\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} = a_2(x_2 - x_1) + a_3(x_2^2 - x_1^2) + \cdots\cdots$$
$$\frac{y_3}{x_3} - \frac{y_2}{x_2} = a_2(x_3 - x_2) + a_3(x_3^2 - x_2^2) + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となれば，a_1 が消去せられ，次に $x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots\cdots$ にて割って次々に相引けば a_2 が消去せられ，斯くして次第に $a_3, a_4, \cdots\cdots$ が消去される。

この演算を続ける間に次々の差が凡て零となれば茲に計算は終り，そうして a_r が決定せられ，之を使って a_{r-1} が決定され，$a_{r-2}, \cdots\cdots$ と次第に一切の未定係数が定まることとなる。

この算法の過程を方式化したのが，即ち累栽招差法である。累栽招差法は極めて明瞭に方程招差法に基づく。

3. 支那で招差法が見えたのは唐の辺岡「崇元歴」(景福元年, 892) に於ける相減相乗之法と称するものがあり，又元の郭守敬の「授時歴」に於ける三差法がある。前者は a_1 と a_2 とを決定するものであり，後者は a_1, a_2, a_3 を決定する。

この三差を定差，平差，立差と云う。即ち x, x^2, x^3 の未定係数を意味する。

「授時歴」の方法は累栽招差法であった。

この算法は垜積(だせき)即ち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2,\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n$$

等の和を計算するにも使用される。仍(よ)って支那でも垜積(だせき)招差とも云われた。

4. 招差法は支那で創(はじ)まったが，併(しか)し我が日本に伝って極めて能(よ)く整頓した形式のものとなり，又方程招差法，累栽招差法，混沌招差法等の区別も出来た。

垜積(だせき)術の如(ごと)きも，和算家の間には色々と之を考究し，種々の関係を求めて居る。且(か)つ招差法でも垜積(だせき)術でも盛んに応用された。その点は支那よりも優れて居る。

招差法にはこれ以外にも色々の名称があり，最差法と云うのは，

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

から $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ を決定するものであった。これは前記の方法と別に変らない。只 a_0 が附加されるだけに過ぎぬ。

混沌招差法は a_1 から初めに求めて行くもので，基本的に仮定する公式の形が稍々(やや)異なる。これは円弧の算法などに重大な関係がある。仮令(たと)えば

$$\begin{aligned} y &= a_1x+a_2x(x-x_1)+a_3x(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad +a_4x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+\cdots\cdots \end{aligned}$$

と置いて，$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots$ を決定する如きが，それである。

渾沌招差法として記るされた算法は，可なり面倒な形式に説いてあったり，若くは $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ を求めて得たる公式だけ示めしてあったりするので，随分了解し難きもののようにも思われるが，その根本の原則を考うるときは，上記の如き未定係数決定法に外ならぬ。従って原則としては極めて簡単な算法である。

併しながらかくの如き原則を立てて算法を試みることの創意は，尋常なものではなかったのである。かくの如き原則が立てられた為めに，円弧の公式を求める巧妙な算法も考案されることとなった。この意味で混沌招差法は日本の数学の発達上に極めて重大な意義を有する，招差法は支那で始まるけれども，支那には渾沌招差法が用いられたことの明証はない。

5. 和算家の中で初めに招差法を説いたものは関孝和であるが，「括要算法」の記載を見ても，二差の場合には「古の所謂相減相乗之法也」と言い，三差の場合には「古の所謂三差之法也」と称し，且つ定平立の三差を用いて居るのは，「授時歴」に見える術語と一致する。「元史」中の「授時歴」の記載は甚だ簡単であり，「明史」の「大統歴草」は「授時歴草」に基づいたものと言われて居るが，関孝和の時代には未だ「明史」が作られて居ないから，関孝和が之を参照した筈なく，関孝和は若し「元史」のみから学んだものでないとすれば，清の黄鼎の「管窺輯要」の所載を参照したのであった。要するに招差法に於て和算家の業績は，支那の算法を伝えて之を改造し，且つ広く応用を試みることをしたのである。

西洋で招差法に対比されるものは Newton の算法であるが，関孝和は Newton と同時代であり，元の郭守敬は四百年を先立つ。

十三　円の算法

1. 円周の長さ，円の面積並に弧長若(もし)くは弓形の面積等の問題は，何(いず)れの国に於ても不完全ながら早くから出て居る。支那でも古くは 3 の略値を用いたが，その後に至り後漢の張衡は $\pi = \sqrt{10}$ とし，三国の魏の劉徽は $\pi = 3.14$ 及び $\pi = \dfrac{157}{50}$ とし且(か)つ $\pi = \dfrac{3927}{1250}$ と云う率をも使った。劉宋の祖沖之は円径一丈を一億として，円周の長さの上下の限界を定め，且(か)つ

$$\text{約率}\quad \pi = \frac{22}{7}, \qquad \text{密率}\quad \pi = \frac{355}{113}$$

とした。然(しか)るにこの密率はその後殆(ほと)んど用いられることがなく，その約率が却(かえ)って密率として長く行われた。

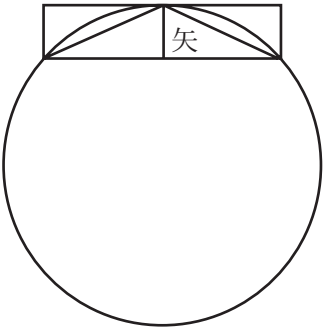
希臘(ギリシア)の数学に於て Archimedes が $\pi = \dfrac{22}{7}$ の率を得たことは著名であるが，$\pi = \dfrac{355}{113}$ の率に至っては支那以外に早い時代に之を得たものなく，西洋の数学上に出て来るのは十六世紀の末に始まる。印度(インド)には今少し早くから見えて居るが，西紀五世紀後半の祖沖之の時代に比較するときは遙かに後れる。この故に私はこれを祖沖之の率と呼ぶことにしたいとは兼てこれを提唱したことであり，支那の数学史家中には甚(はなは)だ之を称せられたこともあった。

2. 円の算法に就(つ)いては，「九章算術」の劉徽の註にその仕方が説(と)いてある。一般に支那の文章は左まで論理的に整頓して居ないように思われるのであるが，劉徽の円の算法の論述は，随分論理的に出来ている，私は誠にその論述に敬服する。劉徽は論理的に鋭い頭脳の持主であり，数学上の考案の如(ごと)きも甚(はなは)だ優秀なものがある。数学者としての劉徽は極めてえらい。

円の算法に於ては，先ず六辺形を容(い)れ，十二辺形とし，二十四辺形とし，四十八辺形とし，九十六辺形としてその次々の面積を

算出する。

然(しか)る上にて n 辺形の一辺とその矢とに依って決定さるる矩形を作る。この矩形の面積の半へ辺数を乗じて n 辺形の面積に加えれば，内接 $n+1$ 辺形の面積となるが，矩形の面積の n 倍を n 辺形の面積に加えれば，その和は $n+1$ 辺形の面積よりは大きい。斯(か)くして円面積の上下の界限が決定される。



此れは外接多角形を用うるよりもその結果が一層近似することは，直ちに了解されよう。

かくの如(ごと)き算法に依って円周率の値を算出したのである。

3. その算法の結果に基づき更に修正を加えて居るが修正方法の記述は無いけれども，恐らくは後代に至りて和算家関孝和が使用した如(ごと)き方法に拠ったのではないかと思われる。

4. 劉宋の祖沖之は「綴術」と題する著述があり，この書中に円の算法も見えて居ることは「隋書」中の律歴志の記載がある。

この算法に関しては，一種の招差法を用いて，弧背を与うる公式を作製したのではないかと思われるが，之を否認せんとする異説もある。併(しか)し開差冪(べき)，開平立と云う述語が使われて居たと云うのは，何(ど)うも円に関係の記事と見るのが穏当であろうと思われるから，招差法の使用と考えることに無理はあるまい。別して支那では方程即ち聯立(れんりつ)一次方程式解法が整頓して居るから，その応用として招差法関係の算法が円弧の考究上に用いられても，至当であったろう。

5. けれども支那ではその後に至り円に関する算法は左まで進歩を見ず，又過去の業績も却(かえ)って忘れられると云う事になった。

この方面の上に再び著しい進歩を見るのは，清朝時代になって，西洋の数学が伝えられで以後の事である。この時代の支那数学上の業績は，同時代の和算家の手に成ったものよりも，その算法は複雑で有り，結果も亦和算家の方が遥かに優れて居る。故に和算家の業績に就(つ)いて略述することとしよう。

6. 関孝和は円内に四角を容(い)れ，八角とし，十六角とし，……次第に辺数を倍して，夫々(それぞれ)の周を求めた。この算法は次々に二次方程式を解くことに依って行われる。

その結果が次第に円周に近似することは言うまでもあるまい。併(しか)しこれだけは前に村松茂清の「算俎(さんそ)」(寛文三年，1663) に説くところも原則は同じであり，支那の古算法も左まで異ならぬのであった。

然(しか)るに孝和は次々の内接多角形の最後の三つを a, b, c とすれば，

$$\text{円周} = b + \frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$$

となるとした。孝和は如何(いか)にしてこの結果が得られるかを説(と)いて居ないが，門下の人達の解説に依れば，次々の内接多角形の周を a_1, a_2, a_3, $\cdots\cdots$ とする時

$$\frac{a_3-a_2}{a_2-a_1}, \frac{a_4-a_3}{a_3-a_2}, \frac{a_5-a_4}{a_4-a_3}, \cdots\cdots$$

の値を検するに，これ等は次第に或る極限 k に近づくことが見られよう。例えば a_1 から先きはこの諸分数が凡(すべ)て k に等しとすれば，

$$a_3-a_2=(a_2-a_1)k,\ a_4-a_3=(a_3-a_2)k=(a_2-a_1)k^2,\ \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_n = a_1 + (a_2-a_1)(1+k+k^2+\cdots\cdots+k^{n-2})$$

となり，極限に於ては

$$(\text{円周}) = a_1 + (a_2 - a_1) \times \frac{1}{1-k} = a_2 + \frac{(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)}{(a_2 - a_1) - (a_3 - a_2)}$$

となる。

かくの如き算法が用いられたものと思われ，孝和も亦同様であったろう。

この種の算法を増約術と云う。増約術とは元来，無限等比級数の和の極限を求めることであるが，ここでは無限等比級数に対比して極限を算出するので，増約術と呼ばれることとなる。

そうして増約術の名称は一般にこの種の求極限法を呼ぶこととなる。

7. 今言う所の求極限法は独り円周の算法に於てのみならず，円弧を求むる場合にも同様に試みられるし，球の立積並に球缺の場合，それから畹背即ち螺線に於いても同様に之を行う事が出来る。これ等は関孝和の「括要算法」(1712 年刊）等に記されて居る。

魏の劉徽が恐らくこの種の算法を使ったのではないかと思われるが，勿論判然せぬ。支那に存したにもせよ存せぬにもせよ，関孝和がこの種の算法を用い，その門下の間に於て賞用せられ更に之を拡張して，和算の発達上に重大な結果を印したのは，甚だ注意すべきであった。

8. 関孝和は上述の如く単に一回だけ増約の修正方法を適用したものであるが，その門人建部賢明及賢弘の兄弟が主として編纂した「大成算経」(寛永六年 1709 成）には，幾回も繰返して之を行うことになって居る。これはその修正方法が概略的に正しいのであり，絶対に正しいものではないから，逐次適用に依ってその缺陥を補うたのである。

9. この種の算法は如何にも巧妙なものであった。けれども次々の数字上の値を求めて，之に就いて極限の場合の矢張り数字上の値を求める方法であり，これだけでは一般の公式は出て来ぬ。

併し一般の公式も亦之を求めなければならぬ。円弧の場合の如きは，関孝和も既に之を試みた。この目的の為めには，直径一尺の円に就いて、矢の長さ 1 寸，2 寸，3 寸，4 寸，5 寸，等の弧の長さを，上述の如き算法に依りて算出し，之を用いて公式を作ることにして居る。

かく格段の数値を用いて，一般の公式を作ることは，招差法に於て未定係数を決定することに対比すべきである。この算法も亦「括要算法」に見える。書中説く所の様式は稍々煩雑に流れ，水戸の算家大場景明の如きも，この書の記載だけでは了解し得ないで，師山路氏に就いて教示を求め，依って「括要弧術解」（安永三年，1774）を編した等からでもその事情を察せられよう。

10.「括要算法」の弧術と称するものはかくの如き性質のものではあるが，併しその依って立つ所の原則を摘出し之を示めすときは弧背の式は

$$
\begin{aligned}
(\text{弧背})^2 = \text{矢}^2(\pi^2-4) + \text{弦}^2 &+ A_1\frac{(\text{径}-2\,\text{矢})\,\text{矢}^2}{\text{径}-\text{矢}} \\
&+ A_2\frac{(\text{径}-2\,\text{矢})\,\text{矢}^2(\text{矢}-\text{矢}_1)}{(\text{径}-\text{矢})^2} \\
&+ A_3\frac{(\text{径}-2\,\text{矢})\,\text{矢}^2(\text{矢}-\text{矢}_1)(\text{矢}-\text{矢}_2)}{(\text{径}-\text{矢})^3} \\
&+ A_4\frac{(\text{径}-2\,\text{矢})\,\text{矢}^2(\text{矢}-\text{矢}_1)(\text{矢}-\text{矢}_2)(\text{矢}-\text{矢}_3)}{(\text{径}-\text{矢})^4} \\
&+ A_4\frac{(\text{径}-2\,\text{矢})\,\text{矢}^2(\text{矢}-\text{矢}_1)(\text{矢}-\text{矢}_2)(\text{矢}-\text{矢}_3)}{(\text{径}-\text{矢})^4} \\
&+ A_5\frac{(\text{径}-2\,\text{矢})\,\text{矢}^2(\text{矢}-\text{矢}_1)(\text{矢}-\text{矢}_2)(\text{矢}-\text{矢}_3)(\text{矢}-\text{矢}_4)}{(\text{径}-\text{矢})^5}
\end{aligned}
$$

の如(ごと)き形式を成すものと見て，未定係数 A を決定することとするのである。

此式は 矢 $=0$ の時に成立するし，又 矢 $=$ 半径 の時にも成立する。

矢 $=$ 矢$_1$ $=1$ 寸 の場合には，$A_2, A_3, \cdots\cdots$ の諸項は皆消失して A_1 を決定するに足るべく，次に 矢 $=$ 矢$_2$ $=2$ 寸 とすれば，A_3, A_4, A_5 の諸項は皆消失して A_2 を決定することとなり，斯(か)くして次第に A_3, A_4, A_5 も決定される。

故にこれは上記の如(ごと)き基式を用いて 矢$_1$, 矢$_2$, $\cdots\cdots$ 等の特殊の値に依りて，未定係数 A を決定する所の算法であり，この意味に於て一種の招差法を構成する。その基式に於て径一矢の乗冪(じょうべき)で割ってあるところは異なるけれども，併(しか)し全く混沌招差法と原則を同うする。故にこの算法が見えるのは，渾沌招差法が考案された結果と思われる。或は逆にこの弧背の算法が成立して，普通の混沌招差法が作られたかも知れないが，要するにその原則は同一である。

11. この算法の結果は之を書き改むるときは，

$$a_8(\text{径}-\text{矢})^5\times\text{弧}^2=(a_1\text{径}^6\text{矢}+a_2\text{径}^4\text{矢}^3+a_3\text{径}^3\text{矢}^5)$$
$$-(a_4\text{径}^5\text{矢}^2+a_5\text{径}^3\text{矢}^4+a_6\text{径}^6\text{矢}+a_7\text{矢}^7)$$

となる。但し $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_s$ は夫々数字上の値が示されて居る。

この公式を用うるときは矢の任意の値に就いて弧背の長さを求めることが出来る。この公式の成立以前には

$$(\text{弧背})^2=\text{矢}^2(\pi^2-4)+\text{弦}^2$$

と云う公式が行われたのであるが，これは甚だ粗略であるから，この公式へ他の若干項を添加して之を精密にすることを企てたのが，「括要算法」の如き公式となり，その作製の算法ともなったのである。

12. 「括要算法」は関孝和の遺稿を，その歿後に刊行したものであるが，関孝和のその算法は少くも天和三年 (1683) の頃には成立して居たのである。同年の年紀ある門人建部賢弘編の「研幾算法」に類似の公式を見るのはその証拠である。

又次々の数字上の値から増約術に依って極限を求めることは，孝和編の「立円率解」（延宝八年，1680）中に見え，その作製年代はこの年を下らぬのである。

円の算法に就ては猶幾多の注意すべき事項があるけれども，次章に所謂円理の算法を説くこととし，発達の細節の如きは凡て之を割愛する。

十四　円　　理

1. 円理とは之を広い意味で言えば，円や同種のものに関する算法の一般を指すものともなろう。稍々その意味を限定しても，これ等に就ての求極限法と言う事になる。

上述の円の算法は全く求極限法が用いられて居るのであり，その意味から言えば円理と称するも敢て不可なりとは言えぬ。

澤口一之の「古今算法記」（寛文十年，1670）やその他の京阪算家の著者中には早くから円理の名称も用いられたが，後の関孝和の流派即ち関流に於て円理と称せられたのは，解析的に算法を処理したものに関する。

この種の円理は関流最高の秘書と言われた「乾坤之巻」，建部賢弘の創意に基づくと記るされたる「円理発起」及び賢弘の撰と言われる「円理綴術」等に記載されて居る。この最後の書は内題を「円理弧背術」と称し，表題も亦この名称を用いたものもある。これ等の中にて「円理発起」は淡山尚絅撰とあるが，淡山尚絅とは実名ではなく，幕臣峰屋定章の雅名である。これは享保十三年 (1728) の年紀がある。且つ享保七年 (1722) に建部賢弘の創意するところなりと記す。

普通に関孝和が円理を発明したと言われるのは，これ等の書中に説くところの解析的の円理の算法に関する。前説くところの数字上の処理に基づける求極限法は，関孝和が之を使用したこと極めて明白であり，又その結果の公式は既に「括要算法」中にも公開されたのであり，左まで秘密にしたものでないことも言うまでもない。最も秘したと言われるのは「乾坤之巻」であった。而も果して関孝和の発明であるか，建部賢弘から始まったかは，頗る難解の問題であるが，私は十中八九までは賢弘の創意であろうと思う。今その論証の如きは凡て之を省く。

2. この解析的の円理の算法に於ては，円弧の中に二等弦を容れ，四等弦を容れ，次第に等弦数を倍加して次々に生ずる所の二次方程式を解くことは「括要算法」に於けると同じであるが，併し数

字係数に関して近似解法を行うのではなく，文字方程式としてその根を無限級数に展関することとする。即ち二項級数展開に相当するもので，之を帰除得商術と称する。後には平方綴術と称せられ，所謂綴術と呼ばれたものの代表的のものとする。

この級数展開の方法は，天元術にて数字方程式の近似解法を行うに当りて用うる原則を，文字方程式の場合に適用するように工夫したものであった。

その展開の結果を次の二次方程式の中に入れて，更に展開を行う。又その次の方程式に就いても同様の算法を繰り返す。

けれどもこの逐次適用は，実際上には無限に試みることが出来ない。是に於て得るところの若干の級数を比較して，その諸係数の構成される法則を探会する。即ち探り求める。その結果は凡そ二様に試みられて居るが，一層整頓した方に就いて言えば，第 n 番目の級数の一般公式を作製することとなるのである。この公式に基いて $n = \infty$ の時の極限を求める。

この算法に於ては，次々の等弦の平方を求めて，等弦数の自乗を乗ずれば，等弦の総和の平方を得べく，等弦数が無限となる場合に弧背の自乗の式を得るのである。

原則としてはかくの如きものであるが，その算法は誠に容易でない。

3. 「括要算法」に於ては次々に内接等弦の和を求めて居るが，この円理に於てはその和の自乗を算定する。併し「大成算経」に於ては和の自乗を求めて居るから，その方に基づいて歩を進めたものと見える。

これだけの相違はあるが，而かも「括要算法」に於て言わば算術的に処理したものを「乾坤之巻」などに於ては記号を用いて之

を解析的に取扱ったのであり，その解析的の取扱方が苦心の工夫であったと思われる。

この算法に於ては，円弧を 2^n 等分して，その長さの平方へ n^2 を乗じたものの $n=\infty$ の時の極限を求めたものであるから，一種の単純な積分方法と謂(い)っても宜(よろし)かろう。

この種の算法に於て得るところの級数は，

$$
\begin{aligned}
(\text{弧背})^2 &= 4\,\text{径矢} + \frac{2}{6}\frac{\text{矢}}{\text{径}}(\text{原数}) + \frac{8}{15}\frac{\text{矢}}{\text{径}}(\text{一差}) + \frac{18}{28}\frac{\text{矢}}{\text{径}}(\text{二差}) + \cdots\cdots \\
&= 4\,\text{径矢}\left(1 + \frac{2}{6}\frac{\text{矢}}{\text{径}} + \frac{2\cdot 8}{6\cdot 15}\frac{\text{矢}^2}{\text{径}^2} + \frac{2\cdot 8\cdot 18}{6\cdot 15\cdot 28}\frac{\text{矢}^3}{\text{径}^3} + \cdots\cdots\right)
\end{aligned}
$$

となる。

この級数が初めて記されて居るのは，建部賢弘の「不休綴術」(享保七年 1722）であるが，この書には今言う如(ごと)き算法に拠ったのではない，数字的の処理から求めることが説(と)いてある。

4. 「方円算経」は松永良弼が元文四年 (1739) に著わすところ，円に関する若干(じゃっかん)の級数を記す。

又正多角形に関して二重級数で表わした展開をも記す。

この書には級数を用いて円周率を算出し，五十位まで正しく出て居る。是より先き「不休綴術」には四十一位を挙げる。

斯(か)く四十位，五十位の算定は試みられたが，併(しか)しそれ以上極めて多くの桁数まで算出したものは，この以後にも見えない。

「方円算経」にはその級数の展開方法は説(と)いてない。

同じ松永良弼の作なる「算法集成」中には，招差法を使って級数に展関することが見えるが，勿論(もちろん)，初めの数項を算出し，之(これ)に基づいて無限級数になるものとして修正するのである。

「弧背詳説」にも亦級数を記(し)るす。中に級数反転法も用いられて居る。

「久氏弧背草」即ち久留島義太の草稿を集めたものにも亦，円に関する極大極小の問題に関して，級数の反転を使用する。この書でも，松永の「算法集成」でも元文年中かその直後の頃，即ち1740年前後の作と思われる。

円理に関して無限級数が現われてから，左まで年所を経ないで，色々に処理することも出来るようになったのである。

5. 円理の算法は代数演算としては随分煩雑なものであるが，その諸書中には諸因子の相乗すべきことを示めす許(ばか)りでなく，割るものをも代数紀法で表わしたものが用いられる。右乗左除の紀法が見えるのも，その中の一つである。

(1) は「円理綴術」中に見るもので，$\dfrac{矢^4}{64\,径^2}$ を意味し，全く右乗左除であるが，明瞭に

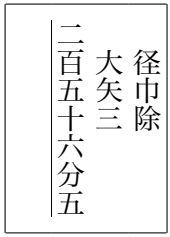
左書は除又分母

右書は乗又分子

と断ってある。

(1)

「円理発起」には (2) の如(ごと)く書いて，$\dfrac{5}{256}\times\dfrac{(大矢)^4}{径^2}$ を意味する。「乾坤(けんこん)之巻」にも亦この種の紀法が用いられて居るが同書には繁簡の二種の本があり，使用の紀法も亦両者同一ではない。



(2)

これ等の事情は解析的の円理が発現する時代に於て，割算を含める代数紀法がまだその初発の時代に属して，一定して居なかったことを示す。松永良弼と久留島義太は極めて懇親の間柄であり，研究上にも相練磨したものであるが，而(しか)も割算の代数紀法は二人が同一のものを使わなかった。

けれども松永良弼は右乗左除をのみ使用し，且つ数学教育上若くは教科書著作に功労の多い人物であって，その影響もあったろうと思われるが，これから後には右乗左除に一定することになるのである。

角術即ち正多角形の算法に就いても，初期の写本類に右乗左除の紀法を用いたものが見られる。割算の代数紀法は，円理とか角術など言う如き込入った算法に関して初めて用いられることになったのであろうし，又それが当然であったろう。

6. 球又は球缺の立積に就いても，之を厚さの相等しき薄片に切って算法を試むることは，和算の初期から行われた。関孝和も亦その同じ算法を襲用し，そうして片数を二倍にし，四倍にしたものを取って，その三つの値から前言う如き増約の公式を適用した。

然るに松永良弼の「立円率」(享保十一年，1726) に於いては，かくの如き算術的の方法を用いず，凡て数字上の値を算出することをしないで，初めから全く代数的演算のみに依って公式の作製を試みたのであった。

これは従来の算術的方法を，記号的に代数演算で書き表わし，得るところの算式の極限を求めるのである。

その算法は定積分に比して宜い。而も上記の算法の如く繁雑のものではない。

けれどもかくの如く解析的に処理することは，その初めに於ては甚だ容易ではなかったらしく，松永は之に就いて久留島義太と問答したことを言い，そうして此処に記るす如く述べて居るのである。

> 初作二此術一之日。到二于此一甚難渋矣。布得二増約之術一而后初悟二極数之形一也、

増約之術とは極限を求めることに関する。

如何にも松永良弼は関孝和などの先輩が算術的にやって居たの

を代数的に一般化して演算して，その算式に基づいて極限を求める仕方を考案する為めに随分苦心したものと見える。

この「立円率」に於てはその算法中に割算の紀法は使用されて居(お)らぬ。

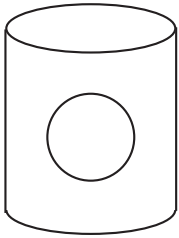
然(しか)るに同じ松永良弼がその後に作った「算法集成」中に於ては，同じ算法に関して割算の紀法を使って居る。

この事実は割算の紀法の出現した年代を考定する為めの拠点ともなるのであり，又極限の算法に於て解析的の処理の現われることになったのが，享保年中からの事であろうことを思わしめるのである。

7. 和算家は初めから球の立積に就(つ)いては等厚の薄片に截(き)ることにしたが，円に就(つ)いては等弦を容(い)れて次第に倍加する方法にのみ拠って居た。円に就(つ)いて別の仕方をすることは建部賢弘が考えたけれど，出来ないと言って居る。後から見ると何でもないようでも，創始の際に当っては決して容易でないことがこの事情からでも知られる。

然(しか)るに球に関して等厚に截(き)って解析的に簡単に求積の目的を達し得られることになったので，円の場合にも類似の試みが現われるのが当然である。その事は安島直円が之を成就した。即ち円弧の弦を垂直に等分することを創(はじ)め，依ってこの弦と相対する弧との中間に於ける面積を求めることにした。その結果は円理の算法が著しく簡単になった。

安島のこの創意は師山路主住の存命中の事と言われて居るが，主住は安永元年 (1772) 六十九歳で歿(ぼつ)したからこの以前の発明であったろう。



8. 安島直円は既に円理の改良に成功して，然る後に図の如き円壔を他の円壔を以て軸と軸とが垂直に交るように穿去した部分の立積を求めた。これには穿去する小円壔を縦に等分するのと，横に等分するのと二様に試みた。一方は帯直弧積を求めて，之を底とする薄片の集合と見て，その積和の極限を求めるのであり，一方は矩形の面積へ厚さの截片を乗じて，之を積分するとも謂うべきである。

安島のこの成功は，その後継者の手に於て種々の求積問題を論究せしむるに至った。

9. 是より先き山田正重の「改算記」(万治二年，1659) にも十字還の求積があり，関孝和に至ってその算法を説く。

孝和は又円錐を三角壔で穿去した問題の解もある。

中根彦循の「竿頭算法」(元文三年，1738) には円壔を五角壔で穿去した問題の答術がある。

又戸板保佑の「関流算術綱領伝」にもこの種の若干題を記るす。

かくの如き事情であるから，円壔穿去の問題が正確な算法を以て論究されることにならなければならないのであったが，安島直円が円理の改良に成功したので，その方法を応用して巧みに取扱い得ることになったのである。

安島直円は円理の発達上に於ても，前代以来の結果を承けて，後代の進歩に向って確実に準備を整えたのであった。

十五　角　　術

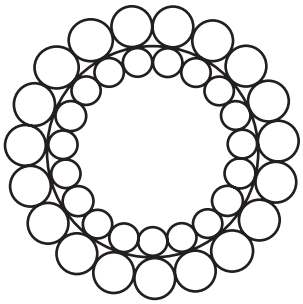
1. 和算家の所謂角術とは、正多角形の算法である。その外接半径を角中径と言い，内接半径を平中径と云う。又今では辺と云うべきを面と呼ぶ。

和算家の角術に於ては、面の長さを知って角中径及び平中径を求める。その結果は高次方程式となるが，巧みに之を処理してその諸方程式構成の形式を研究し，又その作製に就いても色々と考案を廻らしたものであった。

角術に関する文献も亦甚だ豊富である。その起源を言えば，和算の初期からして正多角形の算法が見えて居るが，初めには単に数字上の計算に過ぎなかった。

けれども数字上の取扱をするにも，正確に求めるには，何うしても確実な考究を要するのであり，茲に角術としての幾何学的の算法が開始され，代数的の方程式が作られることになるのも，当然の過程である。

2. 磯村吉徳の「算法闕疑抄」（万治三年，1660）に一百問の問題を提出した中の第六十一は図 (1) の如く，円周の内外に十九箇づつの星を画き，原円周を知りて内外諸星の直径を問うものであるが，これは極めて明瞭に正十九角形の問題に帰着する。之を正確に解答することは，決して容易ではない。



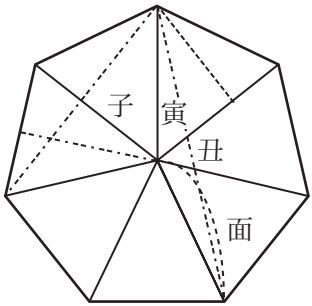
(1)

関孝和の「闕疑抄答術」にこの問題の答術が有るが，十九箇の内円心を次々に結んで得る所の正十九角形の一辺は内円径に当り，その角中径との関係を求めて一十七乗方の開方式即ち十八次方程式を得ることを示めす。

この「闕疑抄答術」の作は年紀を詳かにせぬけれども，関孝和が角術即ち正多角形の研究に進んで行ったのは，この問題などの刺戟に負うところ多かったのでは無いかと思われる。

3. 関孝和は天和癸亥（三年 1683 年）重訂の「角法并演段図」が有り，「括要算法」利巻は即ち之を収録したものである。この書中には三角から二十角までの毎面一寸として，平中径と角中径と積とを問い，それぞれの方程式を示めして居る。

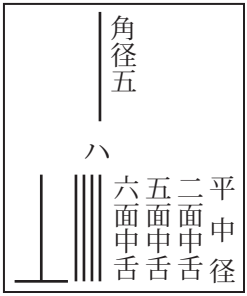
その算法は悉く記るされては居らぬが，七角に就いては図 (2) が示めされ，この図に就いて算法を立てたことを物語る。



(2)

「括要算法」に書いてはないが，円中の子は二面中濶，丑は三面中濶と名付ける。寅は之を三面中報角径と云う。この種の線を取りて考えるときはその関係を見出すことを得べく巧みに之を応用して所要の方程式を作るのである。

十三角の平中径を求むる演段に於て，式 (3) が見える如きはその一例である。即ち (角中径)^6 は平中径と二面中濶等との相乘積の六十四倍なりとする。



(3)

角術の算法はこの種の関係を用いて趣味あるものなれど，今詳かに解説するの餘裕はない。

角術の解法に使用する図形の如きも必ずしも一定せず種々のものが有る。

4. 「括要算法」には単に二十角までの方程式を示めしたのみであるが,「大成算経」には何角は幾次の式となるかを記るす。その部分は「角法定乗」と題せられて居るが，別に「角法定乗」と題して僅々四五丁に過ぎざる小冊子と為し，関孝和述と著したものもある。

5. 不盡角又は畸角と云うのは，正多角形でなく円に内接し得る多角形で，$(n-1)$ 辺だけは相等しく，残りの一辺は等辺よりも小なるものを云う。この種の多角形に於ても，角中径及び平中径は正多角形の場合と同様に求められる。

「大成算経」に既にその記載が有るから，関孝和も研究の有ったものか，若くは建部兄弟等が之を開始したのであろう。

中根元圭は踏轍術と称して，角術の方程式を一般の形式に書き表わすことを始めたと云うが,「久氏遺稿」にも出て居るから，久留島義太も別に同種の研究があったのか，然らざれば元圭の業績がこの書中に出たのであろう。然るに不盡角の場合に於ても，その踏轍術を適用して類似の式を構成し得られるのであり，その事は久留米城主有馬頼徸の「拾璣算法」(1669年刊）に見える。即ち傍記の如く之を言う。元圭の名は時には元珪と記るされて居る。

往年中根元珪者。新考二角術一名二踏轍術一。雖レ然闕二不盡角之諸術一。故施レ術録二于茲一。

6. 角術にて得るところの諸方程式を表の形に作ったものも，色々のものに出て居るが，坂部広胖の「角術啓蒙」(享和二年，1802）には「角術式」を附し，かれこれ畳二枚敷ほどの大きな表が出来て居る。これほど大きな表は他にその例を見ない。

序文に次の如く言う。

角術ハ所謂用ノ用タル者ニ非ズト雖モ，算家ノ一大門ニシテ，

世々ノ達算一度是ヲ顧ザルコト稀ナリ。故其術最多シト雖モ，各イマダ其自然ヲ得ズ。予モ亦一術ヲ著ス。数万角ニ到ト雖モ，角数ニ仍テ豫其変化ヲ推明シテ其式ヲ得ノ術，古人ヲ恥ストス。然レドモ物理元ヨリ無量ニシテ，術技亦無限ナリ。故ニ只後世ヲ恐ルノミ。

和算家が如何なる精神でこの種の問題を開拓して居たかの事情も，この序文中に窺われる。

9. 前にも云う如く，支那の古い数学には正多角形に関する算法は見えないが，併し清代になっては，三角法の関係上に正多角形若くは角度を何うかして，その関係を求めることも見えて居る。併し和算家が他の応用などは一切之を度外に置いて，角術の諸算法を開拓したのとは甚だ異なり支那の清代に於てこの種の問題が取扱われるのは，全く三角法に於て八線表の作製を解説する必要上のものであった。故に割円八線表の名称が有る如く，これ等の算法をも割円術と称した。斯の如く支那と日本では根本から目的を異にしたので，その取扱方も亦頗る異なる。

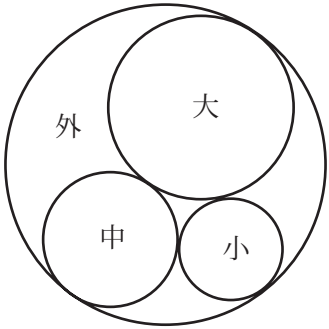
和算家は角術の如きは，全く正多角形の算法として取扱い，三角法に関係はない。和算家が西洋の三角法に接触するのは，享保年中に清の梅文鼎の「暦算全書」が伝って，建部賢弘が将軍吉宗の命を受け，その門人中根元圭を薦めて之を訓訳せしめた時から始まるのである。これは享保十一年 (1726) と云うが，恐らく十二年の事ではないかと思う。

この当時既に和算の角術は餘程発達して居る。そうしてそれ以後に於ても，三角法は多少之を説くものもあるが，多く用いられることになるのは，ずっと後の事であり，角術は三角法への関係はなく独自に進んだのである。且つ累円術即ち円内に幾多の円を

累容した問題等に関して，得る所の方程式が，角術の方程式と同様のものが見出され，その関係を研究上に利用されるような事にもなる。

十六　累 円 術

1. 外円内に大中小の三円を容れた図 (1) に於てこの四つの円径の関係を求むることは，一つの面白い問題を提供する。



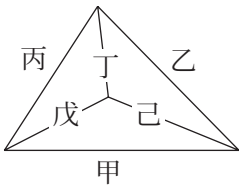
(1)

中小二円が相等しき場合は「古今算法記」（1670 年）の十五問中の一にして，関孝和が之を解く。

この種の図形に関して勿論色々の問題が作られる。

類似の図形に関する問題も亦幾らも出現する。後には諸円の接触した繁雑な図形も多く現われることとなり，所謂累円術と称するものも成立つ。

2. この種の問題を解くには，所謂六斜術と称するものが有る。即ち図 (2) に於てその六斜の関係を示めしたもので，可なり複雑な公式となるが，和算家は頻りに之を活用した。

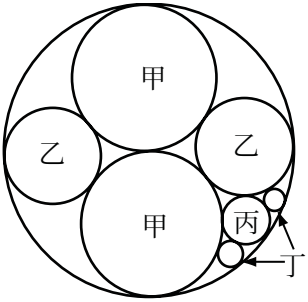


(2)

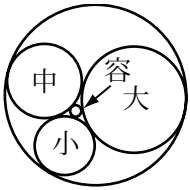
この関係は「発微算法演段諺解」（1685 年）の中にも，解法の中に現われる。併し特に之を記るしたのは「久氏遺稿」であり，同書中の三四ケ所に見える。久留島義太の如きも甚だ之を賞用したのであろう。同書中にも図 (1) の解法にこ

の六斜術を使用すべきことも示されて居る。言うまでもなく，四円の中心を結べば六斜の関係を生ずるからである。

「拾璣算法」(1869年刊) にも六斜適等が出て居る。尚時代を下っても，之を記るした算書は幾らも有る。



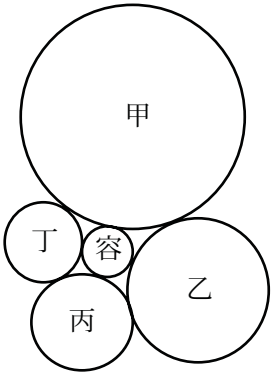
(3)



(4)

「六斜適等」など云う書名を附して，その解義を記るしたものもあれば，他の書中に一節を成して記るされたのもある。和算家が之を重視したことは，この事情から言っても充分に明らかである。

和算家は図形の代数的関係を求めることを主とするので，六斜適等の如き関係が重要となるのであった。

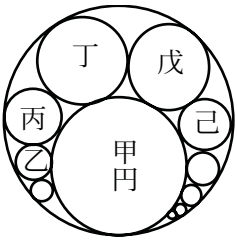


(5)

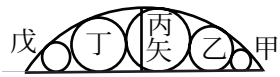
3. 「久氏遺稿」には図 (3) の諸円径の整数解法に関する問題もある。「拾璣算法」(1769 年刊) には図 (4) 及び (5) などに関する問題が有る。

この種の問題は前代にも見えて居たのであるが、更に進んでは図 (6) 及び (7) に関するものも論ぜられることとなった。

これ等の如き場合には次々に累円径を求めるのであ

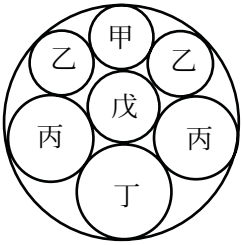


(6)



(7)

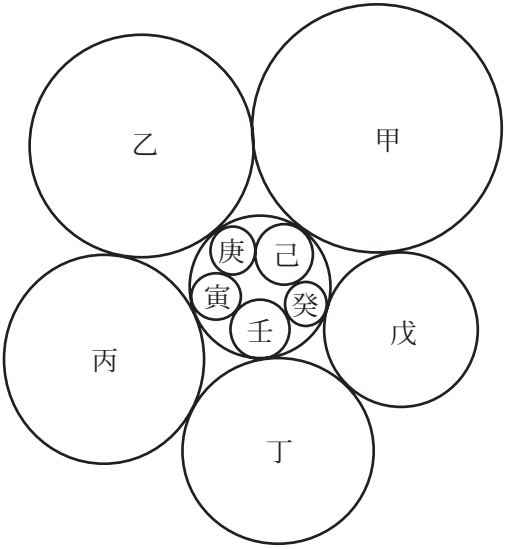
って, その算法を逐索術と称する。逐索術とは固(もと)より累円の問題にのみ関するのではない。而(しか)も累円の問題が現われ, 逐索術の解法が用いられることとなったのは著しい。刊本にこの種の累円の問題が見えた初めは蓋(けだ)し内田秀富編「算用手引艸」の増補（1765 年）であろう。



(8)

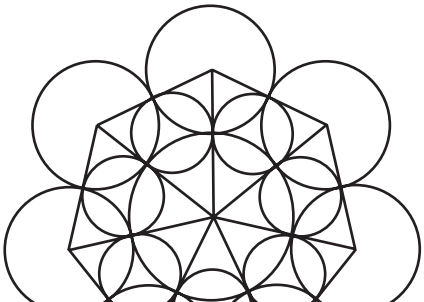
藤田定資の「精要算法」（天明元年刊, 1781）には, 円 (8) に於て外甲両円径を知りて乙円径を問う題が有る。

4. 「算法学海」は坂正永編にして，天明元年 (1781) の序跋ありて同二年の刊行であるが, この書中には円 (9) に就(っ)きて，諸円径の無奇零解法を問う。奇零とは剰餘など云うことであり，従て小数を意味し，これは整数解法を問うものである。



(9)

5. 安島直円編「環円無有奇術」（天明二年重訂，1782）に



は，円数が幾何である場合にも一般にこの問題の解法を記るす。この解法中に図(10)があり，之を利用して最後の結果を求める。

5. 安島直円は「廉術変換」(天明四年，1784) 及び「円内容累円術」(同年再訂)，「算法考草五円術」等の諸編の作が有り，累円術に就いて一般的の解法を攻究した。廉術とは逐索術と云うのも略々同じく，従前から廉率，廉図、廉式など言えるものから，その名称が出る。前に久留島義太にも「廉術」と題する一編が有る。廉術の術名はかくの如き由来が有り，開方式の諸廉，換言すればその次々の諸項の接続する法則を表わしたものに基づくのである。

然るに稀に極めて稀に，簾術の文字を用うるものが有る。この事実の為めに却って簾字の方が正しいのだと説く人もあるが，併し今言う如き由来が有るから，簾術と云うのは例外にして，正しくは廉術と称すべきこと何等の疑を容れない。

「廉術変換」に於ては，二円間に累円を容れた場合にその次々に接続するものの公式を作り，この公式を或る格段の場合，例えば内外両円間に甲円を容れた両側に相等しき二つの二円が有るとか，内外両円間に二つの甲円が相並ぶとか云う如きものに就いて「変換之法」を説く。

斯くして内円が外円より大となるときの図を記し，此処に示めす如き論究が有る。即ち円が至大となれる極限は直線となると見るのである。この為めに円闕即ち弓形内に累円を容れたもの

内円至大。則其周伸而成二一直線一。於レ是内円径寸。不レ可二得而測一。如レ天無二際限一…其円即円闕内容二累円一之図也。

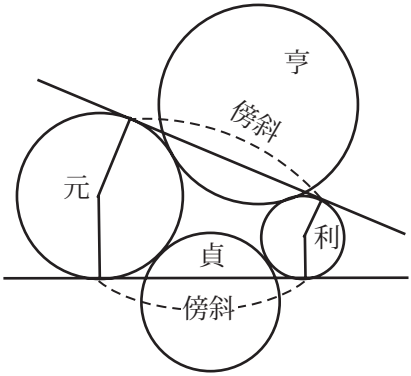
も，二円間に累容したものと一般に論ぜられることとなる。

「円内容累円術」に於ては，廉術に依りて得るところの公式を応用して，一例を言えば「精要算法」所載の図 (8) の如く，内外二円間に三円，四円，五円，六円，……を容れた図形の諸公式を作る。先ず一つの甲円の両傍に両乙円の存在する場合が挙げられ，次に両甲円の相並ぶ場合の三円，四円，五円，……の円に就いて説く。

その結果の方程式は表の形に之を示めす。

そうして角術上の諸方程式と比較して，同じ構成を成すことを示めす。

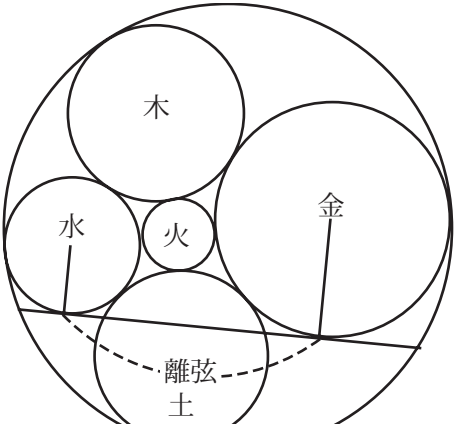
「精要算法」に図 (8) が出たのに対し，餘程一般に説かれることとなったのである。



(11)

6. 安島直円は「算法考草五円術」に於て，図 (11) に就き，四円径を知って傍斜即ち共通切線の長さを求め同じく累円が二円に内切する場合も説いて居るが，その結果を利用して一円に他の四円が二つづつ相切して環列する図形などの問題を解くこととした。

斯くして傍斜の公式が，問題解法中に利用されることとなる。即ち傍斜の公式を二様に作り，その間に傍斜を消去するときは，円径相互の関係を表わす公式



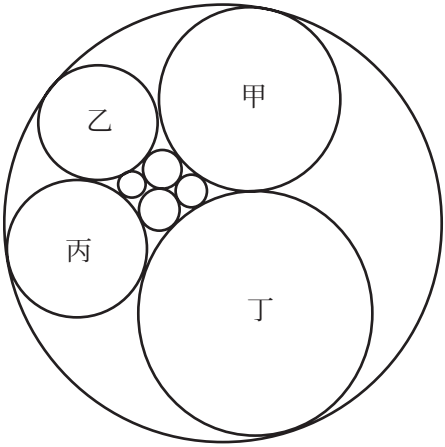
が得られる。

この原則の算法はその後には甚(はなは)だ重要なものとなる所謂(いわゆる)傍斜術即ち是れである。

7. 安島の門人日下誠の「五円術後篇」には，図 (12) に於て，$(\text{離弦})^2 = 2$ 水金と云う公式を得ることを説く。

これは四円径にて傍斜の公式を作れば二様に出るのであるが，それから消去を行いて，この公式に到着する。

既に簡単な形式を為せるこの公式を得る以上は，之を他の公式と併せ用いて，円内容五円の諸円径の関係を求め得られる。



(13)

これから累円の問題は色々の形式のものが現われる。

8. 御粥安本の「算法浅問抄」(天保十一年，1840) に図 (13) に於てつまり

$$\frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{丁}} = \frac{1}{\text{乙}} + \frac{1}{\text{丙}}$$

となることを記する。

この関係は他の諸算書にも見える。図が対称になった場合は牛島盛庸の「続算学小筌(しょうせん)」(天保三年，1832) にも出て居るが，答術は異なる。

この図が可能である為には，甲乙丙丁の四円間に一つの円が完

全に切し得ることも亦後には見えている。

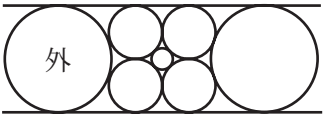
9. 白石長忠閲「数理無盡蔵」(文政十三年，1830) と云う稿本には，一つの円に切する四円間の四つの共通切線に関する所謂Caseyの定理に相当するものの記載が有る。Casey に先きだつこと約三十年，諸円切触の問題が多く現われることとなり，その結果としてこの関係も亦見出された。

この関係を使って多くの諸問題を解いた実例も見られる。図 (13) なども之を応用して解いたのが有る。

10. 牛島盛庸の「鄒理円線一致術」並に法道寺善の「観新考算変」等には西洋幾何学上の反形法又は反転法 (method of inversion) に対比すべき変形の算法が見える。鄒理とは数理の意であるが，盛庸が鄒字を使ったとは思われぬ。この文字は後の写本に用いられたものと見て宜い。

反転法に結果は対応するが，併し反転の中心又は反転の半径など云う事も見えないし，反転の算法を使ったものではないと思われる。

図 (13) の甲丙二円が大極となる変形の結果は図 (14) となる。そうして変形後にも切触の関係は変わらぬものとし，原図中の諸円の傍斜即ち共通切線の算式は，変形後に於ても其形式を不変に保有するものとする。故に変形図に於ける諸斜を算出するときは，直ちに原図に於ける関係となる。これは算法上に幾多の便宜を提供する。



(14)

この種の変形の算法が現われたのは，諸円切触の問題に於て一つの傍斜に就いて二様の公式を求め，その両者から傍斜を消去して諸円径の関係を求めるに当り，その公式の一方は，之を変形図

に就(つ)いて算定し得られると云う便宜が有るからに依(よ)る。即ち傍斜術発達上の一過程を成す。

この変形の算法に於ては，一円が全く他円の中に在る場合に於ても，その二円間の処の共通切線と云う如(ごと)き概念も用いられたのであった。思えば随分立派なものであった。天保年中から幕末の頃までにこの算法は構成され活用されたが，その後和算は廃(す)たれて洋算の時代に進入するから，この種の発達も之を継続されないで終ったのは惜しい事であった。

十七　整 数 術

1. 不定方程式の整数解法は、希臘(ギリシア)の Diophantos もその研究の有ったことが有名であるし、印度(インド)の数学上に於ても亦著しいものであった。西洋近世の数学にも亦甚(はなは)だその進歩を見る。不定解析術と云い、整数論と云うのは，この種の学科を指す。

和算家も整数術と称して，整数解法の問題を好んで解いたものであった。不定の問題に就(つ)いて，整数を以て答数を出すことを行うので，整数術と称したのは当然の術名である。その文献は決して乏しくない。

2. 日本の整数術は支那の算法から出る。支那の数学には整数術と云う術名は見えないが，併(しか)し之(これ)に関する若干(じゃっかん)の問題並に方法は見られる。

「孫子算経」は晋から南北朝頃の書物であろうが、この書中に某数あり，3 にて繰返し割るときの剰餘(じょうよ)2，5 にて割る残り 3、7 にての剰餘(じょうよ)2 なり，其数を問う。

と云う意味の問題が有る。即ち

$$N = 3x + 2 = 5y + 3 = 7z + 2$$

から N を決定せよと云うのである。

「張邱建算経」には両方程式

$$x+y+z=100, \quad 3x+1y+\frac{1}{3}z=100$$

から x, y, z を問う問題がある。これ等は不定方程式であり，その整数の解答を求めるのである。

この種の問題に就いては，印度の数学との関係如何は甚だ不明であるが，併し支那の暦法上の研究から工夫されることになったのでは無いかと思われる。

3. 宋の秦九韶は「数書九章」（1247 年）の著が有り，この中に大衍求一術と称する算法が見える。即ち不定方程式

$$ax-by=1$$

に於て、a と b とは既知の整数とし，x と y との整数値を求める。

その解法は恰も連分数を求めるが如き演算を施して之を行う。

この解法の結果を用いて、上記の「孫子算経」の問題なども解かれる。その他の問題も色々とある。

秦九韶より稍々後れて，宋の楊輝はこの種のものに翦管の術名を附して居る。和術家も亦秦九韶の大衍求一術に相当のものを剰一術と称し，翦管術の術名は関孝和から以来甚だ行われた。秦九韶の大衍求一術の解法と関孝和の剰一術の解法とは，算式の並べ方には異同もあるが併しその手数は全く一致する。

大衍と云うのは易の用語であるが，唐の僧一行の作れる「大衍歴」に於て，易の大衍に関して整数の考察が行われ、少くもその頃からは暦術上に大衍求一術若くは翦管術の如きものが行われて居たらしく，秦九韶はその暦術上の算法に基づいて説いたものと見える。

4. 和算家は翦管(せんかん)術の問題を多く取扱ったものであるが初めには剰一術を重ねて行うのであった。然(しか)るに渡辺一の門人斎藤尚中は剰一術を唯一回施すのみで解き得るように工夫したと云うことであり，又和算後期の刊行諸書中にも同様の解法を記したものが有る。

渡辺一の「謹薦算法」（文政二年，1819）に，

> 予カ門生齋藤尚中精要算法之内チ二重翦管(せんかん)ヲ用ヒテ答術ヲ得タル題ニ，一重翦管(せんかん)ヲ用ヒテ答術ヲ得，至極簡易ノ適等ヲ求メテ，予ニ告ル。予又其理ヲ推シ…

と言うのはそれである。

5. 直角三角形の整数解は，何(いず)れの国でも試みられたものであるが，和算家もその例に漏れず，色々に之を試みた。

松永良弼の「算法集成」（1740 年頃の作）にも三種の解法が有る。

斜三角形の整数解法も亦和算家が幾様かの試みを記したものがある。

6. 直角三角形の整数解法からして，直堡壔(ちょくほうとう)の整数解法，即ち $x^2+y^2+z^2=u^2$ に就(つい)ての問題も出て来る。

更に之を推し拡めて，

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=y^2$$

の場合も安島直円（1791 年）が之を解いたものがあり，更に

$$1x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+\cdots\cdots+nx_n^2=y^2$$

等の場合に於ける整数解は会田安明が試みた。

7. 白石長忠の「社盟算譜」（文政九年，1826）には，御粥安本の名で，不定方程式

$$x^3+y^3+z^3=u^3$$

の整数解を記す。

馬場正統の「算法奇賞」(文政十三年，1830）には同十一年の算額中の一題として，

$$x^3 + y^3 - z^3 = u^3$$

の整数解を挙げる。

堀池久道の「掲楣算法(けいびさんぽう)」(天保八年，1837）には，

$$(x^3 + y^3 + z^3)x = u^2$$

の整数解が有る。

又平野喜房の「浅致算法」(文久三年，1863）には

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 - y_1^3 - y_2^3 - y_3^3 = u^3$$

の整数解が有る。

家崎善之の「五明算法後集」(文政九年，1826）には

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm x(xy + xz + yz) = u^2$$

の整数解が見え，藤岡有貞の「算法円理通」(弘化三年，1846）には

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots\cdots + x_n^2 = u^2$$

の一組の整数解を知りて，その各数の差を変ぜざるように

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \cdots\cdots + x_n'^2 = u'^2$$

の他の整数解を求むる術が記(し)るされて居る。

これ等は何(いず)れも和算後期の業績にして，凡(すべ)て刊行書中に見るところである。

8. 又長谷川寛閲, 福田廷臣編の「算法変形指南」(文政三年, 1820）には

$$a + bx = y^2$$

の整数解が記(し)るされ，文政九年 (1826) の「五明算法後集」にはその改術を見る。

十八　方程式解法

1. 支那から伝えられた算木使用の高次方程式解法は原則に於ては英国の Horner の近似解法と同じであるけれども，併(しか)し一桁づつ丹念に演算して行くものにして誠にまどろこしい事夥(おびた)だしい。既に十露盤(ソロバン)の軽便に慣らされて少しでも簡単に取扱うことを願える和算家は，算木の旧法にのみ依頼することは堪え得るところでなかった。

是に於て関孝和の如(ごと)きも，割算を用いてその解法を省略することを考えた。又或種の逐次近似法をも考えた。

2. 支那古算法中の盈朒(えいじく)は，或る問題に就(つ)きて二つの仮定数を設け，之を用いて未知数を算出するもので，これは複仮定法と称すべきものである。一次方程式の場合には全く正しい答数が得られる。

和算の初期からこの盈朒(えいじく)の算法は賞用された。

中根彦循は八代将軍吉宗が建部賢弘へ下問した暦術上の問題に就(つ)きて，盈朒(えいじく)術に於けるが如(ごと)く二つの値を仮定し，それから一つの近似値の答数を求め，次第にその算法を繰返し適用して，逐次に近似の度を高めることとした。その著を「開方盈朒(えいじく)術」と云う。享保十四年 (1739) の作である。

松永良弼編「絳老餘算(こうろうよさん)」に統術惣括として用いられた算法も亦同様のものである。

3. 会田安明編「重乗算顆(さんかじゅつ)術」（寛政十年，1798）には方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\cdots = 0$$

に於て，x_1 を x の近似値とすれば

$$x_2 = x_1 - \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\cdots}{a_1 + 2a_2x_1 + 3a_3x_1^2 + \cdots\cdots}$$

はその次の近似値を与うるものとした。

安明はこの近似解法の創意に就いて頗る得意で有り，序文に於て

> 抑 算法立方式ニ起リ数万乗方開方式ヲ得ルトキハ，算顆術ヲ施シ難キモノトシテ，算木ヲ用ヒテ開クコトトセリ。往古ヨリ今ニ至テ算顆術ノ通術アルコトヲ知ルモノナシ。尤 諸算書ハ固ヨリ諸家ノ秘書ニモ見聞セズ，予モ此通術に数年意ヲ寄トイヘトモ，容易ニ得カタキ術ナレバ，終ニ得スシテ止ミヌ。実ニ寛政十戊午年四月二十九日勃然トシテ其通術ヲ得タリ。

と言い，且つこの日に品川で鯨が捕獲されて珍らしい事であったが，「予ハ独リ此ノ通術ヲ得テ鯨ヲ取リシ想ヲナセリ，故ニ此巻中ニ其定則ヲ記ス」と説く。

安明が得意の情は想うべきである。けれどもこの新創意と云うものも，実のところ算木を使って近似解法を行う仕方を法式化して記載し，その結果に基づいて支那で古来、単位以下を分数の形で表わした方法，又関孝和が割算を用いて省略計算を試みた算法を形式的に叙述したと云うだけに過ぎない。而も上述の如き形式に書き表わすを以て，その算法を逐次適用する便宜となる。

発明なる事の容易でないのも亦思われるし，発明にはその由て来るところの過程の有ることをも示めす適例となろう。

上記の序文にも算顆術云々とあるが，算顆術即ち十露盤を使用して算法を成就したいことは和算家の理想であったのである。この儼たる理想を有しながら而も算木が長く用いられて廃棄さるることなく、天元術の教科書も安明のこの稿本の作製と略々同じ頃

に数学数育上に功労の高い藤田貞資が百餘年前の旧い算書たる「天元指南」を再刻したと云う事実が有り，伝統の力は容易に脱却されない事を物語るのである。

4. 坂部広胖は門人川井久徳の名で文化二年 (1805) に「開式新法」を刊行した。この書中に於ては，方程式を

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_{r-1}x^{r-1}$$
$$+ x^r(a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \cdots\cdots + a_nx^{n-r}) = 0$$

の形を書き表わすときは，x_1 を x の一つの近似値とすれば

$$x_2 = -\frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots\cdots + a_{r-1}x^{r-1}}{x_1^r(a_r + a_{r+1}x_1 + a_{r+2}x_1^2 + \cdots\cdots + a_nx_1^{n-r})}$$

は第二の近似値となるとし、この近似法を逐次適用して次第に近似の度を高めるものとする。

この方法は正負の実根を凡(すべ)て算出するに役立つ。又 x_1, x_2, x_3, x_4 までを算出した上で、$k = \dfrac{x_3 - x_2}{x_4 - x_3}$ と置きて，

$$x_4' = \frac{x_4k - x_3}{k-1},\ x_5' = \frac{x_5k - x_4'}{k-1}.\cdots\cdots$$

とすべし等の事も見える。種々の場合に就(つ)いて色々と委細の解説がある。

和算家の方程式解法としては最も進歩したものである

巻首に，従来の開商点兵は剰一術を用いて整数の根を求めるものであり、開方盈朒(えいじく)術は「拾璣算法」の趕趁(かんちん)であるが，同書の題に就(つ)いては可能であるけれども他の題では不可能となることとがある、綴術も「拾璣」に出て居るが，実に妙術であるけれども併(しか)し方程式を乗除のみで解く為めの通術ではない。この他の小術も凡(すべ)て一根を得るのみに過ぎない。然(しか)るに新術に於ては之れと異なり、根の整数たると小数を帯ぶるとに論なく，有るほどの正負の

根は悉(ことごと)く算出し得べく，数理を盡(つ)くしたものではあるが併(しか)しこの新法を基礎として更に興進し層飾するものあることを希望する旨を言う。

その抱負も亦想うべきである。川合久徳の序で見ると捷術を十露盤(ソロバン)の上に於て得たい為め云々と記されて居る。

十露盤(ソロバン)の算法に依って計算を行うことは全く和算家の大きな理想であったのである。

十九　規矩術と幾何学

1. 幾何学と云う名称は何と無く異様の感がある。西洋で之を geometry と云うのも geo（地）と metry（測る学）との二語から成り、字義に於ては地学、土地丈量の事からこの学が起源を有した事に基づく。希臘(ギリシア)では之を埃及(エジプト)から受けて，かくの如(ごと)き実地応用の技術の地位から高めて，更に応用と云う如(ごと)き事に関心なき所の純正科学に造り上げたけれども，而(しか)も名称のみは之を改変することなく，その儘(まま)行われて遂(つい)に今までも伝承されたのである。

幾何学と云う訳語は明末に伊太利(イタリア)人利瑪竇 Matteo Ricci が支那に来り，高官徐光啓の助けを籍りて Euclud の原本を漢訳したとき，之を「幾何原本」と題したのに始まる。如何(いか)にしてこの名称を採ったかの事は，序文等にも記載は無いが，思うに幾何の字音は Chi-ho にして此れは geo の音訳に当り，幾何と云う二字の意味は metry に相当するとして，幾何と呼ぶことにしたのでは無いかと考えられる。

併(しか)し単に幾何と云うだけでは何(ど)うも変に思われるので支那でも之を形学と改めようとの試みもあったけれど，困襲の力は最早(もはや)この新しい提案を容るるに足らなかった。

我が日本での和算家の手で「幾何学」と称する学科は学修されることにならなかった。幕末の頃から度学と称せられて，一種の幾何学様のものが取扱われたことはあるが，ここには新たに度学の名称が用いられた。

維新後に至り，西洋数学が盛んに採用されることになって，漢訳書を参考して飜訳が企てられるに当り，茲に始めて幾何学の名称が現われて来た。代数学と云う名称も亦その時代に新訳の支那術名から伝わるのである。その名称の異様なのに時には怪訝の眼を向けながら，遂に広く行われて，再び改めることは出来難くなったのである。

2. 然るに江戸時代の我国には，規矩術と云う学科が有った。規は「ぶんまわし」であり，円規であるが，矩とは「かねの手」であり定木である。然らば規矩術とは円規と定木との術と云うことで，言わば幾何学とも謂うべく，幾何学的作図法にも相当する。

而も規矩術は測量術を意味する。測量術は之を町見とも云うが，又規矩術とも称した。規矩元法と云うのがその起りである。

町見とは町間を見る法の略称で有り，和算初期の諸書中にこの語の起原を見るべき若干の條項が有る。

規矩元法と云うのは，和蘭人から測量術を伝えられて之を規矩元法と称したと云う事になって居る。定木とコンパスを用いて幾何学的に取扱う為めにその名称が作られたのである。

その初め和蘭人カスハルなるもの之を長崎の人樋口権右衛門に伝え，権右衛門が金沢氏の父子兄弟を経て清水貞徳に伝え，貞徳の手に於て「規矩元法」の本伝，別伝印可等が整頓せられ編成せられ，伝授の形式も整うたと云うことである。

当時の測量術書を披見するに，幾何学的の処理に富み如何にも

規矩術の名称が適わしいような気がする。その名称は後までも行われた。

3. 規矩術の書中には正多角形の作図などに関する粗雑な算法も見える。純測量術からこの種の事にも進んで行くのは，規と矩とを用うる規矩術としては当然の事であったろう。

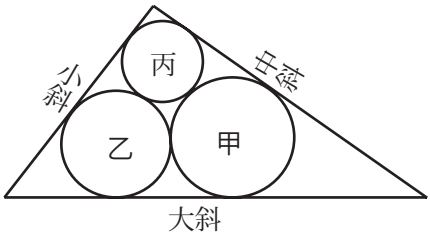
村井中漸の「算法童子問」(安永辛丑，1781）巻三に二十角までの作図法を記す如きも，この種の事から考案することになったのであろう。固より略術である。

4. 五角形の作図法に就いては西洋の方法を記るし，藤田貞資と安島直円との両方法を挙げた稿本があるし，之に平野喜房の方法を添加したものもある。

和算書中に作図の方法を説いたものは少いけれども，稀には今言う如きものもある。

溝口流の「方円順度」には作図が色々に見え，珍らしいものである。この書の著作時代は，序文の年紀と内容の成立とが必ずしも一致しないらしく，又完本に乏しい。某氏所蔵には稀に見る美本がある。この書の如きは建築家に関係のものであって，始めてこの種のものが作製されたように思われる。

5. 和算の問題は図形に関したものでも，その図形の性質を説明する事に関するものは，殆んど見ることが出来ない。凡て図形中の成るものを与えて，他の某なるものの大さを問うのである。例えば坂正永の「算法学海」(天明元年序，1781）に図 (1) につきて，図の如く三斜内に甲乙丙の平



(1)

円を容(い)れ，大中小斜各若干(じゃっかん)として，各円径を得る術を問うと言う如(ごと)きが，和算の問題の一般の形式である。

これは三斜三円術と称するものにして，直角三角形の場合は今少し早く現われ，三斜即ち斜三角形の場合は藤田貞資及び安島直円の研究が有る。恐らく貞資並に直円よりも前，既に成立して居たであろう。

之を西洋の数学に比すれば，即ち伊太利(イタリア)の Malfatti の問題と称して有名なものに相当する。唯(ただ)，西洋では作図の問題であるが，我国では円径の長さを求めると云うのが異なる。而(しか)も西洋で Malfatti の問題が出たよりも我国の方が前であった。

和算家はこの種の問題を研究しながら直角三角形でも斜三角形でも，その中へ三円を正確に作製する作図の方法に就(つ)いては，之を記(し)るしたものがない。作図が正確に研究されなかったのは和算の一つの缺陥(けっかん)であった。

試みに和算書の刊行されたものを採って見るが宜(よろし)い。少し込入った図になると，随分不精密なのが多い。相切する筈の二円が離れて居ったり，図の如(ごと)くと書いて有るがその図に於いて果して相切するのだか判明しないようなのもあれば，甚(はなは)だしいのになると幾多の円が環容されたものの円数が足らないなど云うのもある。

かくの如(ごと)き有様であるから，知名の大家でも図形の性質を思い誤って，その為めに過誤を冒したようの事もあった。

規矩(きく)術即ち作図方法が今少し注意を深め，徹底的に研究されたならば，和算の進歩は更に見るべきものも出来たであろうに誠に惜しいようにも思われる。

7. けれども支那では明末に西洋人が来て，暦術並に数学を伝え，「幾何原本」も漢訳されて，これから幾何学なるものは諸算家の重

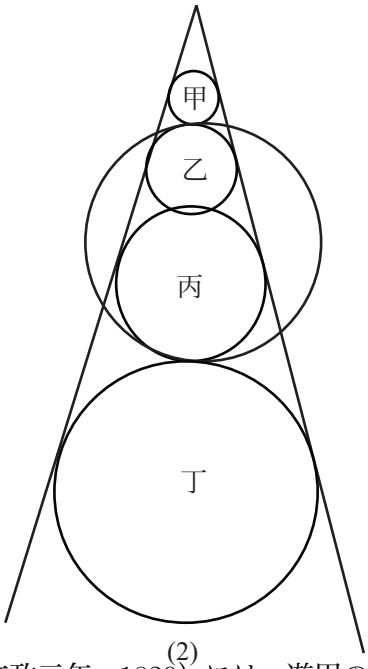
んずる所となった。而も主として既成の訳本を学習したり，証明を簡略にしたものを遵守する計りであって，一向に新境地を開拓したと云う事を聞かない。然るに和算家は西洋伝来の規矩術をも多少は学修したり，又規矩術に就いて多少は新たらしく考案をも廻らしたと云うものの，この方面には左まで出色のものは無かったとは云え，幾何学的図形に関して，主として代数的に処理することは盛んに之を試み，その結果として上記の Malfatti の問題に相当する問題も現われ，又既述の累円関係の諸問題も研究せられ，新しい知見も数多く見出されたのであった。若しその結果を集成して之に組織を加うるに於ては，優に一種特異の幾何学を成すのである。その当時に存在せる規矩術とは懸け離れて，別に規矩術ならぬ規矩術が構成されたと謂っても宜い。幾何学的証明の精神に於てはたとい甚だしく缺くる所が有ったとは言え，Euclid 風の幾何学，演繹体系の幾何学としては，不完全と云うよりも全く意味を成さなかったとはいえ，諸般の図形に関する幾多の事項が集積されて，一つの大きな体系を形造るのである。之を和算の幾何学と言っても，決して不当ではない。

この種の幾何学は支那の清朝時代には全く構成されなかった。既に「幾何原本」を重視した支那で，他種の幾何学が構成されないのは当然とはいえ，和算家が得たように，幾何学的事項の発見開発も亦支那では見られなかったのである。その両者を比較すれば，誠に雲泥の相違がある。

是に於て思うに，既製の完結せる組織体系を墨守し，却ってその真精神を了解しなければ，之を充分に発揮することも出来ないものに比すれば，たといその既成の荘厳なる殿堂は之を有せずとも，別に新らしい分野を開拓して，一歩又一歩，こつこつと知見

を加え，領域を拡め益々進んで取るものの方が如何ばかり優れて居るかも知れないことを茲に明瞭に指示すると謂うべきであろう。

7.「最上流六士之術」（享和二年，1802）に図 (2) に就きて甲乙丙丁の四円径が互に比例することに相当する術が見える。会田安明の弟子六人の名で奉納した算額の一題にして，門人大原理正（後に利明）の名を記す。故に之を大原氏の定理と呼んだ人もあるが，恐らく師会田の手に成り，この名称を附するは当らない。且つ算額の署名などに関する一般の風習の如きも之を無視した見解と謂うべきである。安明の「算法天生法」巻四十五並にその以後にこの問題の解義が有るが，初めは複雑な代数演算に依って之を得たものであった。

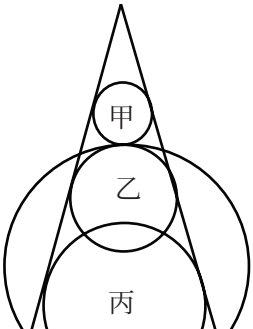


(2)

長谷川寛閲，福田廷臣（後に平内廷臣）編の「算法変形指南」（文政三年，1820）には，遊円の大小随意であるが，その小極は図 (3) の如くなり，甲乙と丙丁とは互に相切することになるから，之に依って四円径の相比例することを知る，として居る，

この一例を見ても，幾何学的証明の甚だ拙であった事が思われよう。

之に就いて「東京数学会社雑



誌」第四号（明治十一年）に内田五観は，

> 当時算家見テ称セザルナシ。
> 其末……ノ題，解義頗ル煩冗，刻苦シテ過乗ヲ省キ，竟ヒニ簡術ヲ得ルヲ以テ，其額ノ幹軸ニ載ス。然ルニ後，同矩ノ正比例ニテ直ニ其術ニ適フコトヲ悟リ，仍テ其題ヲ刪リテ他題ニ替シト云。

と記るす。額の幹軸とはその額の最後に出すことを言う。最も之を重く見たのである。

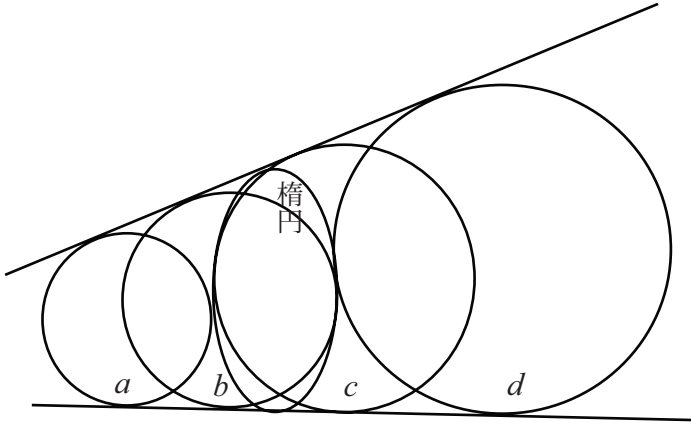
この記載に拠れば，複雑な代数演算を用いて初めてその簡単な関係が見出されるので，之を重視もしたのであるが，後に至り単なる図形の相似の関係からして求め得ることが知られては興味も醒め果てて，この題と術とを放棄することになったと云うのである。

果して之を放棄するに至ったか否かは，今之を詳にせぬが，併し和算の終末に於ける老大家内田五観が斯く言う所を見れば，和算家が幾何学的問題の処理に就いて如何なる見解を抱懐したかの一斑を知るに足るのである。

今から思えば誠に世界を異にしたかの感がある。

8. 岩田好算は慶応二年 (1866) に，図 (4) の如く二線間に楕円を挾み，a, b, c, d の四円を容るるときは $a : b = c : d$ となる事を説いた。

好算のこの解法は約二ヶ年足らずの歳月を費やし，甚だ苦心した結果であった。これは前記の問題を楕円の場合に推拡めたもの



(4)

と言っても宜かろう。

二線が楕円を截る場合にも矢張り同じ比例の関係が成立つとした人もあるがこれは正しくない。

之に就き内田五観は，楕円を二線間に斜めならず正しく容れた場合に，楕円と a 円及び b 円の間に二円又は三円づつ容れた図に就いても，同じく a, b, c, d の四円径が比例することを言う。

9. 和算家の幾何学的問題に就いての一種の例として上記の業績を挙げたのであるが，維新後には西洋の数学が伝わり，西洋の幾何学も亦学修されることとなる。是に於て和算家出身の大村一季等の如きも頻りに幾何学的作図の問題など研究したものである。

この時に当り，作図問題に関して某條件に適する図を画く為めの「其規矩術如何」と云う如き形式に問題が叙述されて居る。

併し規矩術の名称は何時の間にかその跡を絶つ。

而も西洋風の幾何学は次第にその真精神を了解され，幾何学の証明も正しく用いられ又新らしい研究をも企てられる事となった。

たとい和算家時代には証明の精神は乏しくとも，進取研究の意気は熾んであったが，今や其意気を体して，演繹的幾何学の真精神に触れたので，愈々益々進んで止まざるの境地に入ることも出来るのであった。

二十　円理豁術の諸問題

1. 安島直円が円理を改良し，又円壔を円壔で穿去した立積を求めたことは前に之を述べた。これから円理の算法は長足の進歩をすることになる。直円自身は他の多くの問題を解くことをしなかったけれど，直円の歿後に至り，文化文政の頃から和田寧及びその他の諸大家が多く輩出して，面積，弧長，立積等の諸問題を研究し，頗る盛観を呈することとなった。

豁術若くは円理豁術と云う名称は，この種の算法に関して用いられることとなった。

2. 安島直円の業績に引続いて出現するのは楕円周の算法である。坂部広胖の「算法点竄指南録」（文化七年序，1810，文化十二年以後刊）にも一種の公式を記す。

石黒信由の研究も亦凡そ同じ頃に出来る。

けれども初めにはその解法が容易でなかったが，和田寧等の説くところは，ずっと立派なものとなる。楕円に関する求積の文献は可なり多数に上る。

3. 和算家は楕円に就いては多く説いたけれど，楕円も円壔の斜截面として論ずるが故に抛物線並に双曲線の如きは殆んど問題にならない。関孝和は嘗て円錐の截面の事を極めて簡単に述べた事もあるが，孝和自らも多く論究を進めなかったらしく，その後にも再び見えず遂に和算の末期に至り，個々の問題に於て円錐を軸に

平行に截ったり，一つの母線に平行に截ったものが極めて稀に出て来るくらいのものに過ぎなかった。これ等の場合にはその截面の曲線に名称を附して居らぬ。

けれども砲術上の関係から弾道の研究が有り，志筑忠雄の「火器発法伝」を初めとして，小出修喜の「砲術五道真術」（弘化三年，1846）などには弾道は抛物線形を成すものとして居る。

更に進んで池部春常は空気中の弾道に就いても研究が有るが，その弾道の曲線の弧長を算出する等の事はしていない。「砲玉行道図説」（弘化三年，1846）等にその所説が見える。

後には圭竇形及び陶丘形と云う名称も現われ，前者は抛物線にして，後者は双曲線であった。これ等は欧洲語の飜訳と思われるが，併し支那訳を伝えたものではない。

抛物線の事は之を変円又は変弧の名で見えた者もある。

4. 擺線関係の曲線も亦和算家が多く説く所であった。擺線は志筑忠雄の「暦象新書」（寛政十年，1798）に出たのが初見であるが，和算家の著述に於ては天保三年 (1832)乃至五年の頃に内田五観及び和国寧等が門人の名で算額に奉納したのが初めである。

その後に至り諸算書に種々の形で多く見え，転距軌跡など云う名称で知らるることとなる。その問題には多くの輪を重ねて，込入ったものになったのも有る。

5. 白石長忠編の「社盟算譜」（文政九年，1826）には球を正多角形で穿去したもの，楕円で穿去したもの，二つの円壔を並べたもので穿去したもの，円壔を他の円壔で横の方にて穿去したもの，楕円体などに就いて穿去の立積や面積などを求める問題が見える。

この書の凡例に，円弧を求める算法は平方綴術一次で得られるが，安島の円壔穿去の算法は平方綴術二次を用うるの濫觴であり，

「点竄指南録」の楕円周背術も亦綴術二次を用うるも，他に未だ之を見ず，然るに今本書中に於ては平方綴術二次三次といえども自在を成し，綴術三次を用うるの最も初めとする旨を言う。

平方綴術とは二次式の根を級数に展関する算法であり，この種の算法を二回若くは三回に行いて円理の算法を施す。即ち定積分相当の算法を施すことを論くのである。かくの如き算法に於ては積分の結果に就いて更に積分する事もあれば，初めから平方綴術の展開式を二つなり三つなり掛け合せてその結果の二重級数，三重級数に就いて積分の算法を試むる場合もある。

要するに無限級数を巧みに取扱って積分の算法を行う事をしたのであり，無限級数に展開しないで行う所の積分方法は和算家の殆んど企てないところであった。

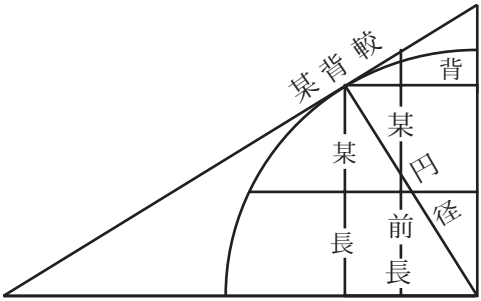
その平方綴術二次三次を用うる算法を今之を名附けて方円窮理豁術と曰うと記るされて居る。

白石長忠はこの書中に於て，同門和田寧から「一端ヲ聞テ自得スルコトアリ」とも記るす。豁術の名称も亦和田寧から始まったものであるか何うか。所謂豁術なるものの算法に就いては和田寧は頗る造詣の深いものが有り，安島直円の後を承けて最も之を開拓したのは多く寧の力であった。寧が円理の諸表を作って積分の算法を助けた功労も亦大きい。

6. 和田寧は求積の諸問題を処理するに就いて単にその個々の問題を論じた許りでなく，問題処理の條理を訂して取扱上に無理がないように安々と解き得ることを期したものである。その算法に於ては弦などを細截するのであるが，之に就いて順逆の別あることを言ったり，又切線を使って面積弧張等の微分要素

を構成することなども案出した。

例えば図 (1) を作り，某長の端に於ける切線上に某背較を取り，ここに生ずる小勾股弦は，某長と半径との成せる勾股弦と相似なることを利用しで，某背較を算出する如(ごと)きがそれである。



(1)

和田寧の円理に就(つ)いて，その門人小出修喜が天保十三年 (1842) に「円理算経自序」の中に記(し)るしたものを茲に紹介して置く。

> 関流七世和田算学先生……壮ニシテ志ヲ発シ，円理増約ノ道ヲ明ニセンコトヲ期シ，終年志ヲ此ニ潜ム……五世安島万蔵直円増約截断術等ヲ以テ楷梯トナシ，是迄滞溜スル所ノ円理ノ難問ヲ考訂シ，新ニ術路ヲ開キ，始テ楕円周ヲ著術シ，其後数学ノ奇術ヲ発明シ，後ニ一箇ノ法則ヲ立テ，諸表ヲ創製シ，畳括解脱ノ奇巧ヲ求メ，増約術ノ簡法トス。円理ノ蘊奥其中ニ存ス。……凡ソ円理ノ法ニ表ヲ用テ解術ヲ得ル者ハ，皆和田子ニ始ル。製表ノ術無ンハ，爾ソ捷径(しょうけい)ノ解術ヲ得ン。故ニ此道ニ遊フモ，他ヲ顧視スルニ豈遑(あにいとま)アランヤ。此ヲ以テ日下子ノ高弟其他自他流ノ徒更ニ和田子ニ随テ諸表ヲ授カリ，術ヲ学フモノ少ナカラス。其人必ス新題奇術ヲ発明ス。是即チ和田子ノ此道ニ功アルコト大ナル哉。……授法ノ弟子，浜崎一致，谷義直，……，余モ其員ニ加ル。是皆初学ヨリノ門人ニ非スシテ，究理製表ノ術ニ服シ授受スルモノナリ。然(しかれ)トモ亦名利ヲ餝(かざ)ルノ徒，外面自発ノ法術ト唱ヘ，和田子ノ伝ヲ隠

蔽スル人モ少ナカラズ。……

この文に依って事情を略々盡くすことが出来よう。円理豁術問題は和田寧の創意研究に依って諸方に拡まり著しい発達を遂げたのである。この間に於ける和田寧の功労の極めて著しい事は寸分も疑いを容れない。而も他の諸算家が何れだけの造詣を示めしたかは必ずしも明瞭な問題ではないのである。

7. 和田寧は「異円術法」（文政八年，1825）の作が有り，或る法則に依って楕円を変形した曲線を説く。

後にこの種の曲線は円理の円壔の截面として論かれることとなる。

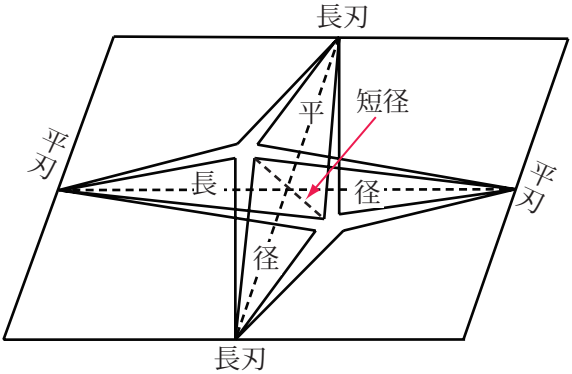
立円環を截って得るところの曲線も亦屢々論ぜられた。環楕円と称するものの如きは之に属する。

円楔及び円環の截面曲線には尖端を有するものなどもあり，尖円と云う名称も用いられ，内田五観閲，桑本正明編の「算法尖円豁通」（安政二年，1855）と題する書も現われる事となった。

この種の曲線を回転して生ずる立体に関する問題も出た。

円弧を回転して生ずる弧環の截面曲線も亦問題となる。

楕円環の問題も随分六ケしいものとして取扱われた。



(2)

8. 竹内武信閲，小林忠良著の「算法瑚璉」（天保七年，1836）には直菱の問題がある。図 (2) を記して，その形は上下より之を視れば則ち直形を成し，左右前後より之を視れば則ち菱形を成すものを曰うのである。

その問題は天保三年 (1832) の奉納算額の中に見え，直菱の長径，平径，短径を知りて總面積を問うのである。

直菱は言うまでもなく，一種の直線面 skew surface である。

直菱に関する問題はその後，齋藤父子の「算法円理新々」（天保十一年，1840）にも出て又屢々論ぜられた。類似の問題も亦多く見える。

和田寧が直菱の問題を記るしたのは未だ見聞がない。

必ずしも和田寧に関係は無いであろう。

法道寺善が文久二年 (1862) 作の「算法瑚璉直菱鉤円錐解」には，この問題の解義を記るして，邪なる解を基礎として求めたものであるから，結果も亦邪なり，そうして「如此無益考ヲ盡シテ邪術ヲ施スハ大ニ誤ナルベシ」と評して居る。且つ精微の論もあるが，之を盡さんと欲するものは予が門に来るべしと言うので，所謂精微の論をば説いて居らぬ。

萩原禎助は「算法円理私論」（慶応二年序，1866）に於て直菱の覓積即ち面積を求むる問題は近歳創造の題術にして，往々諸書に出て居るが多くは邪術にして未だ嘗て其術理に通ずるものを見ず「算法瑚璉」に載する者は術意に誤失はないけれども，甚だ迂遠にして用うるに足らず，今類例三ケ條を改正して巻中に載せると言って居る。

同じ萩原の「直菱解義原稿」には，法道寺とは異なれる解法を用いて，その終りに元治二年乙丑 (1865) 三月三日の年紀を以て「瑚

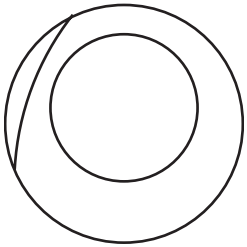
璉」の術は迂遠で有り「円理新々」の術は邪術なりと記す。而も慶応二年丙寅 (1866) 九月朔日の日附で，得るところの術に就きて真数を試むるに「瑚璉」と恰も密合するから誤失無きこと明瞭と結ぶ。

法道寺善は「瑚璉」の術を誤なりと立証し，萩原禎助は同じ「瑚璉」の術を自己の得た結果と同じ真数を得るから，正しいと言うのであるが，果して両者の何れが正しいのであるか。

明沿二十五年に至り，大坂の武田謙蔵と沢池幸恒とは萩原のその算法に就いて，一は正しからずとし，一は正しと見んと欲して，盛んに議論を交えたこともあったが，この時に至るも猶且つ充分に明瞭疑うべからざる論旨を以て最後の判断を下だし得るに至らず，言わば水掛論に終ったらしい。

この問題の如きは和算時代には未だ充分に之を論究すべき素地に達しないのであったろう。

9. 齋藤宜長閲の「算法円理鑑」(天保五年，1834) に上下不等環の問題が有る。図 (3) の如く書き表わし，之を偏円環と云う。



(3)

環内の何処に於ても近径を以て之を截れば，則ち截面は皆円なり，と言って居る。

その環実積を求める。

嘉永六年 (1853) 松峰覚著「頓成算録」には，之を偏立環と云う。

天保七年 (1836) 福岡の久間修文門人の算額に上下不等環を二箇相交らしめ，その間に十字円壔の交錯した問題がある。併し立積等を求めるものではない。この問題の如きは修文の随筆中に長谷川子道解を載せてあるが，子道は即ち長谷川弘であり，当時九州

に居ったので算額の術も亦実はこの人の手に成ったのであろう。

後に京都北野天満宮奉納の額に上下不等環の事が出たのも亦長谷川弘門人のものであった。

10．萩原禎助の「円理算要」は明治十一年 (1878) 作にして同十三年再版したものであり，和算終末の時代に於ける一算書であった。この時代には固(もと)より西洋の数学も伝えられ，和算と洋算とが互に葛藤し，又同時に相融和して，次の西洋数学専行時代に移らんとする過渡期を成したのであるが，この時代に於て本書が出たのは和算家の気焔を揚げたものとも言うことが出来よう。

この書中には，円錐数個相交錯したものの表面積や立積，重心等の問題が有り，長立円数箇を交錯した問題もある。

盤上に立環又はその一部分を立てて，その周を球が廻転するとき，盤上に画くところの軌跡，並に盤上に楕円錐を置きてその周を球が廻転して生ずるものなどもある。

尚(なお)他に類似の煩雑な諸問題もある。この種のものは前から論ぜられて居たけれども，この書は和算終末期に於ける造詣の一面を代表すと謂(い)って宜(よろし)いであろう。著者荻原禎助はこの種の難題は洋算では出来ないのだと固く自負したものであった。

和算家の出身で西洋の数学をも学び，維新後に海軍に入り後に水路部長となった柳楢悦(ならよし)はこの書の為めに序文を草し次頁の如(ごと)く言う。

柳楢悦の如(ごと)き人物からこの種の言説を聴くのは，その当時に於ける和算関係者の真情を窺うべきものであった。

和算はこの頃から久しからずして全くその跡を絶ち，再び之を学ぶものも出ないけれども，而(しか)も「円理算要」刊行の年には遠藤利貞が和算の勢力失墜を慨して和算史編纂の為めに奮起したので

夫数学之要。在二代数微分積分之三術一。凡制レ器考レ天之理。皆無レ不レ係二此三術一焉。其術自二代数一至二微分一愈難。至二積分一尤難。積分術則自レ昔所レ称円理術也。……至二政保之間一。此術愈究二精微一。能解二穿去、截分、転旋、釣垂等之類問一者数十輩。題術之数。殆及二一千餘一。当時本朝数学之盛。冠二于万芸一。及二輓近一西洋算法大行。小学之徒。概皆習レ之。而深修二本朝数学一者漸稀。蓋彼積分術。与二我円理術一、真理全帰レ一焉。然其解法大異。以二我法一比二西式一。解義明晰。畳法捷便。雖レ謂三我出二其右一。豈謾言乎。然而深修レ之者漸衰。不三復見二政保之盛于今日一。余不レ能レ無レ憾焉。蓋振起奮励。豈無二其人一乎。上州人萩原禎助者。……近又著二一書一。名曰二円理算要一。……余閲レ之。問題之新巧。法式之簡明。所四皆未三見二于西籍一。実可レ謂レ究二奥妙一矣。…余乃謂。氏亦果振二起本朝数学一之人也。復見二政保之盛于今日一。豈難乎

あった。和算の高き造詣は一方には西洋数学の了解を助ける原動力となった事も尠(すく)なからざると同時に，又一方には和算発達の史的事実は後進気鋭の人に回顧の料を与えて自覚の力を生み，我国将来の数学上に於ける進運を開拓すべき準備を整うるものであった。

二十一　和算より洋算への推移

1. 江戸時代に和算が発達したのは誠に著しい。支那の古算法を基礎として之を改造同化して我国に特殊の数学体系を構成樹立したものであって，その発達変遷の歴史は真に之を称するに足る。我国に和算が有るのは即ち我国の科学界に於ける創始開発の能力が如何(いか)に旺盛活発であったかを示すものである。江戸時代の我が

文化は，数学に於て最も発達して居たと云うのではないが，而(しか)も数学の如(ごと)きは甚(はなは)だ見るべき業績を遺した一例であり，又その最も大なるものの一つであった。その歴史の跡を回顧するとき，我等は頗(すこぶ)る意を強うする事を感ずる。数学の教授上にその発達の歴史を加味し，諸先哲の苦心経営に親しむことも出来るならば，如何(いか)ばかり学修上にも興味を倍加し，効果も亦甚(はなは)だ挙がるであろうことを疑わぬ。

和算は維新以後には西洋数学の為めに圧倒されて次第にその勢力を失い，遂(つい)に衰頽消滅したけれども，之を以て決して過去の遺物とのみ心得てはならない。歴史の回顧は力である。将来に伸びて行く指針である。我国固有の和算を棄てて外来の洋算を採用し，和算の自滅を来たしたのは今から思えば残念でもあるが，併(しか)し和算は決して無意義に消えて行ったのではない。和算の廃滅には理由もあれば意義もある。洋算の採用は決して単なる模倣でもなく，必須止(や)むべからざるものが有って之を採用し，之を摂理し之を採用し得るの能力を養うことに依って，我が国家民族の存立発展を可能ならしめなければならないのであった。

和算を棄てて洋算を採ったのは，列国競争の活舞台に進み入る為めの準備で有り，過程であった。之を欲すると否とに拘(かかわ)らず，全く避く可(べ)らざる勢であった。形式外貌の上に於ては和算は廃絶したけれども，和算を発育伸長せしめたその同じ精神は，新来の洋算の採用開発の上に移ったのであり，茲(ここ)に新らしい道程に入ったと云うに外ならない。単に和算の歴史として見れば，中絶することになったとも思われよう。けれども我国の数学の歴史としては，その進歩の方向を転換したと云うのみに止まり，連続して寸時も止まざる過程を取って居るのである。

和算から洋算への推移は日本の数学史上に於ける甚(はなは)だ重要な一部を提供する。

2. 江戸時代に洋学の発達した歴史も亦甚(はなは)だ興味に富み，有益な過程を供する。天文暦術の如(ごと)きは初め支那の「授時歴」を基礎として暦法の改革を行い，主として之に依従したものであったが，西洋の知識も不完全ながら早くから伝えられ，別して享保年中に漢訳の西洋暦術の知識が伝えられてからは，之れを無視することは出来ないこととなった。三角法を尊ぶことになるのも主として暦術関係の上からであった。

寛政の改暦には漢訳を経ての西洋の知識も多大に参照せられ，引続いて西洋の有力な暦術書を苦心して研究することとなった。暦術上には西洋の関係が極めて濃厚であった。物理学，化学，工学，砲術，航海術等に於ても悉(ことごと)く西洋の知識に負わなければならない。勿論(もちろん)，その間に於て独自の創意も多く見られ，敬服に値するものに乏しくないけれども，要するにその根本は西洋の学術に依拠するものであった。

これ等の事情を，和算の発達上に西洋の関係が殆(ほと)んど多く認められないのに比較するときは，誠に著しい対照を成す。而(しか)も西洋に関係が多からずして，独自の発達に富める和算の方が，必ずしもその歴史に一層の価値ありと云うことは出来ない。両者同じく我々日本人の努力の産物であるから，その色彩の異なるに拘(かかわ)らず，同じように価値ある成績が挙げられて居るのを見る。

3. 帆足万里は豊後日田藩の儒者であるが，西洋の理学を取入れて「究理通」を作ったのは全く愛国の理想から出たものであった。

西洋人が理学に通ずることを思い，之を学んで西洋に劣らぬものになろうと云う考えは，多くの人々の間に動いて居た。

和算家の中でも，内田五観の如(ごと)きは和漢洋の知識を標榜し，その家塾を瑪得瑪弟加（マテマチカ）塾と称し，数学を詳証学（マテシス）と称するようなこともあったが，その他にも二三の洋字を見聞して，之を記号に使ったり，羅馬(ローマ)字の印章を用いた如(ごと)き算家もあった。天文暦術は支那西洋が勝れて居るけれども，数学の一科に至っては我日本が世界に冠たりと云うように考えるものもあった。この精神の如(ごと)きも決して西洋を卑しめようと云うものではない。外来の知識と雖(いえど)も，優秀なものは之を採用すべしと云う理想は自ずとそれに窺われる。

けれども和算は元来が非実用的の芸術気分に富んだもので有り，実世界の活用からは頗(すこぶ)る離れたものであった。之(これ)に反して西洋の科学に接触し，洋学に造詣の有るものは活動的の精神に富んで居た。之を利用して，彼れと角逐しようと云うような理想をも有する。その理想が有り，その精神が有る為めに，勢い活躍的となる。西洋の優秀な科学の力に依って威圧して来るのに対抗しようとしては，益々(ますます)外来知識の摂取に努力する。洋学の勢力は次第に伸長するのはその為めであり，今でもこれ等の洋学者に対する憧憬(しょうけい)が浅くないのは，その精神を敬重することに基づく。

自然の形勢は何(ど)うしても西洋の学術を学修採用して対抗の位置に立たなければならなくなって来る。その趨勢の間から「洋算用法」の如(ごと)き教科書も洋学家の手で作られる。

長崎の海軍伝習所や江戸の講武所などでも西洋の数学が教授される。之を知らないでは航海術の書も砲術書も読むことは出来ない。

維新後においては西洋の太陽暦を採用する。学校でも西洋の数学を教授する。和算家が俄(にわ)かに洋算を習って教授の任に就くものも出ると云う有様であった。

4. 和算家の中には高久守静のように，著しく洋算に対して反抗したものもあった。萩原禎助の如く自己の造詣を高しとして洋算家の遠く及ぶ所でないと誇ったものもあった。

けれども和算に餘り通じない人たちが，洋算を学んで教科書など作る人も多く輩出し，旧来の術語も算法も棄て去って，初めは漢訳の西洋数学書に依拠し，後には単独に西洋の書物のみを読破して之を訳述したり，飜案したりするような傾向が益々進む。和算の造詣深い人でも，その運動中に参加するものも珍らしくなかった。大村一秀，鏡光照，柳楢悦，岡本則録など云う人々は皆それであった。

これ等の人々が洋算に趨ったことから見ても大勢は既に卜すべきであろう。

和算だけに固着して時代と共に推移しない人々は，たとい和算の造詣は深いものがあったとしても，決して活社会に活躍する人物ではないのであった。

別して和算家は力学関係の問題に関して造詣に乏しく和算書中に誤った事を記したものが幾らもあった。これは和算家が洋学の知識に接触するの機会に乏しく，且つ独自に力学方面の事まで開拓すると云うまでの事情になって居なかった事を示すものであり，和算の著しい缺陥の一はこの点に認められる。而も数学の応用を必用とする軍事工芸等には力学的知識は全くその生命と謂うべく，何うしても之を度外に措くことが出来ない。

是に於て和算家で進んで洋算を採用した人々の中には好んで力学などの問題を論ずるものも輩出した。岡本則録の如きはその中の尤なるものである。

故にこの時代においても和算家の間に見るべき研究も間々有っ

たけれども，それも明治十年代の頃から凋落することとなる。

5. この時代に於ては和算の問題を洋算で解したことなども屢々試みられた。和算と洋算が併せ用いられて居る間に洋算の方には次第に慣れるし，和算に比して優れたところの有るのも認められる。

和算の中には微分，積分に相当する如き算法もあり，歴史の上からは甚だ価値に富むけれども，その現実の適用に当りては西洋の練磨されたものの簡捷に及ぶべくもないのであり，たとい和算の問題にしても之を冗漫な和算の方法で処理するよりも西洋風に取扱う方が便利であった。その事は多くの人々の痛感したところであったろう。

和算家の出身にして又和算に執着を有する所の柳楢悦並に岡本則録の如き有力者が，和算の極数術即ち極大極小の算法に就いて西洋より劣ると説いた如き事実を見てもその事情は明瞭に知り得られる。

和算の積分関係の問題にしても，洋風に簡単に解くものが多かったのを見ても亦同様の感がある。

この時代に於いては和算と西洋の数学は，歴史的回顧の価値など云うことには全く無関係に，その現実の理想的価値に於いて両々相対向し，優劣と便不便とを問われることとなった。

この比較に於いて，和算は，悲しむべし，西洋数学の便利に如かずと思い做されて棄て去られるのが当然の運命となった。外国への対抗上に，一般の学芸摂取の必要上から計りでなく，その絶対価値の上に於いても亦棄て去られるのが自然の勢であったろう。

特に和算と西洋数学との両様式を別々に学修し，別々に之を応用する如きは甚だ煩冗であること云うまでもなく，何うしても一方に統一するのが望ましいと云うよりも全く避けられない事であ

り，和算の旧来の様式に於いては新たに之を開拓するの必要もないのであるし，西洋の数学は諸般の学芸に関しても当然之を学修して豫備知識を具備しなければならないのであるから，茲に西洋数学のみ独り全盛の域に進むのは勢の免れない所であった。和算の歴史的価値が如何に優秀であり，如何に興味津々たるものが有ろうとも，その歴史の必要上に於ける歩みには如何ともすることは出来ないのであった。その推移に左まで多くの年所を須いずして，完全に西洋数学が採用されたのは，少しも之を非議すべき理由だにない。

この事情は歴史上に厳として存在した。けれども亦之れが為めに和算の歴史的価値を少しでも低下せしめてはならないし，決して低下すべきでもないのである。

6. 和算は之を支那清代の数学に比較するに，同じ支那の古算法からその系を引くので，両者に類似の業績も多いけれども，而も支那では明末以来西洋の暦算の学が伝えられて居るに反し，和算家は殆んど西洋の関係には多く接触せず，多くは独自の開発に属するように思われるのであるが，それにも拘らず和算の成績が遙かに清代の数学の上に卓立すると謂っても宜い。江戸時代と云う短い期間に限られ，孤立した一国としてあれだけの結果に達し得たのは，その歴史的の価値に於いて極めて貴重である。

和算と洋算との対立競争の時代が過ぎて，和洋は現実を離れて歴史的に回顧されることになると，最早，理想上の価値，若くは絶対価値に依って批判さるべきではなく，歴史的の価値のみが光明を放ち，その回顧は我等の進運を指導する力となる。

日本の数学史は明治十一年に遠藤利貞が和算の兎角洋算に圧倒されんとするを慨してその研究に着手してからその後次第に世の

注意に触れんとして来たのも数学に於ける国家民族の自覚が生れて来た賜ものである。

7. 支那では十九世紀中葉に再度の西洋数学の漢訳が企てられ一新されたかの観があったが，而(しか)もその後にも所謂(いわゆる)中算派も引続いて存在し，新訳の諸書すらも全く経典的に取扱われて，これから左(さ)まで新研究の生起すべき機運を開かず遂(つい)に清代は終焉(しゅうえん)に到り民国になった。

その以後には西洋数学の採用も進み数学専門の人も出るようになったが，同時に支那数学の歴史的研究が著しく進出して来た。これには支那の伝統的なる古典尊崇の精神も関する所が多いであろうが，而(しか)もその結果は自覚の喚起となり，数学そのものの進歩をも導き来るであろうことを望む。

江戸時代と清代に於ける数学に甚(はなは)だしき異同のある如く，現在に於いても支那と日本は必ずしも事情を同じくせぬ。

日本の数学を知らんと欲するものは，支那の数学にも注意し，その歴史の異同を察し，和算の廃滅とそれ以後の事情なども之を顧慮して，数学の教育に当り，又数学の研究開発に対しても有利に興味深くその歩武を運ぶの公道を打開かれる事を望んで止まないのである。

第二部

一　日本古代の数学

日本の古典中に於ける神代(かみよ)に関する記事中に，八百万(やおよろず)の神だとか，千五百万など云う数が屡々(しばしば)現われているのは著しいが，故遠藤利貞翁の「大日本数学史」には之を以て直ちに神代(かみよ)に行われたものとしている。けれども日本の神典は構成年代も問題であり，又支那思想を伝えたと思われるものも幾(いく)らもあり，この数え方の如(ごと)きも必ずしも神代(かみよ)から日本に存したと見る事は出来ない。恐らく支那から伝ったのであろう。

支那の文化伝来以前に於ける日本の数学が如何(いか)なるものであったかは，極めて不明であり，又文字の使用以前に属するので大なる進歩はなかったと見て差支(さしつか)えあるまい。けれども一から十までの数詞は他国語中にその例を見ざる特殊のものにして，その語根は音韻の変化で倍数を表わすようになっている。

仏教が伝わり又支那の制度を採用して我国の文化は著しく整頓したものになったのであるが，この時支那の暦法を遵用(じゅんよう)した事は人の能(よ)く知る所である。支那の数学も亦伝わる。大宝令に依れば，大学及び国学を立てて官吏を養成したもので，その大学では支那の算書を教科に用いたのであった。この諸算書中，我が国で後世まで伝えられたものは一つもない。支那では現存のものもある。隋唐の用書と略(ほ)ぼ同一であり随分高尚(こうしょう)なものであるが，全部学習されたかは，今之を知るに由もない。而(しか)も奈良朝時代に於ける戸籍などの整頓，税務などの立派に行われた事を見ると，可(か)なり数学の学習には意を留めたものらしい。奈良や京都の都城設計は支那の

都域に模したのであるが，街衢の命名法は彼れに倣ったものでなかった。広い田野に條里を立てて井然たるものにしたのも著しく，当時の遺跡と思われる道路の如きは，今の参謀本部実測図〔現・国土地理院地形図〕に照して見るのに，東西及び南北を通じての測量が随分精密であったと云う。当時，磁針はないので，天測に依ったものと見ねばならぬ。

奈良朝時代には計算に算木を用いた事は大宝令中に見えている。籌の字で之を記るす。平安朝から鎌倉時代の頃に掛けても算木で計算を行うた事は，種々の記事が残っている。算木と云うのは徳川時代の和算家の使用した名称であるが，つまり小さき竹片若くは木片を並べて数を表わし，計算を行うたのである。その用法は勿論支那から始まる。算木は和漢数学の発達上に極めて大切な役目を演じたものである。

奈良朝時代に行われた度量衡も全く支那の制を模したものでなく，又彼れにありては二百四十歩を一畝としたのに，我に於ては三百六十歩を一段としたのであった。奈良朝時代に於て数学は有利な状態に向いつつあったように思われるが，その後に至りては律令の制度が次第に行われざるに至ったと共に，数学の如きも長く発達の余地なく，徳川時代に至るまでは注意すべき進歩を示めさなかった。暦法に於て支那の宜明暦が用いられてから数十年を経る毎に改暦を行いて，月日の狂いを訂正しなければならぬものを，その儘に訂正もせず，八百餘年間も押し通して使用したと云う事実があり，つまり之を訂正改造するだけの数学上の能力の缺けた事を明瞭に言い表わすものと謂って宜かろう。平安朝の中期から鎌倉，室町時代の如きは斯の如き状態であったとはいえ，継子立の算法など遊戯として行われたらしく，数学に関する趣味に缺け

ていない事が知られよう。継子立とは実子と継子十五人ずつの中で誰を相続人に立てようかと云うので，輪形に並ばしめ，或る原則の下に数え抜きて，最後に遺れるものを採ろうと云うのである。この遊戯は平安朝時代から現われている。之に類似のものは西洋にも凡そ同時代から在るが，支那に在ったかは未だ見当らぬ。

二　算盤の伝来

算盤は徳川時代にも我が国に盛んに行われた。現今に於ても逓信省〔現・総務省〕貯金局や銀行会社等の会計は凡て算盤を使用している。世間では算盤は日本独特のものと考えるものもあり，算盤の算法を和算と云う人もあり，その書物に和算何々と命じたものもあり，算盤が日本人の日用生活上に深く喰い入っている事は勿論である。けれども算盤は日本の発明ではない。支那から伝えたのである。支那で何時代から行われたかは明瞭でないが，現今でも多く行われているのであり，明末の算書には現用のものと同形の図が出ているが，支那にはそれ以前の図もなく実物も存する事を知らぬ。然るに日本では前田侯爵家に前田利家が名護屋の陣中に携えた遺品があり，又伊勢には文安元年（一四四四）云々の裏書がある現品が伝えられている。形状は支邪のものに類し，梁上二珠であるのも支那のものに同じい。思うに支那では更に以前から行われ，日本へも早くから伝ったものに相違ない。支那の古いものは梁上一珠梁下四珠のものもあった。

支那の算盤は軸が長く，珠が鈍い楕円状であるが，日本のは軸が短かく，珠が稜ばったものになったのが異なる。日本人の動作に適当するように改造したのであろう。算盤の算法に於ても徳川時代の諸算書に見えたるものは，支那の算書中のものとは，餘程

改造されて軽便になっている。

山形在に梁上三珠の算盤（ソロバン）があるが，珠形などから見ると日本製であるらしい。この種のものは多く行われた形跡がない。

支那では算盤（ソロバン）の使用に依りて，多く数学上に貢献した事があるらしく思われないが，日本では算法の発達上に影響したことが餘程（よほど）著しい。

三　徳川時代に於ける数学の勃興

日本で数学が発達したのは徳川時代になってからの事であった。その初め毛利重能なるものあり，秀吉に仕えて明国に留学し，程大位の「算法統宗」を得て帰ったがこれから珠算を拡め，珠算に関する著書もあって，数学中興の祖となったと云われている。珠算が毛利から始まったものでない事は，前掲の伊勢の算盤（ソロバン）の存在に依って明らかである。明国留学の事も亦確実な史料がない。けれども朝鮮役の時に「宋楊輝算法」及び元の朱世傑の「算学啓蒙」の朝鮮版が伝来した事は，東京高師〔東京高等師範，東京教育大学をへて現・筑波大学〕所蔵の本に依って明らかである。この頃から日本の数学が開け始めた事も亦疑う事を要せぬ。

毛利の著書と思われるものは，元和八年（一六三二）の作がある。恐らくそれ以前の作もあったであろうが現存せぬ。同年の作は又佐渡に居った百川治兵衛の「諸勘分物」の第二巻が今も佐渡に在る。吉由光由の「塵劫記（じんこうき）」（寛永四年，一六二七，初版）が出たのはその後である。吉田は毛利の高弟であるが，百川の師伝は伝わらぬ。これ等は何（いず）れも教科書であって，深い数学を説いたものではないが，教授上に特殊の注意を払えるものなる事が認められる。算盤（ソロバン）の算法や，日用の計算法や，求積の事など，その主要

な事項である。継子立等の見えているのも面白い。

円周率は之れ等及び他の和算初期の諸書に皆三・一六を用いているが，これは十の平方根と云う事であり，之に相当するものは支那にもないではないが，多く用いられたものではない。恐らく日本では何等かの状況によって之を使用するようになったのであろう。

これ等初期の算書は支那の数学から学ぶところは多かったのであろうけれども，而も支那の算書の記載そのままに受け継いだものではなかった。

和算勃興の初期に於て支那の算書中最も影響を及ぼしたのは「算法統綜」と「算学啓蒙」とであるが，方程，盈朒，方陣，天元術等は皆これ等の支那算書から之を学んだ。方程は一次聯立方程式解法であり，盈朒は二つの仮定値を立てて之に基き真の答数を定める算法である。方陣は magic square である。円攅と称し，円周並に直径上に排列したものもある，天元術は支那の代数学にして，宋末元初に発達したものであるが，算木を並べて代数演算を施し，又得るところの方程式をも解いたのである。算木の算法であるのが，誠に留意すべきである。

和算家が天元術を学んだのは，全く「算学啓蒙」に依る。「算学啓蒙」には天元術は使用されているが，之に関して深く説明する所なく，全く師伝を待たずして単にこの書だけから天元術の算法を会得するのは容易ではなかった。随分苦心したらしい形迹も，ありありと認められる。完全に之を了解し得るまでには可なりの年所を閲した。けれども最後に了解し，又之を用いて自由に問題を解き得るようになった。確実にその地歩を成したのは澤口一之にして，その著「古今算法記」は寛文十年（一六七〇）の作である。

「古今算法記」の問題解法には注意すべき事がある。一つの問題を解いて得る所の答数は普通に一種に限るのであるが，稀には二種の答を得る事がある。つまり二次方程式の二根のある場合に遭遇したのである。今から考えると何でもない事であるけれども，この種の場合に就て未だ嘗て古来の論究があるでもなく，又之を適当に処理すべき何等の準備もない。一つの問題には一つの答が有るべきものと思いつめて居たものに，案外にも二つの答が出たのであるから，全く狼狽せざるを得なかったであろう，故に之を正当なものと認める事が出来ない。斯の如きは問題が正常でないのである、之を「飜狂」だと云って居る。アブノルマルと見たのである。病的の問題だとしたのである。従って問題中に見えたる諸数を変じて答が一種に限るように改め，然る後に之を解く事とした。飜狂には二種の答を得るもの以外のものも考えられているが，今はその詳述を避ける。

澤口一之のこの処理は勿論正当のものではないが，問題の飜狂と云う事を言ったのが動機となって，その後関孝和の手で方程式の吟味に関する研究が起り，一種の方程式論が成立するに至ったのである。

澤口一之が天元術を用いて諸問題を解いたのは，その前に他の算書にこれ等の問題を発表した人があったからである。算書中に問題を出して後進の解答を求める事は寛永十八年（一六四一）版の「塵劫記」新版から始まる。これ以後，諸算書中に之を解いたものあり，さらに又新に問題を提出するの風を成し，その風習は長く行われて百餘年の後に至った。澤口一之の書も亦その過程中の一書にして，彼の提出した所の問題は之を解いたもの二三家あり，中に就きて関孝和が最も顕われている。その事は後に説く。

礒村吉徳の「算法闕疑抄」（万治三年，一六六〇）も先輩の出した問題を解き，且つ新らしい問題を遺したものであった。礒村は代数的の処理を嫌い，成るべく算術的に解く事を求め，之を他力と自力に比している。又算術的の解をする事を和術と云った。かくの如き態度の適否如何は姑く措き，斯う云う精神が適当に働いて後年の成果を得るようになったものであろうとも思われる。

「闕疑抄」に見えたる諸問題には注意すべきものが多い。次の時代に於て関孝和の諸研究にはこれ等の問題から出発したろうかと思われるものも間々認められる。

図形に関する問題の処理には勾股弦の関係を巧みに応用したものであるが，この関係や他の諸定理の分解的証明は礒村の書中などに見えている。

円に関する算法並に正多角形の算法は，和算家がその初期から深く注意したもので，村松茂清の「算俎」には可なり精しい算法が出ている。これ等も関孝和に至って整頓したものが出来た。

和算初期の状態は大概今言うようなものであるが，この時代には算盤が普及した事，支那の代数学が了解された事，諸種の問題が出た事などが主であって，関孝和の出現に向って準備を整えた時代であったと謂って宜かろう。

四　関 孝 和

関孝和は通称新助，寛永十九年（一六四二）三月，上州藤岡に生れたと言われているが，一説には寛永十四年（一六三七）の産とも云いその出典が明らかでない，今のところ，不明と見て置きたい。ただその実家内山氏並に養家関氏が元と藤岡に関係のあった事は事実である。関，内山両氏共に幕臣にして，関は甲州公即ち

後の六代将軍に仕え，数学及び機巧に長じた為めに相当に尊敬されたらしい。寛永五年（一七〇八）十月廿四日に歿した。墓誌にも享年を記るして居らぬ。著述の算書は幾らも残って居るが，その経歴の委細並に人物性行の如何に就いて徴すべき史料が乏しい。

関孝和が数学史上に頭角を現わしたのは「発微算法」（延宝二年，一六七四）の刊行である。この書は澤口一之の「古今算法記」の十五問題に答えたもので，演段術と名づくる新算法を以て解いたのであった。勿論簡単に術文を記るしたのみではあるが，後に門人建部賢弘の名で「発微算法演段諺解」（貞享二年，一六八五）が刊行せられ，関の演段術は広く行わるるに至った。関孝和の演段術とは如何なるものぞ。今委細に之を解説する事は出来ないが，簡単に言えば，天元術を二重に施したようなものであった。天元術では所問の未知数を含むところの二つの式を立てて相減じ，因て一つの方程式を得るのが原則である。然るに「古今算法記」の問題の如く複雑なものになると，直ちにこの原則を適用して方程式を得る事がむずかしい。是に於て所問の未知数の外に他の補助数若しくは径数とも云うべきものを採りてこの両数を含める二つの方程式を作る。この両式から補助数を消去すれば，所問の一未知数に就ての一つの方程式が得られる。関孝和の演段術は実にこの算法の処理に関するものであった。演段術は支那の天元術から一歩を進めたものに外ならぬ。

けれども天元術と演段術との間には一つの重要な相違がある。天元術は算木を使用して方程式構成の演算を施すのが原則であるが，算木の布列によってこの演算を行うには未知数が唯一種の場合に限られ，他の諸数は凡て数値が与えられたものでなければならない。然るに演段術に於ては一未知数の外に一補助数を用いるので，

この両者を算木で布列する事は六ケ(むつか)しい。支那の四元術の如き方法を用うれば出来ない事はないが，和算家は四元術を知らなかったらしく，類似の算法は一も和算学の著書中に所見がない。従って演段術で二数を含める方程式を作るのは，算木に依頼したのでなく，筆算式に記載したものであった。筆算式記載の代数演算は支那数学中には見ざる所であり，明末清初の西洋数学の漢訳中にも見えて居(お)らぬ。演段術は天元術を二重に適用した如(ごと)き形式のものであったのが，注意すべきである許(ばか)りでなく，筆算式の代数学が新たに構成された事に意義がある。

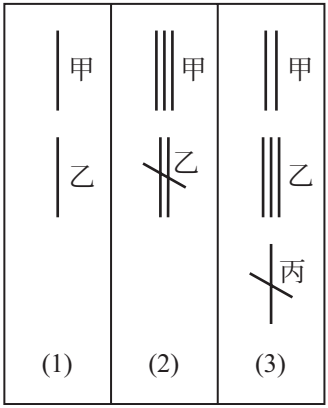
関孝和の演段術には各種の算法があるが，中に就(つ)きて最も注意すべきは西洋数学上の行列式に相当するものの成立った事である。この算法は「演段諺解(げんかい)」には使用されて居(お)らぬが，稿本「解伏題之法」(一六八三年重訂) 中に見える。西洋では関と同時代に出たLeibnizから始まり，同氏は之を公にせる事なく，之(これ)に関する研究の起きたのは十八世紀中葉以後であるが，関孝和の方法は一層整頓し，一層一般のものであったのが著しい。関孝和の行列式論に西洋の関係が有り得ぬ事に論はない。

この方法につき念の為めに今少しく改めて言って見よう。未知数 x と補助数 k とを含める二つの方程式を作り，この両式から k を消去して x のみの一方程式を作るのが演段術の一般形式であるが，その演段術の一方法として，両方程式から加減して適当な数だけの式を作り，方形になるように工夫したのが，即ち行列式である。この行列式の展開に就(つい)て関は述べて居るのである。展開には交式及び斜乗と云う二つの方法に依(よ)る誠に巧みなものであって，原則としては如何(いか)にも立派である。けれども不幸にして関孝和の取扱方には，交式にも斜乗にも間違いがある。四つの場合に区別

して論ずべきものを二つに区別したので誤ったのであった。交式に関する過誤は早く訂正されたが，斜乗に就ては凡そ百年後に至りても尚過誤のままで解説したものもあった。

関孝和と同時代に島田尚政門流，井開知辰作の「算法発揮」があって，別の仕方で行列式の展開を行うている。これには過誤はなく，又稿本ではなく刊本であった。行列式の算法を公刊したものは，恐らく之を以て世界の嚆矢とする。

行列式に就てはその後に至り久留島義太，菅野元健等があって展開方法に新工夫を凝らし，見るべきものがあった。



関孝和の演段術は筆算式の代数学であり，従って筆算式の代数紀法を要するのであるが，その紀法は支那の方程即ち一次聯立方程式解法や，又天元術の代数演算を筆記する方法，並に算木で数を表わす並べ方の記載等から来たものであり，ここに示めす所の三つの式は，(1) は甲と乙の和であり，(2) は三甲と二乙の差であり，又 2 甲 $+\,3$ 乙 $x -$ 丙 $x^2 = 0$ を表わすに (3) の形に依る。かくの如く算木を並べた形で数を記るすものを籌式と云い，文字を用うるところの代数紀法を傍書式と称した。之を関孝和の代数紀法とする。

関孝和は点竄術を創意したと云う事であるが，点竄の名称は後代の命名で，後には一般に代数演算若くは代数的な処理方法，又は解析方法と云うような意に用いられるようになった。点竄術とは日本の代数学と見て置けば宜い。

演段術と点竄術とはその異同の事など判然せず，又屢々混同され勝ちであるが，実は演段術は上述の如きものであるから，特殊の代数方法に開し，点竄の一部分を成すと見て宜かろう。

関孝和は方程式の吟味なども之を試み，問題が成立つ為めの條件をも明らかにし，極大極小に関する研究もこれから出発される事になったのである。所謂極数術と称するものも，この意味に於て関孝和から出たと謂って宜い。又方程式は一根のみに限るものでなく，二根又はそれ以上の根があっても宜い事をも見出した。即ち方程式は一般に次数と同数の根を有する筈であるが，その根には正根のみならず負根もあり，又その諸根は缺けている事もあるが，この場合には対を成して缺けるものである。例えば三次方程式には一般に三根があるが，場合によりてその二根が缺けて一根しかない時がある。二次方程式には二根があるが，場合によりては一根もない事がある。根のなき場合を無商と云う。和算家は根と云わずして商と云っているのである。

天元術で得るところの数字方程式を解くのは，一桁づつ求めるのであるが，関孝和は幾桁か求めた上は割算で省略計算を行うべき事を記るしている。

関孝和の角術も亦注意すべきものの一つであろう。角術とは正多角形に関する算法である。前から正多角形に就て多少の記載されたものがないではないが，纏まった一種の算法として成立ったものは関孝和からである。その算法は関の死後に「括要算法」の中に公にされている。辺数と一辺の長さを知りて，角中径及び平中径即ち外接半径と内接半径を求むるのがその問題にして，方程式の形で之を求めている。その諸方程式を整理し，その構成の法則を発見して一般の公式を作る事なども後には出来るようになった。

角術は日本の数学上では大切な分科の一つであり，之に関する文献は甚だ多い。円に内接する多角形の一辺だけ除き他は凡て相等しきものに就ても正多角形の場合と同様の研究が成立している。

方陣，円攅の布列法を説いたものも，関孝和の稿本は最も初期のものに属する。島田貞継の著書は刊本にして或は関の研究に先立ったのである。関と同時に田中吉真も亦研究があり，方陣に就てはこの人の研究が最も整うている。幾多の方陣の作られ得る事などもこの人は明瞭に述べている。田中は上方の算家，甚だ優れた人物であったと思われるが，その著述の現存するものが少ない。方陳に就てはそれ以後までも和算家の種々に工夫したものが甚だ多い。

関孝和の「算脱験符」も亦一は継子立の算法を説いたものであり，一は目付字の研究である。これ等や支那から伝ったと思われる剰一術などに基いて和算家の不定解析は発達を始めた。

幾何学的図形の問題は和算家の好んで攻究したものでその解法は多くは代数的に試みたけれども，又多少の証明なども行われないではなかった。関孝和は「解見題之法」，「求積」，「毬闕変形草」等の諸稿本の中にこの種の攻究を記るしている。その多くは求積に関するものであり螺線などに関するものもある。円弧を回転した立体の体積は弧積の重心が画いた円周の長さへ弧積を乗じたものとする。これ即ち希臘の Pappus 並に瑞西の Guldin の得た算法と等しい。和漢算法中にはその前代に絶えて類例を見ない。

円理の創意は関孝和の業績中最も重要なものと考えられているのであるが，これに就ては固より問題がある。普通に円理と称するものが果して関孝和の創意であったろうか，若くは関の存生中に成立していたであろうか，これは甚だ不明である。その算法の

明瞭に記されているのは，関の歿後に門下の人の書いたものの外にはない。この問題に就ては今多く議論を進める事をすまい。

けれども関孝和が円の算法に就て業績のあった事は何等の疑いなく，「括要算法」中の所謂弧術なるものは誠に手の掛った苦心の作である。初めに円周率を求めるに, 四角形を容れ，八角形となし，十六角形とし，次第に辺数を倍してその周の長さを算出し，その次々の諸値に一種の処理を施して修正を加え，依って円周の値を得る事とした。同じ方法は円弧の長さの算法にも役立つ。例えば円径一尺とし矢の長さ一寸，二寸，三寸，四寸，五寸としてその弧長を求める。そうして或る攻究を積みて矢と弧長とを含んだ式を作って矢の長さがこれ等の場合に相当するときは全体の式が消え盡きるようにならしめ，この式は矢の値の他の場合に就ても一般に成立つものと見る。その算法は随分難解であるけれども，決して不條理なものではない。こうして何次方程式かでその結果を得るのである。

類似の算法は「大成算経」にも記るされ，後代の算書中には幾らもその記述を見る。類似の公式が建部賢弘著「研幾算法」（一六八五）中にも見えているから，その頃には既に成立していた事も明らかである。これ等算法は支那の招差法をその儘に適用したものではないけれども，招差法の変形的応用と謂っても宜かろうかと思う。而も尋常一様の苦心で出来たものではないであろう。招差法は支那で出来たのであるが，関孝和は之を一般の形式に記載し盛んに応用している。之に関し有限級数の總和等に関して有益な研究がある。

五　関孝和と同時代及びその門下

関孝和の業績に就ては前章既に之を略述した。関孝和は和算の勃興に向える機運を受けて之を大成したのは云うまでもないが，和算は関孝和の手で整頓せられ，之に依って後来の発達を規定した如き有様となった。世に算聖と称せられ，関夫子と呼ばれ，数学と云えば直ちに関流の独占であるかの観を呈するに至ったのも，故ありと謂うべしである。関孝和は一人の力，何うして能くあれだけの大業績を立て得たであろうか。これ等は従来屢々問題とされて居る。然るに関孝和の生涯には甚だ疑問視さるべき事がある。即ち関は成る時，奈良の某寺に何人にも不可解の唐書ありと聞き，定めて算書ならんと思い奈良に急行して写し取り，江戸に帰って三年の間，苦心勉学してから、その学力は大に増進したと云う話がある。この話は関の歿後三十年許りの頃に作られた書物に見え，甚だ有名なものである。又一説には自分の使った種本を焼き棄てたと云う事も見える。恐らく関が何等かの種本を見た事に疑いはあるまい。関が壮年の頃に「宋楊輝算法」を得た事は，関の奥書を記るした写本の写しが残って居るので知られる。或は「算学啓蒙」を見たと云い，或は元の李治の「測円海鏡」など見たものと考える人もある。劉宋の祖沖之の「綴術」がその種本ではなかったろうかと疑うものもある。勿論充分の攻究を要するであろう。

然るに関孝和の著述を検するに，その年紀あるものは刊行の「発微算法」と一の暦書を除くの外は凡て延宝八年（一六八〇）から貞享二年（一六八五）まで足掛六年間の重訂に係る。年紀の知られざるものも，凡てこの年代の頃には成立していた事の立証され得るものがある。関孝和の数学はこの年代の頃に全部出来上って，それ以後の二十餘年間は殆んど全く為す所はなかったと見て宜い。この事情により前述の疑問は益々高まらざるを得ぬ。

又一方には関孝和が筆算式の代数学を創(はじ)める為めに，西洋の代数学から学ぶところがあったのではないかとの疑いもある。関孝和と同時代に和蘭(オランダ)で数学を学んだ日本人があり，この人は医学をも修めたと云う事であるし，又当時外国から帰った医者に鳩野宗巴があるので，関孝和はこの方面の影響もありはしなかったかとの疑いが高まる。

けれども鳩野宗巴が数学に関係の有った形述なく，和蘭(オランダ)で学んだ人が鳩野と同一人ではないようであり，又帰来したらしくもなく，恐らく混血児か何かで日本人と称したものであったろうから，左まで疑いの眼で白眼視する必要はないであろう。

関孝和の代数学は支那系統のものであり，西洋の関係を認めるに足るべき理由に乏しい。明末清初に漢訳された西洋の暦算書は凡(すべ)て禁書の中に入れられ，関孝和が之を参照したろうとも思われないが，若(も)し参照したにしても関の説いた如(ごと)き代数学を記(し)るしたものはない。関が若(も)し有力な種本を有したとすれば何(ど)うしても支那の古い算書であったろう。

関孝和の頭角を顕わした直前の時代に於て，和算の発達が着々としてその準備を整えて居た事は前に述べた。関孝和は決して偶然に出たのではない。関孝和と同時代の人にも，従前は餘(あま)り有力な人物はなく，関だけが群を抜いて優れた人であったように思われたのであるが，如何(いか)にも群を抜いた人ではあったろう。而(しか)も当時の諸算家の業績を研究するに，随分優れた人が幾人かあったように思われる。これ等の人々の著述は刊行のもののみ残り稿本類は一二のものを除く外は伝って居(お)らぬので，当時の造詣につきその真相を捉える事は出来ないけれども，現存の史料から判断しても関の著述に見る如(ごと)き事項を説いた算書が往々に存したのであっ

た。方陣に就ては関の前に会津藩の島田貞継があり，同時代に田中吉真は一層進んだ解説をしている。行列式に就ても大阪の島田尚政又はその門下が関の生存中関の説いたのとは別の方法を述べて之を刊行した。他にも類似の事を説いた人がある。その書中に説くところの代数紀法は関の使用したものとは同じでない。後に大阪の宅間流及び金沢の三池流などで用いた紀法はその系統に属する。田中吉真の如きは代数演に就ても随分盛んにやっているし，連分数の事なども立派に使っている。円の算法に就ても関と同時代の頃に種々の研究があったらしく，円周率一一三分の三五五とするのは，普通に関から始まる如く見られているが，実はその前に問題中に之を記るした人があったのである。関孝和と同時代の諸算書に見るところの術理は関から伝ったものも無いではなかろうが，必ずしも全部関孝和の伝統を引いたものと見做し得べきやは問題であろう。寧ろ関孝和ほどの人物が出現しても宜いような機運が動いていたので，関孝和はあれだけの業績を挙げる事も出来たのであるし，他にも立派な人物が幾らも輩出したのだと見るのが至当であろう。ただ問題になるのは「綴術」の関係が何うかと云う事である。この問題に就ては支那数学の場合に譲る。

関孝和と同時代には有力な人物が中々にあったけれども，関に比して非常に違った事が一つあった。即ち関の門下からは有力な人物が多く輩出し，爾後連綿としてその学統を継ぎ，関流と云えば唯一の優秀な算学派であり関流以外には幾多の流派はあっても，有れども無きが如く，殆んど振わなかったに反して，関流は隆々として昌え以て幕末までも及んだのである。これ一には関の学力と云いその造詣と云い他に較べで優れていた事にも因ろうが，又後継者に多く有力家を得た事にも因ろう。関自身も幕臣であり，幕臣

や江戸在勤の諸藩士中の有力家が多くその門流から出た事も亦大いに関係があったであろう。関孝和の稿本著述類が比較的に多く世に伝っているのは，その流派が盛んであったからであろう。他の諸派は勢力微弱であったから，自然に諸算書も伝わり得なかったとも見られよう。

関流以外で有力な流派は，関当時の算家の伝統を引くものとしては中西流及び宮城流があり，共に随分拡まりはしたが，有力な人物の輩出した事はなかった。その流祖は江戸の中西正好及び京都の宮城清行である。

稍(や)や後れて発達したものには大阪の宅間流があり，大阪では勢力があったけれども，知名の大家(たいか)に乏しく，又業績の見るべきものも多くない。後の天文学者高橋至時が初めこの派に就(つい)て算学を学んだ人である事などは著しい。金沢の三池流は初め大阪から伝ったのであり，可なり有力者もあったらしいが，金沢にのみ限局せられ，大なる発展を遂げる事が出来なかった。福岡の星野流，紀州の小川流など云うのも同様であった。

関孝和の門人中には人物の多かった中に荒木村英及び建部賢弘の二人が傑出した。関の遺稿「括要算法」の刊行されたのは荒木の手から出ている。荒木の著述は多く伝って居(お)らぬが，その門人に松永良弼があり，著述も多く，関流の教授系統はこの人の手で餘程(よほど)整頓した。

建部賢弘は幕臣にして，その兄二人と共に関孝和の門に入り，早くからその能力を認められたらしい。「研幾算法」，「発微算法演段諺解(げんかい)」はこの人の名で刊行された。関孝和の諸研究を取纏(まと)め且(か)つ若干(じゃっかん)の事項をも添加して作ったらしい所の「大成算経」二十巻は従来主として賢弘の作であろうと云われていたが，関と賢弘並び

にその兄賢明の三人で編纂に着手し，二十年を要して遂に賢明の手で纏めたものであるとは建部氏に伝った記録に見える。宝暦中に成ったものであると云う。関氏の数学は大概具われりと謂って宜かろう。普通に円理と云うもののみ見えて居らぬのは，或は実際未だ成立していなかったからとも見られよう。これには議論もあるのである。建部賢弘は後に「不休綴術」などの著述がある。

賢弘の門人に中根元圭があり，甚だ多通の士であった。その子に彦循あり，彦循の門人に村井中漸があって世々京都に居りて覇を称したが，江戸の数学と対抗し得るに至らなかった。

中根元圭の提撕に依って頭角を顕わしたものに久留島義太がある。極めて無頓着な人物であって，別にこれと云う師伝はないが，中根の保護の下にその学力は頗る増進し貢献するところが甚だ多かったらしい。松永良弼と共に岩城平侯（後に日向延岡侯）内藤氏に抱えられ，侯の為めに数学を講じた。松永は当時の錚々たる大家であるが，久留島をば先輩として一歩を譲っていたらしく見える。松永の著述中には久留島の手に成ったものも記るされているであろう。

中根，久留島，松永三氏の教を受けて関流中最も勢力を得たのが山路主住であり，山路の門下からは安島直円，藤田貞資，戸板保佑等が出た。戸板は独創の能力に富んだ大学者ではないが，仙台藩の為めに関流の諸算書を伝えられて之を整理し，注解を加えなどして今に伝っているのが，著しい功績である。藤田は「精要算法」の著述を以て著われた。安島直円に至りては幾多の新らしい研究があり，更に後の時代の発展に向って資するところがあった。

安島直円の門に日下誠，坂部広胖等があり，日下の門からは幾多の人物が輩出し，文化文政以後の盛況を呈するに至った。この時

代の有力者は殆ん(ほと)ど日下門下の人に限られたと謂(い)っても宜(よろし)い。和田寧の如(ごと)き傑出した人物もあった。これ等後代の事跡は後に説くけれども，関流が如何(いか)に盛んなものであったかは，これ等の伝統を見ても思い半ばに過ぎるであろう。

六　関孝和直後の時代，円理の発達

関流の伝統を受けた諸大家中最も優れた人物の継承に就(つい)ては，前章に之を説いたが，その業績の事も亦之を説く事を要する。微細の点まで之を記す事はこの短篇の能(よ)くする所でないから，最も大切な事項のみに記述を限る。その中に就(つ)きて第一に注意すべきは勿論(もちろん)円理であろう。

関孝和が招差法の変形らしき算法に依りて，円弧を表わす方程式若(もし)くは公式を作った事は前に之を述べた，同種の公式は関の門下などの著述中にも幾(いく)らも散見する。更に多少形式を変更したものも見えている。この種の事項に就(つい)て記(し)るしたものに建部賢弘の「不休綴術」（享保七年，一七二二）がある。他にも之を記(し)るしたものはあるが，この書は特に注意を要する。「綴術」の名称は「隋書」の記事によって，祖沖之の「綴術」から取ったものなる事，序文中に見える。思うに建部はこの書に於て単にその算法を説いただけではなく，数学研究の方法を説いたもので，一種の数学方法論（メソドロジー）の書なりと見る事が出来よう。この意味に於て甚(はなは)だ重要なりと考える。即ち帰納的に着々と推究して術理を探会しようと云うのである。建部は特に「探会」の語を用いている。勿論(もちろん)，不完全帰納法であるけれども，之(これ)に依って数学特に代数的処理に関する大体の研究態度を決しようと企てたものらしい。不完全帰納の方法は和算家の好んで用うる所であった。建部は和算の

方法を理想的に明記した人であったと謂ってもよろしいであろう。その算法の一つとして前記の円に関する算法も記るされている。

大阪の宅間流では円に関して内外接形を用い，辺数の極めて大なる場合まで算定して円周率を求めているが，関流の諸算家が好んで用いた如き修正方法を知らなかったものか，餘り精密な結果は得られなかった。更に円弧を表わす公式をも作っているが，その算法は招差法に依ったもので，その結果は無限級数となる。後年，間重富が円理の算法を立てたものは，複雑な形式にはなったけれど，宅間流の円理の算法から脱化したものと思われる。

建部賢弘は円理に就いて別に注意すべき著述があった。「円理弧背術」又は「円理綴術」と題するもので，普通に円理と称するのは即ちこの書記載の算法を云う。簡単に云えば，円内に正方形を容れ，次に八辺形，十六辺形とする事は前に述べた算法と同じであるが，数字上の諸値を求むる事なく，その一辺の長さを表わす二次方程式を用いて之を展開し，無限級数の形で表わす。次にこの結果を用いて更に展開を行い，次々の級数若干を得た上でその係数を考察して一般公式を帰納し，之に辺数を乗じ，辺数を無限にしたときの極限を求めると云う仕方である。中途で不完全帰納の処理はするけれども，固より純然たる解析方法である。

建部の書は著作年代が不明であるが，淡山尚絅著「円理発揮」(一七二七）によれば，この方法は建部の発明だと云う事になっている。然るに建部の書に本多利明が記入したところに依れば，関の遺稿に基いたと云うのであるが，本多の所説には疑うべき所がある。けれども関流で最も大切にしたと云う「乾坤之巻」なるものは，矢張り同種の算法を記るしたものであり，その作者も年代も不明ではあるけれども，「弧背詳解」の序文には乾坤の巻が関孝和の手

で成ったもののように之を記るす。而も「乾坤之巻」は果して一種に限られた時代に依って内容を異にしたものがあったと認むべきではないか，又何時代からあったかなど云う問題は，極めて複雑にして，私は今俄かにその真相を明らかにし難きを思う。私は普通に云う円理の創意は関であるか，建部であるかを判断断定する事を避け，問題として遺して置く。要するに確実に関孝和の著述と認め得べきものに何等の記載なく，建部等の手で記るされたものから確実に知られているのである，

円理に就て大切な書物に松永良弼著「方円算経」（元文四年，一七三九）がある。この書には算法の説明は見えて居らぬが，円に関する数種の無限級数展開の結果が示されている。又円周率五十位まで挙げている。是より先き建部賢弘の「不休綴術」に挙げたものは四十二位であった。「方円算経」には更に角術に関する無限展開式が見える。如何なる解析方法に依って得たものであるかは記るされて居らぬが，思うに円理を応用して得たものに相違ないであろう。後の時代に属する算書記載の算法も同様である。この級数展開は二重級数である。二重級数で表わした公式は之を以て嚆矢とするが，二重級数乃至三重，四重の級数は和算末期に至るまで盛んに応用されたのである。「方円算経」所載の角術の一公式と同じものにつき，後年に至りて之を久留島義太の創意なりと記るしたものがあるが，或は事実であろう。久留島は松永と共に内藤延岡侯に仕えた同僚であるが，松永は久留島の推挙に依って抱えられたのであり，松永の著述中には久留島の算法を伝えたものも多く，又久留島先生云々と記るしたものもある。「方円算経」記載の諸級数は何人の創意であるかも示めされて居らぬが、久留島の手に成ったものは必ず有るであろう。久留島は自己苦心の研究

を記(し)るした草稿で旅行の際に行李を張ったと云うくらいに無頓着な男であるから，取纏(とりまと)めた著述の現存するものは少ないが，蓋(けだ)し数学界にも稀に見る鬼才であった事は否まれぬ。

久留島義太の円理に関する著述に「久氏弧背草」なる一写本がある。この書中には円理に関する極数術が見える。極数術は関孝和の方程式論の記載から来るのであるが，極大極小の問題として諸種の図形などに関して論ぜられたものは，久留島，松永等の手で発達した。「久氏弧背草」に記するところは，円理に関する極数術であり，その論究は注意に値する。中に級数の反転法も現われている。円理極数術は普通は後年に至りて和田寧及びその同時代の頃から創意されたかの如(ごと)く見られていたようであるが，実は久留島も之(これ)に就(つい)て工夫した所があったのである。

松永の著述中に角術に関する無限級数で表わした公式の見えたる事は前に述べたが，久留島及び松永乃至(ないし)同時代の諸学者の手で角術が一般に甚(はなは)だ開拓された事も亦認められる。関孝和の角術に於ては三角形から二十角形までに就(つい)て別々に方程式を求むるものであったが，是に至りてはその諸方程式を分類整理して一般の公式を立するに至った。諸角蹈轍術と称する如(ごと)きはそれである。中根元圭及びその派の人々もこの種のものに関する記載があり，久留島義太の研究もあったようで，果して何人から始まるかは明瞭でないが、その結果の見るべきものであった事は，明らかである。角術に於ては次の時代に至りても多くの研究があり，和算上には多くの文献がある。

諸方程式若(もし)くは諸公式を分類整理して一般の公式乃至(ないし)方程式を作成する事は，角術に於て行われただけではない。この種の算法は和算家の好んで使用したものであって，廉術又は逐索術など云

うのは皆それである。有限級数の総和を求める為めには招差法を適用するが，その結果に就て今云う如き考究を施し，一般の公式を求める事もある。行列式の展開方法にもこの種の考究を加える。円内に幾多の円が環容された問題の如きにも矢張り同様の算法が試みられる。その応用は随分数学上諸般の事に亘るのであって，和算の発達上には極めて大切な要素を成したのである。之が応用は諸問題によって一時に始まったと云うのではなく，次第に成立する事となったのであるが，松永，久留島等の時代に餘程整頓したと見て宜いであろう。久留島は逐索術の創意者なりと云われるのも充分に明らかではないが，或る意味では，又或る種の方面に関しては恐らく事実であったろう。廉術と云う名称は古く，逐索術と云うのは稍や後れて使われた術語である。稍や似たものではあるが，その用語の適用にも自ら異同がある。今，これ等に就て深く論ずる事は之を避ける。

有限級数の総和に関する算法を垜術と称し，関孝和から始まるのであるが，松永良弼等の著書中に甚だ見るべき結果を得たものがある。この種の算法に就てはその後に至りでも和算家の頗る重んじたもので，その文献も亦少なくない。垜術は円理の研究に関係が少なくなかった。垜術の発達にはその関係が少なからず影響したのであろう。

久留島義太が行列式に就て創意のあった事は前にも述べたが，その創意は「算法発揮」の展開方法を押し拡めたようなものである。その記述は極めて簡単で又甚だ不明瞭であるが，具さに験す事によって了解し得られる。後年菅野元健も亦同様の算法を得て明瞭に之を説述した。菅野は更に関孝和が四つの場合に区別して考うべきものを単に二つに区別しただけで誤っていたものを指摘し，四

つの場合に区別して訂正した。菅野の著書は寛政年中に属する。之に先だち有馬頼徸の如きは，行列式に就て精細に記述したものがあるが，関孝和の誤りを其儘に伝えている。思うに其算法の如きは理論として之を尊重したけれども，多く実地に適用する事をしなかった為めに重大な過誤があるにも拘らず，之に注意する事なく幾多の年所を閲したものであろうかと思われる。行列式に関する和算家の研究は蓋し菅野元健を最後として，其後には創意の見るべきものなく，又多く説くものも出なかったようである。

関孝和は方程式論を創めたのが著しいが，其以後に至りて方程式の近似解法に就て幾多の算法が現われるようになった。関も亦此種の方面に於て算法を立てているけれども，多く行われるようになったのは，中根彦循の「開方盈朒術」が出てからであったろう。此書は将軍吉宗が中根元圭へ暦術の問題を下したのを，中根は老年の為めに其子彦循をして解かしめ，其解法として此近似解法を得たのである。盈朒術は支那で古来行われたものであるが，之を方程式に一般に適用し得られるようにしたのである。つまり逐次近似法である。

松永良弼の統術総括と称するものも亦類似の算法である。後には会田安明の「重乗算顆術」があり，坂部広胖の「立方盈朒術」及び「開式新法」等も皆方程式の近似解法に関する盈朒趁術と称するものの如きも亦同一部類に属する。此種の算法に於て和算は其文献に富むものであるが，要するに算木で方程式を解くのは，理論に於ては優れたものであるに拘らず，随分厄介で時間を要する事も多いので，出来るならば計算に簡便な算盤で出来るようにしたいというのが理想であって，其理想を実現する為めに右のような諸種の算法が発達したと見ても宜いであろう。和算書中その理

想を述べたものも幾らもあり「重乗算顆術」と云う書名若くは術名の如きも亦明瞭にその理想を語る。支那の算法に於てこの種の理想の記載されたものには未だ見当らぬ。和算発達の一つの特色はこの点に存した。

零約術即ち連分数に関する算法の発達した事や，幾何学的図形に関する算法が幾らも見えている事や，整数術即ち不定解析に関する諸種の問題の出た事，方陣及び円攅に関する研究の進んだ事なども此時代に関して注意すべきである。これ等に就ても論究したいけれども，冗長に流れる恐れあるを以て姑く之を省く。

七　安島直円と其時代

今，建部賢弘，久留島義太、松永良弼等の出た時代の事を述べたのであるが，之に継いで出たのが山路主住及び其門下の人達である。山路は天文方であって，宝暦の改暦に与った人であるが，星学よりも寧ろ数学に長じた人であったろう。けれども餘り独創的の研究ある人物ではなかった。而もその門下に藤田貞資及び安島直円の如き有力家があって，日本の数学は更に一段の進境を開くに至った。山路は中根，久留島，松永三人から悉く秘伝を授けられたと云う事で，之を後進に伝えて且つ新らしい開拓の餘地を作らしめた点に大きな功績があった。勿論彼の業績に属するものも存するのである。建部，中根，松永，久留島等の時代は西暦で言えば十八世紀前半に属し，山路乃至その門下の有力家の時代はその後半期に属する。厳密に言えば，久留島義太は宝暦七年（一七五七）に歿しているから，後半にも及んでいるけれども，大体に於て右のように見でも宜いであろう。

建部，久留島，松永の時代に於ては前時代の風習を受けて，前に

出た算書中の問題に解答し，新らしい問題を世に問う事が盛んに行われていた。その問題中には立派なものも多く，之に依りて数学界の風尚を左右する程の勢もあった。不思議にも建部，中根，久留島等，当時第一流の諸大家は一もその問題承継の算書刊行に関係がない。建部は少壮時代に「研幾算法」を出して問題の答術を公にしてはいるが，前章記載の年代に入りては更に関係を見ぬ。故に当時の我が数学界の最高層はこの風習に超然としていたと言って宜いであろう。而も第二流以下の群小数学者に至りては，之が為めに動かさるる事が多かったように思われる。

然るに本章の主題たる時代になると問題承継の風習は頓に衰え，中絶するに至った。そうして数学の良教科書が出て風靡するようになった。之と同時に諸寺社に数学の問題並に答術を記るして奉掲する風が流行を来たした。算額奉掲の事は勿論寛文頃から行われたらしく，現に元禄年間のものが京都祇園社に現存しているが，併し未だ多く行われた形迹に乏しく，その盛行は明和，安永，天明の頃以後の事であったらしい。この頃のものになると写しの存するものも間々あり，「神壁算法」及び同続篇等もあって，多く之を伝えている。遺題承継が廃れて良教科書が世に出で，又算額奉納の盛んに行われるようになったのは，何うしても一つの大きな変遷を語る。数学はこの頃に於て餘程整頓され，又次第に普及するに至った事も亦見遁してはならない。

有馬頼徸が「拾璣算法」（一七六七）の刊行はこの風潮の一つの現われを見るべきであろう。有馬頼徸は筑後久留米の城主にして数学を善くし，山路主住に就て関流を伝えられ，その著述に属する算書も少なからず，中には印章の据った稿本の存するものもある。独創の研究に長じた人ではないが，当時の数学に就て繁簡と

なく悉く通ずるところがあった。そうして遂に「拾璣算法」を著わし，関流の数学の大体を世に伝えた。名義は久留米の侍臣の名になっているが，実在の人物ではなかったらしく藩侯の作である事は之を疑うものもない。当時関流では秘伝が八かましく，別して山路あたりが最も秘密を厳にしたかとも思われるのであるが，厳然たる諸算にして敢為の気象に富んだ人であったから，敢てこの書を公刊する事も出来たのであろう。数学を普及する上に大きな功績を残したものである事，言うまでもない。

「拾璣算法」に続いて「精要算法」が編纂され，刊行された事も亦注意すべきである。この書は藤田貞資の作で算法は説明してないけれども，順序よく諸問題を排列したもので，教授の演習用として和算を修める程の人で之を学ばぬものはないと云う勢であった。従来は複雑な問題が多く行われ，之を解くには無益の労力を要する事も多かったのであるが，この書の如きは一切かくの如きものを避け，多くは簡単にして効の多いものを選んだのである。故にこの書一出して数学の設問はその風を一変したとさえ言われている。「精要算法」は一の教科書であるけれども，後の数学学習乃至発達の上に好影響を及ぼした功績の一通りでなかった事が思われる。

藤田貞資は山路主住の高弟にして，久留米侯に仕え，著述多く，独創の見にも乏しくない。その子藤田嘉言も亦数学を善くしたが，父に及ぶべくもなかった。藤田の門下には諸寺社に算額を奉納したものも甚だ多く，正続「神壁算法」は之を集めて刊行したものである。「精要算法」の如き良教科書の作者であり，又教授の事にも意を用いた人であり，門人も相当に多かったのであるが，何うしたものかその門中から独創的能力に富んだ人物は出て居らぬ。

有馬，藤田の二氏は君臣相続ぎて良教科書を作ったが，之と同

時に関流諸算書を整頓したのが，同じく山路主住門下の戸板保佑であった。彼れは仙台の藩士，初め中西流を学びて，中西流の諸算書を整頓したと云う事であり後に藩から派遣されて山路に師事し，関流の諸算書を悉皆伝授せられて之を整頓したのである。その諸算書は仙台伊達伯爵家に伝わり，現に東北帝大に保管されている。関流の諸算書が斯く纏って伝ったものは，他に全く之を見ざるのみならず，他に伝わらざるものも存している。戸板保佑が之を伝えた功も亦大なりである。この諸書中には戸板が注解したものも多い。戸板に又「関流数学綱領伝」を作り，関流の諸算法に就きて解説している。数学史研究の上にも参照の価値がある。

この諸算書の整頓は勿論戸板保佑が始めて着手したのではなく，松永，山路等も亦之を試みたのであろうが，戸板の手で纏ったものが今に伝えられ，又最も整頓したのであった。

かくの如く一方には諸算書の整理が行われ，又一方には良教科書の作製となった。事業は異なるけれども，恐らくは同一の機運が二様に動いた現われであったろう。

藤田貞資作の教科書が複雑な問題を避けて簡単なものを選んだ事は前に述べた。簡単を尚とぶ精神は固よりこの時始めて澎湃として起きたのではない。算木の複雑な計算を避けて成るべく算盤で簡便に算法を行いたいと云う理想は永く和算家の精神を支配したものであった、個々の公式からして帰納探索して一般の公式を作ろうと云う苦心も，概括的の理法を尋ねたものに外ならない。その苦心は相当に報いられている。関孝和が「古今算法記」の問題を解いたものには千何百次と云う高次の方程式の表わされたものもあり，中には何千次と云う方程式を得たと云う例もあって，かくの如き高次の方程式となるべき問題は甚だ高尚なものであるかの

如(ごと)く考えられたようであるが，同じ問題でも成るべく低次の方程式で解き得る事を望むようになった。そうして甲某は何次の式で解いたが，乙某は之を何次の式に低下し，自分は更に何次の方程式でその解を得たというような主張も往々に之を見る。こうなると，問題も自然に単純にして趣味あるものを喜ぶようになる。中根彦循の「竿頭算法」などを見ても解法の単純化されているのが著しく眼に着くし，久留島義太などの遺稿の遺れるものに複雑な問題は見当らぬ。故に問題並に算法の単純化は早くから徐々に進んだものであり，極めて自然の発達をしたのであるから「精要算法」が出たので突然大変動を生じたと見る事は出来ない。けれどもこの書に依りて単純化の理想が確実な基礎を与えられ，数学社会一般の風を生じた事は認めなければならぬ，数学界の風潮が変遷した上の一大目標となったのである。

藤田貞資の後に於て会田安明の如(ごと)きは簡単を求める事の切なるが為めに，その極遂(つい)に術文の字数の多少をすら問題とするに至った。術文に言表わした算法の繁閑と字数の多少とは必ずしも一致しないのであるから，この議論の如(ごと)きは恐らく過ぎたるは及ばざるが如しとの謗(そしり)を免れないであろうけれども，而(しか)も簡単化の精神が如何(いか)に旺盛であったかを語る所以(ゆえん)であり，単に無意義の事であったとして評し去るべきではないのである。会田，藤田の二人は大なる衝突を惹起(じゃっき)し長く争うたのであるが，その事は後に説く。

安永天明の頃に於ける我が国の数学界はかくの如(ごと)き状態であったが，この時に当りて多く社会の表面に出ず，静かに数学の研究に当った一偉人があった。彼れは藤田と同門であり，又親しい間柄であるけれども，遂(つい)に会田との論争には更に関与する所もなかった。彼れは存命中には多く名声を博したものでもない。けれども

彼れの学力は遠く時流を抜き，独創の創意多く，前代以来の発達を受けて之を要約したとも云うべき諸般の算法を立て，更に次代の進歩に向って進むの準備を整えたのであった。徳川時代二百五十年間の我が国の数学発達上に於て関孝和が一つの焦点を成すに対し，彼れ亦他の焦点を成したと謂ってもよろしい。彼れの名は安島直円，羽州新庄の江戸詰藩士であった。藤田貞資の「精要算法」もこの人の助力が多かったと思われる。

安島直円の業績中最も注意すべきものは，円理の改良である。この算法を記るした稿本は年紀を缺くが，未だ円理の伝授を受けざるに先立て之を創発し，その師山路主住に示めし，主住も甚だ驚いたと云う事である，山路は安永元年（一七七二）に歿しているから，勿論それ以前の事である。安島直円の円理が建部賢弘の著書や「乾坤之巻」などに記るされたる円理に比して異なるところは，弧内に二等弦を容れ次第にその弦数を倍する方法は棄て，弧に対する弦を若干等分しその等分の数を無限とした場合の極限を求めた事である。弧を等分する事の代りに弦を等分する事は，建部賢弘も之を企てた事あり，その著「不休綴術」中に言及しているが，未だ適当に之を処理する見当が附かなかった為めに，成功し得なかったのであった。故に安島はその思い付きに於て独歩であったと云う事は出来ない。けれどもその考えの上に適当の処理を行う事が出来て，是れから円理は著しく簡単になった。安島の円理は西洋の定積分の算法に於て，変数の微分を總て等しと置いた格段の場合に相当すと謂って宜いであろう。

安島直円が円弧の代りに弦を等分する算法を立てた事に就ては，球の算法並に螺線の算法も関係があったと見なければならぬ。球の全体若くは之を一平面で截った一部分の立積を求めるには，そ

の底に平行に若干等分し，各一片を円壔形と見てその總和を求め，等分数を無限として極限を求める事は和算発達の初期から行わるる所であった。初めは数字的の計算のみに依り，次に数字的の計算の結果に円の算法に於けると同じように修正方法を施す事が試みられ，更に進みては截口の面積従て一截片積を截片の番号数の函数として表わす公式を求め，總和の公式を作り，片数を無限にした時の極限を作るのであって，解析的に演算が行われる事になった。この原則に依れる数字的の算法は関孝和以前から行われたものであり，修正の算法は関孝和が之を行い，解析的求積法は山路主住なども説いているが，関孝和の著と云う一写本にも亦見えている。関孝和若くはその直後の頃から行われたのであろう。この算法が定積分の各段の場合に相当する事は，安島直円改良の円理も同じである。安島はその円理の創意に就て球の算法から恐ろしく有力な暗示を得ていようかと思われる。

又螺線の事も関係があろう。和算家の問題とした螺線は所謂アルキメデスの螺旋であるが，関孝和より以前の算書中にその問題は既に現われたのであり，関孝和の著書中にもその論究があり，後にも亦解析方法を立てたものがある。安島直円も亦之を研究した。螺線の研究に於ては之を成生する円弧を等分してその分点へ各々半径を引き，又その半径をも同数に等分してその分点を通じて円弧を画き，次々の半径と円弧との交叉点を次々に結んだものの，等分点が無限になった時の極限を背即ち螺線とするものであって，この成生方法から直ちに解析方法に依りて螺線の弧長なり，若くは弧積なりを求めるのである。螺線に就ては弧の弦を平行直線によりて等分すると云う方法をば採らぬけれども，半径を同心の諸円弧に依りて等分するものであり，定積分の格段のものである事に

於ては同一である。この算法は安島の研究を得て整頓したのかと思われるが，半径の等分法は初めからの事であり，安島の円理の成立の上に全く関係ないものではなかったであろう。故に安島直円の円理の改良は，円の算法が関孝和以来種々に攻究されて機連が漸(ようや)く進んだのと，球の体積や螺旋(らせん)の研究に於て求むる所の弧以外のものを等分して算法を立てる事が試みられてその結果の簡便であった事が関係を及ぼしたのと，安島が算法簡単化の理想化せる時代に於て，最もその妙を得て傑出の独創的能力に富んで居た為めに，彼此相俟(あいま)って遂(つい)にこの成功をも齎(もた)らす事が出来たのであろう。

安島直円は既に円理を改良した。この改良は更に円壔穿去(えんとうせんきょ)積の算法を創意せしむるに至った，一つの円壔(えんとう)を他の円壔(えんとう)を以てその二つの軸が直角に交るように穿去(せんきょ)して，穿去(せんきょ)されたる立積を求めるのが，その問題である。之(これ)に関する安島の稿本は二三の異なれるものがあるが，要するに穿去(せんきょ)された立積を平行面によりて等分し，その一つの截面(せつめん)の面積を求め，更に一種の積分方法を施して立積を求めるのである。初めの積分に於て一つの無限級数を得るから，第三の積分方法はこの無限級数に就(つい)て行うのであり，巧みに二重級数を使用する事になる。その結果は二重定積分に相当するものなりと云われている。

この算法の成功は後に諸般の複雑な図形に関する求積問題の発達を促がす事になったのであるが，その発達を見るまでには安島の歿後(ぼつご) 若干(じゃっかん)の年所を経たのであった。安島の円壔(えんとう)穿空円術はその晩年の作であった。安島は他の問題にまで論究する事はしなかったようである。

安島は幾何学的の図形に関する問題の処理に於ても多く見るべ

き研究があったが，その事は後に一章を設けて変遷の跡を叙する事としよう。

整数術即ち不定解析術に就ても亦造詣の勝れたものがあった。整数術は古来継子立などの行われたのでもその趣味の存した事を見るべく，和算初期の諸算書中にも往々之を見るのであるが，纏まった方法としては関孝和が剰一術を説き，その応用として翦管術を説いた頃から始まる。この算法の如きは支那から伝来したものであった。建部賢弘，中根元圭等の研究はその算法を推し広めたものと云うべきものがある。中根派の村井中漸は「開商点兵算法」に於て剰一術を用いて方程式の整数根を求める方法を講じた。「大成算経」には直角三角形に関する整数解の事につき一種の論究が見える。中根元圭は斜三角の整数解に就ての研究があって「不休綴術」の附録に挙げられている。久留島義太なども整数術の研究があったらしいが，整数術に就て取纏めたものの出来たのは松永良弼の「算法集成」又はその一部分なる「無奇編」が恐らく初めのものであったろう。この書には直角三角形に就ても凡そ三種許りの異法を挙げ，又他の図形に関する整数解も見えているが，図形を離れての不定方程式に関した解法も見える。その後多く人の注意するところとなり，関係の算書も甚だ多く，諸般の問題及び諸般の解法が成立した。直角三角形及び斜三角形の整数解法の如きも，後の時代のものまで列挙するときは幾種類もあって甚だ面白い。不定解析上の応用の目的からして因数分解法の如きも組織立った方法が得られるに至った。安島直円は斯くも整数術の発展しつつあった中に出て，一歩進めた研究を能くしたのであった。円の内外に環容せる諸円に関する整数解や，三角形内に諸斜を容れたものなどの整数解もあるが，最も注意すべきは「冪和開方無有奇生

数術」であろう。即ち

$$y^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$$

の整数解を求めるものであるが，蓋(けだ)し前代以来の $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の整数解を推し拡めたものに外ならない。その後会田安明は更に

$$y^2 = 1x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \cdots\cdots + nx_n^2$$

$$y^2 = 1x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + \cdots\cdots + kx_n^2$$

等の整数解を求める算法をも立てた。蓋(けだ)し安島の算法を見て工夫を進めたのであろう。

安島は対数の原理に関する研究や，招差法や垜積(だせき)術や零約術等に就(つい)ても簡単化したり，解説を便にしたりしているし，安島の手で数学諸般の事項が頗(すこぶ)る整頓せられ，理論的になった事は明瞭に之を認むるに足るべく，又その創意に成った術理も相当に多数に上る。これ等が後の時代の発達に向い確乎たる準備となり，基礎となった事は甚(はなは)だ明らかである。

八　会田安明及びその時代

会田安明は藤田貞資及び安島直円と同時代の人であるが稍々(やや)後れて歿(ぼつ)し，数学上の活動は中年以後に限り，晩年の作に出色のものが多いのであるから，藤田安島両氏の後を承けた代表的の人物と見ても宜(よろし)いであろう。厳密に言えば，稍々(やや)不穏当でもあろうが，これに依りて時代を劃(かく)するのが目的ではなく，会田が関流にあらざれば算家に非(あら)ずとの観があった時代に出て関流以外に卓立し，関流の巨頭藤田貞資と抗争して敢(あえ)て護らず，盛大な算学の一派を立てたのは，固(もと)より偉観であるから，その事情をここに明らかにし

て見たいと思う。会田安明の為めに一章を立てたのは，時代上の意義よりも寧(むし)ろこの点に基づく。

会田安明は羽州山形の人，本姓内海氏，その家は農家であるが，彼れの父は長男でありながら家を出て藩士の株を買い会田氏を冒したのである。会田が覇気に富んだのは，親譲りの性格であった。会田は少時郷里で数学を修めたが，勿論(もちろん)言うべき程の事はない。会田は「自在物語」を作って数学専攻の生涯に入る以前の自伝を記しているが，甚(はなは)だきかぬ気の人物であった事が思われる。彼れ亦長男であるが郷里を見棄てて江戸に上り御家人鈴木氏の株を買って鈴木氏を冒し，鈴木安旦と称した。彼れは利根川の改修工事などに従事した。然(しか)るに彼れの上に立つものが人に嫉まれたか何(ど)うかと云う事で役を免ぜられ，会田も座してその地位を失うた。会田は初めこれを悲んだけれども，若(も)しこの悲運に会わざれば，一生腰辨(こしべん)で身を終らなければならぬのであったろうものに，これから兼ねての素志なる数学を専攻し得る事となり，全く天の助けであったのだと，後に彼自ら記(し)るしている。彼れの数学専攻の生涯は四十餘歳の時からであり，その頃までの彼れの学力は浅薄なものであった。彼れは後会田氏に復り名も安明と改めた。

会田安明が藤田貞資と衝突した動機の真相は今に判然せぬが，思うに彼れは藤田の門に入って学ぶ事を望んだのであろう。秘伝の風の厳守されたる当時に於ては，如何(いか)なる天才者流と雖(いえど)も，名門に附いてその秘伝を伝えられないでは，確実な地歩を成す事が出来ない。会田が藤田から学ぼうとしたのは当然である。けれども一方は名声隆々たる学閥の権威者であり，慎密細心で，威儀を尊ぶ人であったらしい，一方は未だ学問こそ浅いが，中年以上の年輩でもあり，豪放な天才肌で負けず嫌いのひどい人であるから，一

二回の会見で忽ち意志の疎通を缺いたものと見える。問題の訂正云々の事が問題になったと云うが，相容れざる感情の阻隔が生じ得たのは，恐らく止むを得ない行掛りであったろう。全く学閥の権威と地位なき天才者流の意気とが衝突した自然の場面である。

会田が全力を振うて打撃を与え，論争は次第に感情の悪化を加えて，悪口慢罵に堕するようにもなったけれど，その論争の進むに従いて会田は益々名望を博し，又その努力は報いられて遂に関流と拮抗して引けを取らないまでに立ち至ったのである。傑出した人物でなくては叶わぬ事ではあるが，学閥に対抗して成功し得たものの好範例ともなるであろう。

会田安明は関流と対抗するに当って，自ら流派を立て最上流と称した。最上の二字は会田が羽州最上の産なるを以て採ったのであろう。最上流には多く人物が集まり流祖会田安明を尊崇する事甚だ厚かったのであるが，独創能力に富んだ人物は多く輩出せず，その流派は諸地方に拡まって人物も亦多いが，傑出した算家は会田一人に止まっていたと謂っても過言ではあるまい。勿論この派の人達の中からも見るべき業績が一も出なかったのではない。比較的に少なかったのである。

藤田貞資が良教科書を著わし，教授の事にも深く注意した人で，門下に多く集まり来たものがあるに拘らず，矢張り有力家が出なかったのも，会田の場合と一般である。

会田安明が関流藤田貞資に対する抗争は「精要算法」に対する評論から始まる。会田はその甚だ良書なる事を認めているのであるが，而も次第に猛烈にその論評に筆を進めた。関流で之に当ったのは藤田貞資その人ではなく，高弟神谷定令が主として矢表に立った。藤田は論評の答書など作っても門中の人達に見せるだけ

で，上木〔印刷出版〕しないと云うような事もある。元来神谷は会田と懇意な間柄であり，会田が藤田を訪うたのも神谷の紹介であって，事の起るに及び，神谷は随分困ったものらしい。彼れの論争中に於ける地歩は同情すべきであったろう。藤田と云い，当時の錚々たる大家であるが，論争中の問題解法の争いの如きは，随分議論の的確でないものも少なくない。彼等は双方共に学殖の深いに拘らず，日本の数学には元来理論らしい理論が充分に攻究されて居らぬので適切明瞭に論断する事が困難であったと云う弱点を明々地に暴露したのであった。是を以て見ても，厳密な理論的構成の必要な事を知るであろう。

会田安明はその初めに在りては学力も多く見るべきものはなかった。而も黽勉努力，その学力も次第に高まり来り，独創的の研究も幾らも出来たのであるが，併し最も驚くべきは著述の甚だ多かった事である。刊行したものは論書の若干と，「当世塵劫記」，「算法古今通覧」及び「算法天生法指南」等の数種に過ぎないが，稿本に属するものは一千数百巻と云う多数に上る。これほどの多数の著述は和算家中他に一人の匹敵し得るものがない。勿論この多数の著書が凡て独創研究の結果なのではなく，各種の算法につきて得るに従い之を解説し改造し評論し，そうしてその幾多の著書を作ったのである。この多数の著書中には会田の肉筆のものも多く現存し，又会田の印章を押した直伝の書も亦多く見られるのである。会田は自著の諸書を伝書と称し，若干の報酬を求めて之を門人に与え，若くは写し取らしたのであった。

会田安明の著書目録並にその著書を見るに，関流秘伝の諸書も会田が之を手に入れて評論したものが幾らもある。彼れは関流の秘伝書全部を手に入れたとは思われないが，而も幾多の貴重書を

得た事は疑いない。例えば「方円算経」なども得ていたのである。何(ど)うしてこれ等の関流諸伝書を見る事が出来たかは問題であるが，或は古本屋へ出たのを買入れたものもあろう。種々の手段を講じて求めたものであるらしい。会田は多く関流の伝書を得る事が出来たので，その学力の増進する上に甚(はなは)だ好都合であったらしい。而(しか)も或る種の算法は伝らなかったらしく，これ等に就(つい)て会田の研究したものも見出されないものもある。この種の事項も之を明らかにすれば，独創能力の発揮上に関する條件をも幾分か知悉(ちしつ)するの料となるであろう。

会田が安島直円の「冪(べき)和開方無有奇生数術」に就(つい)て更に一歩進んだ研究の有った事は安島の條中に之を述べた。会田は零約術に就(つい)ても見るべき創意があった。同一の問題に就(つい)て幾多の解法を求める事なども考えていたし，同一の術に依りて解き得べき多数の問題を作る事もその書中に見える。この事は藤田の著書中に見るものが初めであろうが，会田の著書中にはその問題の数の多く挙げられているのが眼に着く。類似の算法を集めて比較研究する等の事をも亦試みた。楕円周を求むる算法なども試みているが，まだ充分の成功は為し得られなかった。対数の原理に関する研究の如(ごと)きは，安島のものとは別のものであって面白い。会田の創意に成ったものは随分その数も多いのであるが，今一々之を列挙する事は出来ない。会田の研究方法は一つの問題でも算法でも之を得れば，之(これ)に関聯したものを一々調べ盡(つく)して次第にその歩を進めると云う遣り方であった。その研究調査を筆録したのが，即ち彼れの数多き著書であり，その著述の甚(はなは)だ多いのは畢竟(ひっきょう)之が為めである。彼れは甚(はなは)だ勉強家で外出する事も少なかった。晩年には歩行にも困難を感ずるようになったと云う事である。

会田が「天生法指南」の著のあった事は前に述べた。会田が天生法と云うのは，会田自らは神夢に依って得た新創の代数法であると云っているが，その実関流の点竄と同様のものであって，餘り違ったところはない。善く見ても，多少の工夫を加えて改竄したと云うに過ぎない。けれども代数演算の説明を施し，之を公刊したのは数学普及の上に少なからざる関係を有する。

この書と相前後して他に二種の教科書が現われた。一は大原利明の「点竄指南」であり，一は坂部広胖の「胖法点竄指南録」である。大原利明は初め関流を学び，会田が最上流を立てた時その門下に走り，後又関流に復帰した人で，その出所進退は感服すべきであるまい。けれども彼れの著述は点竄術を了解せしむるに於ては固より役立った。

坂部広胖の「点竄指南録」は十五巻より成り，慎密な注意を以て作られたものであり，三書中最も重きを成した。各種の算法に就てこの書は可なり解り易く之を説き問題の解も之を記るしている。三書皆文化七年（一八一〇）の作であるが，蓋し「点竄指南」が最も早く出で，坂部の書が全部の刊行を終ったのは数年後に属する。この三書が凡そ時を同うして出たのは，思うに社会の需要が然らしめたのであったろう。以て当時の数学社会に於ける一般の趨勢を察するに足る。

「点竄指南録」に就て甚だ注意を要する事は楕円の弧長を求むる算法の見えている事である。楕円に関するこの種の算法は安島直円の円理の改良が出来て以後，楕円にもその円理の算法を適用するようになった結果である。坂部若しくはその門人川井久徳が研究したものであるが，川井は勘定奉行などした事のある人であり，坂部はその家に寄寓した事もあって，実は坂部の研究であるもの

が川井の名前になったものもあろうと考えられている。この頃に於ける楕円弧長の算法はまだ甚だ複雑なものであった。その後和田寧，白石長忠等の時になって餘程簡単にされるようになった。

楕円は初め之を側円と称した。楕円の名称は西洋暦算の学が支那に伝えられた時に現われた訳語であって，漢訳暦書から暦術家が伝えたのである。側円に就ては和算家が早くから論じたものもないではないが至って少ない。藤田貞資，安島直円等が幾らか研究したものもあり，会田安明が「算法側円集」二十巻の書を作るに至って，餘程整うたのである。当時側円は円壔斜截面として説いたものであり，円錐の截面として論じたものは殆んど見当らぬ。円錐の截面は稀にその問題が取扱われているのみに過ぎない。故に和算家は楕円に就ては会田以後には研究も多く，諸書に多く散見しているけれども，抛物線や双曲線の事は稀に特殊の問題中に偶然現われ来るくらいのものである。それも後の時代に属するのである。

会田は二つの焦点に針を立て線を結びて楕円を画く装置に就て述べているが，これは外国から伝ったのであろう。星学者，間重富が楕円規を創意したものは周上の各点を求むる巧妙な装置である。その器械は現に存して居らぬが，その解説書はその子，間重新の著述が今に存する。

坂部広胖が方程式解法に就て工夫のあった事も亦注意すべきであろう。方程式の解法は開孝和以来，幾多の工夫があるけれども「開式新法」に記るすところは高次方程式の実根を凡て適当に算出し得る方法にして，その近似の度も急速に求められ，便利なものであった。この書は川井の作と云う名義で刊行されている。

坂部広胖は安島直円の高弟である。安島の高弟には日下誠もあっ

た。日下は独創の研究に優れた人ではないが門下の養成に努めたので甚だ顕われている。次代の諸大家は殆んど悉くこの人の門下から出て造詣の深い人物が少なくなかった。日下の門下ほど多数の傑出した人物を輩出せしめた実例は蓋し稀であろう。或は他に絶無と謂っても宜いであろう。日下誠の数学専門の教育上に於ける功労亦偉なりと謂うべしである。

安島直円の歿した時，日下は安島の遺稿を集めて「不朽算法」二巻を作り，之を上木〔印刷出版〕せんとしたが，故ありて果さなかった。けれども写本として関流諸学者の間に持囃されたと云う事である。勿論解法を伝えたものではなく，問題と術文とを記るしたのであった。安島直円の門人には他に傑出の人はないが，日下の門下から和田寧の出ずるに及んで，頗る独創の見に富み，多くの業績を残す事となったのである。

九　和田寧及びその時代

会田安明及び坂部広胖の後に出て我が国数学界の中心人物となったのは，和田寧であった。和田寧は播州三日月の藩士であるが，後に増上寺の寺侍となり，操行の修まらざるを以て追われ，数学並に書道を教授するの外易者の業を営み，僅かに糊口を立てたのであった。彼れの死後，門人溝口佐兵衛が未亡人に代って阿州藩小出修喜に送った書状に拠れば，彼れは極めてささやかな生活を立てたもので，死亡の時にさえ多く顧みるものもなかった様子が，誠に気の毒なものである。和田寧は生来甚だ酒を嗜み，発明術を売って酒に換えたと言われているが，或は無根の事ではなかったであろう。当時の諸大家は多く人に匿れて和田寧の門に遊び，その伝授を受けたと云う事である。その門人名簿を見てもその事情が察

せられる。故遠藤利貞翁の如きはこの事を非常に重大視し，同時代の諸大家の業績と称するものは，特に円理に関しては悉く和田寧の手から出たもののように見ているのである。この見解が如何なる程度まで正しきやは固より疑問であろうが，又決して全然否定し得べきでもない。和田寧が遠く時流を抜いた独創的の人である事は云うまでもない。

和田寧の業績中最も注意すべきは円理の改良である。円理は安島直円の改良を経て甚だ便利になったのであるが，和田寧は更に之を簡便に行い得る事にした。和田寧はその目的の為めに諸表を作った。この諸表中には円周率を表わす幾多の級数をも挙げ，又重積分を行う為めの便宜にも供した。楕円の周及び弧長を求むる算法の如きも又簡便に得られる事になった。二つの曲面の交叉して生ずる立積，表面積，若くは交りの線の長さ等に就ても便利にその算法を立てたのである。これ等の算法に於て積分を行うに当り，その積分の要素となるところの微分一般の形式を考察し，之に基いて表を用いて直ちに積分の算法を行う事にしたのである。是に於て円理とは円に関する算法を云うのみならず，積分の方法を用いて施すべき諸種図形に関する求積の算法を總称して円理と称するに至った。単に之を円理とも云うし，又円理豁術とも云う。和田寧の円理諸算法に就て単に之を積分の算法と云うては，勿論語弊があろう。西洋の定積分の算法と全然同一なりと見るべきやは疑わしいけれども，要するに定積分と結果に於て同様のものであったのである。唯，西洋の積分学の如く洗練されたものでないのが異なる所である。

和田寧が円理の諸表を作ったのは，対数表の便利を喜んだ為めに円理の算法に表を使用する事を思い付いたと云う関係もあった

ろう。対数表は支那の「数理精蘊」にも見え，支那を経て伝った事もあろうが，又和蘭からも伝ったであろう。安島直円及び会田安明が対数の原理に関して研究があった事からも，その時代に対数の知られて居た事を見るべく，坂部広胖は「点竄指南録」の中に対数用法などを述べて居る。坂部は安島直円からも学んだが，又本多利明にも師事したもので，本多は数学者たると同時に経世家として出色の人物であり，航海術の重んずべきを主張して，自ら船長と為り蝦夷に航した事もある。西洋の航海術を伝えたのはこの人を以て嚆矢とすると云う。対数用法の如きも蓋しこの人あたりの重んじたものらしい。それ以前に於て対数に関して和算家の説いたものを知らぬ。是れより後，対数表は計算に便利なものとして数学者の貴ぶ所となった。故に和田寧は之に依って表を用うる事の便利を思い，円理表を作ったのであろうと見たい。

けれども単にこれだけの刺戟で円理表が成立したと見る事は出来ない。更に内部の直接の要求があったようにも思われる。円理の算法は級数に展開して，その各項につき總和を求めて極限を算出するのであるが，その展開も繰返し行わなければならない。一々之を行うのは甚だ繁雑である。何事に依らず簡便を求めて止まざる和算家の性格は，かくの如き円理の算法を何とかして簡便にしたいと云う希望なしには済まない。安島直円の時代までは単に円に関する算法のみであり，その晩年に僅かに円壔穿空円術が出来ただけで，まだ多く問題を取扱わぬので繁雑な算法も忍び得たであろうが，和田寧に至りては幾多の問題を解く事になった。一々その計算を新たにして居れば，幾らでも同一の算法を繰返す必要にも迫られたであろう。故に前に得た結果をその儘に利用する事をもしたであろう。そうしてこの種の結果を表に作って置けば応

用上に便利な事を感じ，遂に之を試み，その便利を思うては幾様のものも作ったのであろう。私は斯く解したい。

和田寧の研究は多きが中に「異円算法」と称するものがある。円楔を斜截して得る所の曲線にして，その截り方に依って二三種のものを生ずるが，その諸曲線に就て面積及び周を求める算法を説いたのである。和田寧は之を円楔の截面とは言って居らぬ。円楔の截面として説いたのはその後諸計算書である。

和田寧は濡円なるものを説いたが，この曲線は抛物線に相当する。和田寧が擺線に関する研究のあった事も亦注意を要する。擺線と云うのは後に云う名称であるが，一つの円が他の円の周上に転ずるとき，初めの円上の一点が画くところの曲線の面積或は弧長などの算法を立てたのである。この種の曲線を和算家は転距軌跡と称した。勿論一円上を他の円が転がる場合のみに限った訳ではない。この種の問題に就ては天保五年（一八三四）和田寧門人の名で芝の愛宕山に奉納した算額が最古のもののように言われているが，天保三年（一八三二）の頃に内田五観が筑波山に奉納した事もあったかと云う。内田と和田が何れが先であったかは恐らく問題であろう。けれども寛政年中の作なる志筑忠雄訳の「暦象新書」にも多少の論究が見えているし又九州古原氏の文政中の文書中にも説いたものがあるから，和田，内田両氏より以前既に知られていた事に疑いはない。惟うに暦法に於て諸遊星が太陽を廻り，諸衛星が遊星の周囲を廻転しつつ運行するので，転距軌跡の問題は自然にその辺の攻究から生じ来る筈であろう。和算家が果して暦の問題から擺線の研究に向って進むようになったかは問題ではあるが，必ずしもその関係がなかったではないであろう。

和田寧と同時に植松是勝なるものがあった。彼れは上総の人，嘗

て日下誠に学び，円理豁術並に諸表に就て発明する所があったと云う。その後彼れの門人等は浅草観音の境内に碑を立ててこの発明に関する主張をした。その碑は今も儼として存する。その発明と云うもの，和田寧と年代に於て果して何うであろうか，遠藤翁の数学史にはその碑文を録しながら，この事に就て言及して居らぬのは訝しい。

和田寧と同時に出た諸大家は，白石長忠，齋藤宜義，内田五観，牛島盛庸, 御粥安本，岩井重遠，長谷川寛等誠に多士済々たるものであった。この人々の中，牛島盛庸の如きは年輩既に老け，その著述の刊行されたのは，ずっと以前に属するけれども，年八十餘にして和田寧に就いて学んだと云うから，その意気の壮なるを見るべく篤学誠に敬すべきである。これ等の人々は各種の発明術に就て盛んに諸寺社に算額を奉納し，又これ等の諸術を録せる小冊子を刊行したが，問題と術文のみにして解析方法を記るしたものはない。是れ算家は概して経済不如意にして，大部の書物を刊行するの余裕がなかったからであろう。故に円理豁術に関する諸問題も多くこれ等諸書中に散見するけれども，その円理の算法を説いたものはない。之を説いたのは岩井重遠の「円理氷釈」から始まる。而もこの諸書によって当時盛んに行われた問題の種類や又その造詣の如何を察する事が出来る。その問題の種類は固より円理豁術に関するものも多いには多いがその他のものも亦少くない。

これ等諸問題の中には幾何学的図形に関するものも見るべきものが多い。英国のケージーに先立ってケージーの定理相当のものを得て，且つ盛んに之を応用したのもこの頃の事である。けれどもこの幾何学的事項の事に就ては之を詳述せず，章を改めて取纏めて述べる事にする。

整数術に就ても亦見るべきものが少なくない。白石長忠の「社盟算譜」に記るされた御粥安本の術の如きがそれである。即ち

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3$$

の解法に関するものである。

「算法新書」の刊行も亦この時代に於て注意すべき一事象であった。「算法新書」は長谷川寛の作，文政十三年（一八三〇）に成り，門人千葉胤秀の名を以て公にした。江戸時代の数学書は門人の名で出したものが甚だ多い。長谷川は固より有力な人物であるけれども，その名望の隆々として高まったのはこの書が出てからである。伝うるところに依れば，長谷川は神田柳原辺で売算若くは売卜をしていたが，某書店主が之を見て彼れの数学に堪能なるを看破し，彼れに請うてこの書を作らしめ，之を刊行して果して古今無比の売行きであったと云う。この書は刊行以来幾たびか版木を彫り改め，磨滅して読み難いような本が多く流布している。凡ての和算書中「算法新書」ほど多数に発行されたものは，他に全くなかったであろう。数学の初歩から甚だ解り易く記るしたものである。円理に関する解説も亦見える。安島直円や和田寧の改良を経た新式の算法ではなく，又表の使用など言っては居らぬが，併し一通り了解し得られる。数学の自修用教科書としては蓋し最良のものであったと謂って良かろう。円理の如きは秘伝とされていたのが，その算法の公刊された為めに，関流算家の間に問題になったと言われて居る。

長谷川寛は日下誠の高弟で，もと鍛冶を職としたが，日下が麻布日ケ窪で塾を開いた初めに入門し,甚だ愛撫された。然るにその後関流を破門されたと云う説もあり，その破門に就ては凡そ三様の説がある。第一は日下が安島直円の遺稿「不朽算法」を出版せ

んとした時長谷川が破廉恥の行為があって駄目になったので，破門されたのだと云う。第二は「算法地方大成」出版が関流の規約に反し，政治に亘るものとして非難された為めだとするもの，第三は「算法新書」の刊行に依って，円理の秘伝をさらけ出したからだと云う。固より何れが真なるやを知らぬ。又実際破門されたか何うかも知らぬ。長谷川が関流の免許を諸門人に伝えているところを見ると，破門と云うのは恐らく事実でないであろう。「地方大成」の為めに問題になった事は「地方大成斥非問答」と題する刊本の存するに依りて知られるが「算法新書」刊行の際にも問題はあったらしく思われる。

長谷川は「新書」刊後に於て算書若干部を刊行したが，何れも門人の名で出している。これ等の諸書も相当に行われた。長谷川は数学教科書の作者としては優れた手腕の人であった。又教授にも甚だ巧みであった。独創の見に於ては固より第一流の人でないが，世に名声の高い事は恐らく及ぶものがなかったであろう。和算家の間に於ては何時も存在中に最も名声を得るものは必ず教育に巧みな人でないものはなかった。長谷川の極形術等に就ては幾何学の発達に関する條に於てこれを述べる事としよう。

十　幕末の諸算家

前章に説いた如く，長谷川寛は「算法新書」を著わしてから名声一時に高く，又各種の諸算書を作り，その門派は甚だ栄えたが，天保九年（一八三八）五十七歳にて歿し，養子長谷川弘がその後を嗣いだ。長谷川弘は仙台領の人，夙に江戸に出て長谷川寛に師事し，子養せらるるに至った。然るに故ありて九州に下り教授に従事したが，養父の歿するに及んで江戸に帰り，その流派を主宰

する事になった。そうして弘化元年（一八四四）「算法求積通考」を著わした。門人内田久命の名で公にした。円理の算法を詳説し，諸表の使用に就ても記るしているので，この書が出て円理の一通りは師伝を受けずとも了解し得られる事になったのである。円楔乃至楕円楔の截面に関する曲線の事などもこの書に詳述されている。更に続篇を作って円理豁術に属する難解の問題を説く豫定であったのであるが，遂に実現を見るに至らなかった。長谷川弘も亦養父寛と同じく数学の教育に長じ，門人が多かった。その著述は一も自己の名義で出したものはない。

長谷川父子と同時に門流の盛んなので顕われたものに内田五観があった。彼れは日下誠の高弟にして，少年時代から頗る頭角を顕わし，又研究する所も多かった。著述も亦多い。「古今算鑑」は彼が世に問うた最初の作である。彼れは長谷川父子の如く了解し易き教科書を作る事はしなかったけれども，門人の教育に於ては甚だ努めたものらしく，長谷川父子が数学の普通数育に達したに対して，内田五観は数学専門教育に優れていたと謂うべきであろう。彼れの門中からは有力な専門家が多く輩出した。これ等の人々も亦夫々著述があり，注意に値するものにも乏しくない。而もこの諸書中果して何程が内田の作であり，何程が門人等の手に成ったかは，今これを知る事容易でない。それは姑く措き，内田門下に有力な人物の多かった事は長谷川門中の人々の比ではないのである。是に於て長谷川派と内田派は競争の地位に立ちたるかの観があり，その間柄が多少面白くなかったのではないかとも思われる。長谷川寛破門説の出たのもこう云う開係の結果であったろうかとも見える。

内田五観門下の有力家は津和野の桑本正明，紀州領伊勢の人志

野知卿，上州の剣持章行，名古屋の竹内修敬，広島の法道寺善，松江の藤岡有貞，江戸の人には川北朝鄰があった。この中，桑本正明の「尖円豁通」，剣持章行の「約術新編」等の如(ごと)き見るべきものに富む。

法通寺善は刊行の著述はないが，諸方を遊歴して算学を教授し，その造詣の深いので知られていた。その著「観新考算変」の如(ごと)きは西洋の反形法にも比すべく，注意すべきものであった、その事は幾何学の條に於て説く事とする。

法道寺善は幕末の頃に遊歴の算家として顕われたものであるが，剣持章行も亦関東諸国を遊歴教授した。同じく内田の門人小松鈍齋も諸方を教授して歩いた。長谷川寛の門中に於ては越後の山口和が諸方を遊歴し，一の関の千葉胤秀をして長谷川へ入門さしたのもその勧めに依ったのである。千葉も亦仙台領の北部の辺を遊歴して門人が甚(はなは)だ多かった。これ等は幕末の頃からその直前の事情であるが，享保年中の頃にも大阪の大島喜侍の如(ごと)きは中根元圭の門下から出て，近畿諸国を遊歴教授したものであった。遊歴の算家が数学を地方に普及せしめ，地方の算家を刺戟した事は多かったであろう。

江戸時代の数学は関孝和の頃から，江戸がその発達の中心であり，有力な諸大家は殆(ほと)んど江戸在住の人であったが，幕末の頃には地方の出身者中に造詣の深いものが幾(いく)らも出ることとなったのも時勢の変遷であろう。長谷川門下の人で盛岡藩の梅村重得兄弟，庄内の阿部重道，越後の佐藤解記等も有力家であり，盛岡藩には尚(な)お阿部知翁等もあった。信州には武内重信，その門人小林忠良等があり，上州には齋藤宜長及び宜義の父子，その門人に萩原禎助が出た如(ごと)きも注意すべく，奥州には最上流佐久間纘が居るなど，

幕末の我が数学界は誠に多士済々たるものであった。

この時代に於ける我国数学界の風潮を見るに，和田寧の始めた円理豁術の算法が広く行き渡り，種々の研究が行われたのは能く大勢を語るものであろう。幾何学的の考察も餘程発達した。御粥安本の如きは図形の問題を説くことを得意とした専門家と謂っても宜い。重心に関する研究の如きも誠に行き渡った。重心の事は暦学者高橋至時あたりが初めて論じたものらしく，享保文化頃に属する一二の写本も有るにはあるが，未だ多く注意を惹くに至らず，内田五観等が之を論究するに至りて学界の注意を引き着けるようになったのである。勿論和算家の考案ではなく，西洋の数学から直接に若くは支那訳書を経て伝わり，之に工夫を加えたものであった。転距軌跡の問題なども幕末には甚だ多く取扱われた。又弾道の問題も論ぜられ，抛物線をも説いたのであるが，これ等は西洋の砲術書から伝ったのであろう。曲線や曲面の事なども次第に新しいものを見出したものもある。けれども餘り多数の曲線類の研究が進むまでにはならなかった。これ求積問題が主であって，曲線や曲面の性質を説く事は和算の終末に至るまで重きを成さなかった事も，関係があるであろう。円環の截面に関する曲線などは，和算家の好んで取扱ったものの部類に属する。円壔の斜截面としての側円と円錐の斜截面とが同一なりや否やの如きも屢々問題とせられ，同一なりとする学者もあったが，又同一にあらずとした人もある。岩田好算が楕円に内切及び外切して且つ互に相切する四円の直径が互に比例する事を算定した如きは，面白い結果であった。内田五観に二等辺梯形に一つの楕円が内接し，その四隅に内接する四円の直径が互に比例する事を記るしているが，和算家中にも既にその誤れる事を指摘した人があった。けれどもこ

の問題の如きは普通にはその真偽を批判し得なかったのであって，萩原禎助は幕末の算家として最も有力な人物の一人であるが，この人の如きすらこの問題は如何ともする事が出来ないと言っていたのである。

萩原禎助は上州の人，齋藤宜義の門下より出で，古来刊行の諸算書に就てその題術の正邪を研究し，幾多の改正術を立てた人である。彼れの研究には極めて複雑な問題が多い。而も彼れの研究は維新後に属するものも少なくない。

鏡光照が垂線即ち垂鏈線（カテナリー）に関する研究のあった如きも特に注意すべきであろう。

幕末の諸算書中には比重など物理的の問題も段々と現われるようになったのであるが，この種の事は未だその研究が積んでいないので，正確を缺いたものが幾らもある。

幕末の頃に出た諸算家中には尚お記載の必要あるものも甚だ多く，その造詣に就ても尚之を説くの要あるものが幾らもあるが，冗長に流るるの恐れあるが故に，今姑く之を割愛するけれども，幕末に於ては広く諸方から多く人物が輩出し，幾多の問題を捉えて能く之を研究し，次第にその進歩の歩武を進めつつあった事は疑れぬ。若しこの時に於て維新に遭遇せず，西洋の文物を利用する事にならなかったならば，我国の数学は続いてその特殊の発達を維持し，造詣は更に一段の高きを加えたに相違ないのである。人或は我国固有の数学は既に行き詰りつつあったかの如く考えるものもあるが，何等斯くの如き様子のあった形跡だも認める事は出来ない。維新に際して数学も亦西洋に学ぶ事になったのは，勢止むを得ない事であり，他に採るべき道のなかった事は言うまでもないとは言え，和算発達の中道にして忽然その歴史の歩みを罷め，

全然別の道程に就く事となったのは我等の歴史的叙述に於てもその続きのあるものを途中で中断されたような気がして，物足りなくてならない。更に和算の発達が一百年間も継続し，その造詣に於て深く見極める事も出来たならば，和算史としては頗(すこぶ)る興味あるものと為り得た事であろう。思えば感慨無量である。

十一　幾何学の発達

江戸時代の数学は一見甚(はなは)だ代数的の色彩に勝る。図形に関する問題でも凡(すべ)て代数的に之を処理する。点竄(てんざん)術と云うのは日本特殊の代数学であるが，点竄(てんざん)問題と云えば寧(むし)ろ図形に関する問題の總称と云うべき形勢であった。以て代数的の処理に非(あら)ざれば数学に非(あら)ずと云うべき状態であった事が知られよう。是れ即ち代数的の方面が著しき支那数学の後を受けて発達した関係で，誠に当然至当の事であったろう。私も和算史の研究に着手した初めに於ては，代数的の方に優れた所以(ゆえん)を見て，日本に幾何学なしとの感がないでもなかった。けれどもこれは一面観にして，和算の全体を的確に正視した見解ではない。和算にはその実，幾何学的の分子が極めて濃厚であり，その事情を正当に了解しないでは，日本数学の日本数学たる所以(ゆえん)を捉え得たとは謂(い)われない。勿論(もちろん)，幾何学とはユークリッドの「幾何原本」に見る如(ごと)く，若干(じゃっかん)の基礎事項からして証明を厳にして構築したる演繹体系であり，その論理構成の厳密なものにあらざれば幾何学に非(あら)ずと云うならば，日本には当然幾何学なるものは発達しなかったのである。この意味では日本に幾何学なしと謂(い)っても宜(よろし)い。けれどもかくの如(ごと)く厳密なる，又理想的に組織されたる体系のみ指すにあらずして，一般に図形に関する論究を云うときは，和算中には幾何学的の分子が甚(はなは)だ多く又

一種特殊の発達を遂げたと云う事が出来る。この意味では埃及(エジプト)にも支那にも印度(インド)にも固(もと)より相当の幾何学はあった。決して希臘(ギリシア)にのみ特有のものではない。けれども和算家の幾何学は希臘(ギリシア)の幾何学に対比するには足らぬけれども，自餘の諸国の幾何学に比すれば自ら特殊の色彩があって甚(はなは)だ見るに足るのである。到底支那や印度(インド)の幾何学と同日の談ではない。その発達は頗(すこぶ)る注意を要する。私は之(これ)に就(つい)て見る所を欧文に草し彼国に紹介したいとも思っている。今日本の幾何学発達の概要を略記し，江戸時代の数学史の一章とするのも，必ずしも無意義ではあるまい。

我国で発達した絵画と音楽とを見るに，両者共に支那から伝って之を学び若(もし)くは改造したのが主であるが，絵画に於ては随分立派なものが多いけれども，音楽は謡曲などの如(ごと)く特殊なものは成立したといえ，極めて単純なものであって，音楽史専門家の中にも左まで価値あるものにあらずと言う人さえある。能楽の如(ごと)きものの趣味に富めるは単なる音楽ではなく，舞踊の伴う事が著しい。近代西洋の美術を輸入するに至りても，絵画は独創的の作が次第に現われるに反し，音楽はまだ西洋人の手を離れて学習し得るだけの程度にもなっていない。又日本で紋章の発達した事などから見ても，日本人が形態に関して敏感な事が思われる。日本で特殊の幾何学の発達し得た事には，日本人の性情に依(よ)る根本的の要因があったろうと考えたい。

和算発達の初期に現われた諸算書にも円や正多角形や各種立体の求積問題が見えているし，求積に関する多少の証明は早くから試みられていた。円理並に角術の発達に就(つい)ては前に之を説いたので，今之を繰返す事をすまい。

和算の初期に於て図形に関する算法には主として勾股弦の関係

を応用したのであり，その関係は甚だ重要なものであったので，之が証明を企たてものも幾らもある。斜三角形に就ての之に相当する関係も亦盛んに応用された。三角錐は同底同高の三角壔の立積の三分の一に等しとの事も早くから証明が試みられた。和算家がその発達の初期からしてこの種の事項に相当の注意を怠らなかった事は之に依って見る事が出来よう。星野実宜が「股勾弦鈔」（寛文十年，一六七〇）を刊行したのも，三角形に関する諸種関係等を集めて，算法の便に供したものである。その説くところは多く見るべき程のものではないが併しこの種のものを集めて，整理しようと云う精神の現われた事が床しい。

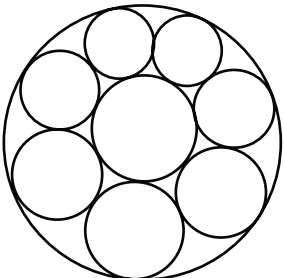
関孝和は「解見題之法」に於て幾何学攻究の入門を説き，「求積」並に「毬缺変形草」を作りて各種立体の求積に就て記るし，中には円弧をその平面内の一直線を軸として之を回転して得たる立積を求める事なども行うた。その算法には円弧の重心を利用している。関孝和の角術に於ては方程式を求めるのであるけれども，その準備には可なり複雑な幾何学的の攻究を試みたものであった。関孝和のこの種の研究には，前の時代に発達しつつあった諸問題の関係も多く入り来り，「算法闕疑抄」などの問題は餘程刺戟を与えていると思われるが，併しこれだけ纏まったものが出来たのは，全く関孝和の功績であり，重心利用の求積算法の如きは他人の文献中には未だ何等見聞しないのである。関孝和は代数並に円理の開拓上に偉功のあった許りでなく，幾何学的方面の分野に於ても亦同様にその功労を認むべきである。

関孝和前後の頃から始まった問題に切籠（きりこ）と称するものがある。球なり立方なりの諸隅を切り落して他の立体を作り，その求積を論ずるものである。切籠の事は後の時代までも和算家の

好題目であり，その文献も多く，造詣も亦少なくない。多面体の求積は凡(すべ)てこの算法に属する。松永良弼の「求積後篇」の如(ごと)きは，この種の算法を挙げたものである。

円の接触に関する問題は和算家の研究中には甚(はなは)だ多いのであるが，この種の問題も甚(はなは)だ早く現われたものの一部類である。「古今算法記」の一問題には一つの大円内に一中円と二小円とを互に接触して容(い)れたもので，関孝和がその問題を解いたが，その後この問題は種々に変化するに至った。又三つの円が互に外切したものの問題なども早くから論ぜられ，一円に四つの円が環容して切する問題の如(ごと)きも亦之を見る。一円に幾多の円を環容したものも見えている。この種の問題は関孝和の前既に記(し)るされて居り，「大成算経」に於ても可(か)なりに論ぜられた。松永良弼等の時代に至るとこの種の問題が大分整頓されて来る。この種の問題を解く為めに現われ，而(しこう)して後に重要視して応用される事になった関係は，三角形の三辺と形内若(もし)くは形外の一点から三頂点へ引ける三直線との関係を表わすところの関係式であった。この関係は大分前から知られたらしいが，之を重視したのは久留島義太あたりからであろうか。「久氏遺稿」中には二三ケ所に之を記(し)るす。

久留島義太が逐索術を創意したと云われるのは，委細の事は充分に判然せぬけれども，蓋(けだ)し一円内に環容した諸円に関する問題の研究でもあったろう。この種の問題は後には和算家の間に甚(はなは)だ好んで論ぜられたのである。一円内に環容したと謂(い)っては稍々(やや)語弊があろう。実は内外二円に環容したと謂いたい。即ち図に示めすが如(ごと)き問題を云うのである。



この種の問題に於ては内外の二円

と環円内の一円との直径を知れば，
この三円に切する第四の円の直径を
算出する事が出来る。次に第五の円
の直径を算出し得られる。斯(か)くして
次第に幾つの円の直径でも知る事が出来る。是に於て環円の数に従いて第何番目かを環円中の第一円に等しと置く事によって，環円の問題は解き得られる。久留島義太の逐索術というのは，蓋(けだ)しこの種の算法に関したものであったろう。逐索術は勿論(もちろん)環円の場合にのみ関するものではない。

この種の環円に関する算法はその後安島直円に至りて甚(はなは)だ整頓したものになった。「廉術考草」，「廉術変換」，「環円無有奇」等は皆安島がこの環円の問題に就(つい)て記(し)るした稿本であり，甚(はなは)だ見るべきものであった。「環円無有奇」は即ち環円に関する解術を挙げたものである。和算家の幾何学的図形に関する解術には，大概は整数値にてその諸線の長さなど表わす事をしたもので，環円に関する場合の如(ごと)きは中に就(つ)きて甚(はなは)だ趣味あるものの一つであった。

環円に関する整数解につきては後に至り御粥安本の研究にも面白いものがある。

安島直円が廉術と称するものは，前に逐索術と言ったものと同様の算法である。逐索術と云い廉術と云い，勿論(もちろん)幾何学的図形にのみ適用すべき算法ではなく，垜術(だじゅつ)でも角術でも，行列式の展開方法などに於ても広く行われたものであるが，之を角術に適用するが如(ごと)きは固(もと)より幾何学的の適用であり，早くから行われたのであった。幾何学的の適用に於ては環円だけでなく，他の図形に関するものも甚(はなは)だ多い。逐索術が発達して和算家の幾何学は頗(すこぶ)る豊富となり麗わしいものになったと謂(い)って宜(よろし)かろう。

一方に於てこの種の算法が発達すると同時に，三角形内に三円を内接した問題なども現われるようになった。この問題は安島直円が創めたものの如く考えられた事もあるが，実は安島以前から存し，その解法も成立していたのである。初めは三角形内に一円を容れたものや，更に一円を前の円に切して容れたものなどの問題が存したのであるが，尋で直角三角形内に三円を相切して内容した問題が現われ，その解を得るに及んで斜三角形の場合をも解く事が出来るようになった。その解法は固より代数的に試みるのであり，初めは四次方程式の形で解を得たのであるが，後には二次方程式に約する事が出来るようになった。又その三容円と三角形の内接円の直径の関係式を求むる事なども行われた。この問題の変遷の如きも，環円の問題と同じく甚だ趣味あるものである。この問題は西洋では Malfatti の問題と称するものであるが，Malfatti より先だって解せられているのは注意すべきであろう。勿論西洋では作図題として研究されたが日本では諸円の直径の値を求むると云う形で論ぜられた相違がある。

三角形の内接円の事から傍接円の算法にも進むし，三角形に三円を容れる問題は四円以上を容れる問題ともなり，三つの円弧で囲まれた中に三円乃至四円を容れた問題も研究されるようになった。その四円中の三円は一辺に切して相並ぶのであるが，任意数の円が一辺に切して相並ぶような図形も亦研究される事となった。この場合には勿論逐索術を適用する。三つの円弧で囲んだ中に諸円を容れる場合にも矢張り同様の問題が生ずる。

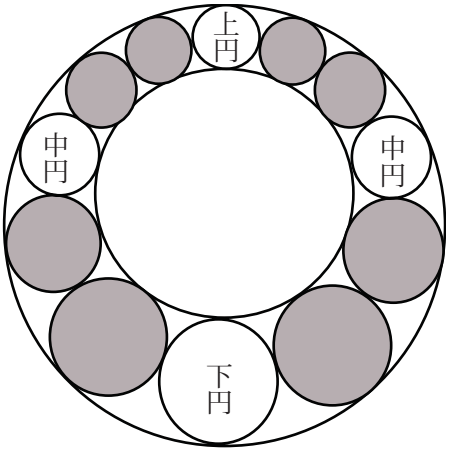
円弧を回転して生じた回転体の中に諸球を容れたり球内に幾多の球を容れた問題も論ぜられ，これ等に就ても逐索術が適用され，又切籠の問題なども矢張り幾何学的論究上に大切なものであり，そ

れから球面上に画いた各種の図形に就ての研究などもあった。この種の問題にも見るべきものがある。

又三角形，四角形，五角形，……に一つの円を内接しその諸隅に円を容れたものに関する問題などもある。円に内接した四辺形の四辺と両対角線との関係，即ち西洋でトレミーの定理と称するものは安島直円の出る以前の頃から好んで諸問題の解に応用された。球の接触の問題に於ては，三つの線を相切して一平面上に置き，その上に一球を重ねたものの高さを応用して問題を解く事が屢々あった。この種の関係の利用されるものは次第に集積した。

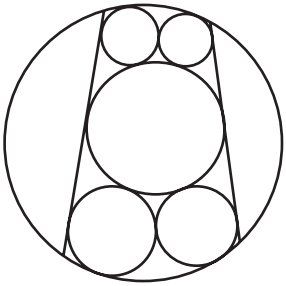
和算家は作図題なるものを論じた例が極めて乏しい。殆んど絶無と謂っても宜い。然るに藤田貞資並に安島直円が正五角形の作図法を試みたものが残っている。蓋し頗る珍らしい。但し証明はしてない。

環円乃至環球の問題に就て甚だ趣味ある結果を得たものは，次頁図に示めすが如く環円中の四つが他の若干円ずつを中間に挾みて円の直径の間に簡単な関係が成立すると云う事である。その中間に挾める円の個数は幾つずつでも同じである。又図形が種々に変化した場合にも同様に成立つ。この種の事は会田安明の「算法古今通覧」が初見かと思われるが，その後の請算書に種々の場合が散見している。その諸種のものを集めて一様に成立つ事を言ったのは，蓋し内田五観が維新



後に記(し)るしたものであろう。この種の面白い関係が知られたのは，全く環円に関する研究から来たのであった。

環円の研究に就(つ)き注意すべき一つの事は，所謂(いわゆる)傍斜術の成立した事である。蓋(けだ)し安島直円の「四円傍斜術」がこの術の重要なものになる初めと見てよい。安島以前から傍斜の事は多少用いられているが，安島に至って之を整頓して一つの基礎的方法と為し，盛に応用するようになったのである。傍斜とは二つの円に共通の切線をいう。四円傍斜は二円の間に他の二つの相切する円を画き，この四円に就(つい)て二円の傍斜の関係を取ったものを云うのである。この関係を用いて多くの問題を解くのに便利になったのであるが，その後更に別の傍斜術が現われるに至った。二円の切線と此二円に切する他の一円との関係を言い表わしたもので，この関係を用いて四円六斜術即ち一つの円に切する四つの円の六つの共通切線の長さの間に存する関係を得た事は甚(はなは)だ著しい。即ちケージーの定理として有名なものに相当するが固(もと)よりケージーに先だつこと三十年前に和算家は用い始めたものである。白石長忠の「数理無盡蔵(むじんぞう)」に載せたのが恐らく初見であろう。之を得るに用いた傍斜術もこの頃から行われたもので，是れからは安島の傍斜術を用うるものなきに至った。四円六斜術も盛んに他の問題の研究上に応用され，種々の面白い関係を得たのであった。中には図に示めす如(ごと)き二円と両斜の間に切する二組の二円の間に簡単な関係の存する事を示めしたものもある。この図に於て其二円間に等数の円を容(い)れた場合に，前と同様の関係



を存することを得たものもある。この種の事に就ては御粥安本或は其門下の人達が随分達していたようである。

一つの円内に環円でなく，幾つかの円を別の仕方で容れ得るだけ相切して容れた問題も亦多く論ぜられたもので，牛島盛庸の著書などにもこの種の問題が現われているが，四円六斜術が出来てから之を応用して論ずる事となり，この種の問題も頓に進歩したらしい。この種の問題に就て最も込入ったものになったのは，平野喜房の「浅致算法」に見る所の相切する三円間に幾多の円を杉成り形に容れたものであろうが，その術は正しきや否やが問題になり，正しからざる事を指摘したものもあった。

この種の問題と関聯して発達した方法に甚だ注意すべきものが一つある。即ち法道寺善の「観新考算変」に見る所の幾何学的算法にして西洋の反形法と対比すべきものが，即ちそれである。法道寺は内田五観の門人観山と号し，この書名は観即ち自己が新たに考案した「算変」と云う事であり，安政七年（一八六〇）の作である。自ら言う所に依れば，多年の苦心の結果で出来たのである。その算法は諸円の接触せる図形に就きて，その二円が直線になるように一種の変形を施し，その変形されたる結果に基きて算法を立て，之を原形に還元して所要の関係を得るのである。この変形に当りては二円の共通切線の長さの関係を変ぜぬものとするが，二円の一方が全く他の中に在る場合の共通切線と云う考えも朧ろげながらに使用されている。誠に驚服に値する。法道寺は諸方を教授し回ったのでこの算法を数ケ所で伝えた。

この同じ算法が果して法道寺の創意に成れるものなりやは，或は判然せぬかも知れぬ。法道寺の前に肥後の牛島盛庸が或は之と

同じ創意があったように思われる。その著述は今に存せぬけれども，肥後天円子作の写本に同様の事を説いたものがあり，之(これ)に基いたと思われる一稿本はその年紀が法道寺の著述と同年のものであり，且(か)つ牛島は幾何学的事項の問題研究に優秀な手腕のあった人であるから，天円子は牛島其人であるらしく，肥後人が牛島盛庸伝を作れるものにも之(これ)に関係ある記事が見られ牛島の創意に基いた事は恐らく疑いなかろうと思う、法道寺が牛島の著述を見たか，若(もし)くは之れから暗示を得たか否かは不明であるけれども，その創発の功は之を牛島に帰すべく，その算法を精撰し且(か)つ普及した功績は之を法道寺に求めなければならぬ。

法道寺はその算法に就(つい)て長谷川寛の極形術に基いたものであると言っている。是れ恐らく事実であろう。長谷川の極形術は一つの図形に関して直接に算法を施さず，之を極形即ち極限の図形に変じて始めて考察し，その上にて原形に復して考えるのである。理論としては取るべきものがあるが，異種の原形から同じ極形が生ずるので原形に還元する場合に他の原形を取り間違えて判断を誤る事がある。従って正当な算法と見做(みな)す事が出来ない。これ極形術の非難を受けた所以(ゆえん)でもあり，又多く行われるようにならなかった所以(ゆえん)である。けれども適当な注意を以て之を適用すれば，相当に役に立つ。得た結果に就て直ちに之を採用せず，吟味を加うる事をすればその正邪を判断する事も出来るのである。故に偽術なりとして之を棄てて省(かえり)みざらんとしたのは，感服した事でない。故に一層之を正当な方法に改造しようとした人もあった。齋藤宜義の如(ごと)きはそれであり，立派な結果を得たと云う事であるが秘して人に伝えなかった。法道寺善の如きも極形術の真意義を了解し，之を他の有効な算法に改造する事を企てたのであり，上述の変形方

法はそうして成立ったものとも見られよう。牛島が如何にしてその算法を工夫したかは何等の拠るべき史料も伝って居らぬが矢張り同様な見解に基いたのではなかろうかと思う。

極形術の発達は二次方程式の二根に相当する図形の攻究から発したもので，法道寺の稿本を見てもその事が考案中の重大な意義をなしている。方程式の吟味に関する論究は関孝和以来世にその人に乏しからず，和算上の重大なものとされていたのであり，之を幾何学的に見る方面から極形術なり，変形術なり云うものが生れ出たと見るべきであろう。一方に於て恁う云う関係があると共に，又一方には代数的の処理を避けて直接に図形その物の攻究から関係を求めようと云う要求も次第に起きたのであり，所謂規矩術にはその意味のものがあって，吉田重矩の「規矩術図解」や，長谷川流の「直術図解」などもそうした意味で出来たのである。斯く追々と図形の論究が進み，遂に最後の結果が牛島や法道寺の反形法に導き行ったと謂うべきであろう。和算の幾何学発達の頂点は正しくこの点にあったのである。

十二　西洋の影響

江戸時代二三百年間に於て発達した我国の数学の状態に就ては既に之を略叙したのであるが，その発達には外国の影響が何うであろう。これ固より重大な問題である。徳川家康の顧問に英人三浦安針 William Adams があり，彼は元と水先案内にして，造船の事などもするし，数学にも関係があったらしい。「乾坤辨説」などの西洋風の天文書も早く作られ，日本の測量術は寛永中に西洋人ガスパルの伝うるところであったと云う。この時代に於て多少西洋の数学が伝った事はあるであろう。けれども当時行われた数学

は支那の数学から脱化したものであり，西洋の影響らしいものが乏しい。関孝和の数学に就(つい)ても，当時日本人と称して和蘭(オランダ)に在りて数学を修め又数学を学んだ人があり，同時に南蛮に行って数学を学んで帰った鳩野宗巴があるので，何等(なんら)か関係がありはせぬかと思われないでもないが，研究の結果，餘(あま)り関係があるとは認め難い。支那訳の西洋暦算の学も亦餘(あま)り影響したらしくない。

西洋の数学が伝って和算家が之を学修するようになったのは,「暦算全書」などが来てその中に見えたる西洋の数学が攻究されてからであろう。三角法はこうして伝ったのであった。建部賢弘，中根元圭等がその事に当っている。籌算(ちゅうさん)と称するものが支那から伝えられたのも，又西洋のものである。一種の籌(ちゅう)を用いて行なう算法で，Napier's rods と称するものである。

対数表は支那訳のものからも，蘭書からも直接に伝ったであろう。西洋の算書が直接に伝ったのは前野蘭化が算術書二部を西洋人から受けたと云う時からの事であるが，その書名は分らぬ。本多利明が西洋の航海法をやるので対数表なども何(ど)うにかしたらしく，その門中から出た坂部広胖が著書中に対数の用法など挙げているのは，恐らくその関係からであろう。安島直円及び会田安明は対数の原理に就(つい)て研究する所があった。寛政改暦の時には高橋至時，間重富等が参与し，支那訳の西洋暦法に依ったのであり，又蘭書に就(つい)ても調査する事になった。高橋はラランドの暦書を学びて「管見」十餘巻を作ったが中には彼国の積分の記号にも接触したのであり，その結果は日本の極数術と等しいから西洋人も正しい算法を使っているわいと云うような事を言っている。高橋は又「海中舟道考」を作り，同じ方向に向って進む船が地球面上に画く曲線を研究している。重心の事に就(つい)ても研究があったと云う。又

同じ頃に志築忠雄の訳したる「暦象新書」には擺線の事も出ている。志築は重力の事などに就て論じたものもある。高橋，間等に続きて幕府の天文方に在った人々は外国の天文書の研究に歩を進めて随分造詣の見るべきものもあったのであるが，これ等暦術家が蘭語を学び蘭書を読んで，西洋の学問に接触したに引換え，和算家の中には蘭学の素養あるものも殆んどなかったらしく，暦術家との関係も餘り密接なものがないようで，多く西洋の学問を伝えなかったようであり，安島直円の円理の改良でも何うも西洋の関係はないように思う。

和算家は天文暦術は支那西洋が優れているが，数学に至りては我が神州は世界に冠たるもので，彼れの遠く及ぶところでないと考えて居たものが多い。恐らく和算家一般の輿論であったと謂っても宜かろう。高橋至時の如き天文家には西洋の数学が立派なものである事を認めた人もいるが，数学者の中には稀であると云うよりも殆んどそう云う人はなかったらしい。是れ和算は民間のものであって，官府に関係あるもの少なく，西洋の高等数理に接触する機会に乏しかった事も関係があろうが，又和算の発達は著しいもので西洋の初歩数学書を見ても，図などから餘り感服する程でなかったような事情もあったろう。重心の問題などに就ては西洋の関係もあるが，それ等の事は洋書を読んだと云うよりも寧ろ図を見て悟ると云うような事であったろうと云う。内田五観の如きは多少蘭書も読んだらしく，その家塾を瑪得瑪弟加（マテマテカ）と称した程で，餘程西洋の数学を伝えもしたろうかと考えられようけれども，その実左まで蘭学の力があったようでもなし，この人の如きも蘭書は図を見てその研究の題目にはしたろうが餘り読んだものではあるまいと云う事である。内田五観ほどの人でもそ

うだとすれば，他の人々に至りては全く知れたものであった。故に暦学に於て寛政改暦の時以来全然西洋の天文学を採用したものに比すれば，我国の数学は餘程事情を異にしたのであった。長崎の通詞で暦学の書を訳したものは本木，志築等の人々があるけれども，数学書を訳した人もなく，数学を学んだ人のある事も聞かぬのである。

内田五観門人小松鈍齋が嘗て遊歴して長崎に至り，長崎の算家と会して数学の六ケしい問題を西洋人に示したのに，某は之を解く事が出来なかった旨を，小松自ら記したものにあるが，小松は之に依り西洋人は数学に拙ずいものであるかのように考えていた。長崎の諸算家の著述や算額なども，当時一般の和算家の題術と同じであって，別に殊更西洋関係の算法など受入れていたらしい形跡が見られぬ。長崎に於てさえもそうであるから，外国の数学に対して関係の厚いものではなかった事が思われる。

慶応中に横浜で名古屋の竹内修敬門人の一少女が看板を出して数学を教授したものがあり，居留の西洋人中にも門人があったと云う事は，法道寺善が書いているが，この少女の事蹟に就て他に聞くところはないけれども，和算家の門人が西洋人に教授した事があると云えば，甚だ面白い事実であると思う。

西洋の算法の中にて籌算は可なり早く伝わり，之を説いたものは幾らもあったが，西洋の筆算を説いたものは古くは一も之を見ぬ。柳川春三の「洋算用法」並に福田理軒の「西算速知」が出てから、筆算が行われるようになったと謂って宜かろう。柳川は神田孝平と共に幕府の開成所に於て洋算を教授した。洋算の教授は長崎及び築地で海軍の教習をした時，航海術の豫備の為めに教授したのが初めで，小野友五郎，柳楢悦などはこの頃に長崎に派遣さ

れて学んだのである。神田，柳川の二人は和算に深い人ではないが，小野，柳の二人は和算の深い造詣を以て洋算を学んだ。西洋の微分積分をも明瞭に了解し早くから之を記るしているのは，蓋し柳である。榎本武揚，赤松則良の二人が和蘭に留学して海軍の事を修むるに当り，赤松の如き深く彼れの数学を学び，その学識の深いので後までも知られていた。西洋の微分積分を了解する為めには，柳等の如く和算の知識に依り之を解得したものもあるが，又支那で「代微積拾級」の書が漢訳せられ，之に依りてその了解を進めた事も少くないと云う。初等数学に就て同じく漢訳の「数学啓蒙」が飜刻された事もあった。西洋の幾何学様のものを度学と称して学んだものは，大阪の大塩平八郎の塾中などであったのである。けれども，西洋の書物に就て微積分学を学ぶなどは当時に於ては極めて難事であったと云う事である。西洋の数学は我国の数学者が自発的にその優秀を認めて之を採用せんとしたよりも，航海術，機械学，戦術等を学ぶの必要上から彼れの数学にも通ずるの必要があって之を修めるようになったのが当時の実情であり，純数学者は依然として和算の研究を進めていたのである。

かくの如くにして維新の変革に際会し，教育の制度に於て凡て西洋に学ぶ事になったので，数学も亦彼れに拠る事になった。列国競争の大舞台に登場し，彼れと角逐する事になって見れば，何うしても彼れの文物を採入れるより外に仕方がなかったのである。誠に止むを得ない。是に於て和算は自ら廃絶に帰した。初め和算の諸大家中には洋算に対して甚だしく反抗したものもあった。高久守静が和算を教える約束で学校の教員となり，和算の廃せられた為めに甚だ不満を感じて文相に提出した辞職理由書の如きは最も能くその情を語る。高久は「極数大成術」の作者にして，極数を

求むる算法を二重三重に適用する事を巧にし，極数術に於ては最も進歩した取扱いをした人である。彼以前この種の事が全く見えぬではないが，彼れに至りて最も発達したのである。他にも尚(なお)和算上の創意があった，和算家は多くは侍の仕事であったので，維新後には安閑としてその研究を続け得なくなった事も亦和算の急速に打撃も受けた一理由であったろう。和算家中には兼ねて洋算を学び，洋算の学習普及上に寄与した人も固(もと)より多かった。鏡光照，川北朝鄰，岡本則録など云う人々は即ちそれである。

維新以後には和算の諸大家はまだ多く存生した。けれども和算の研究は維新を限界として終ったと云って宜(よろし)い。和算書のこれ以後に刊行されたものも萩原禎助の「円理算要」など云う如(ごと)き有力なものも稀にはあるが，この種のものも尋(つい)で跡を絶ち，諸大家は相続いで凋落する。新たに和算を修めるものはない。否，剣持章行などの如(ごと)き和算の大家が明治の初年に於てもまだ諸方を教授して遂(つい)にその遊歴中に病歿(ぼつ)したようの例もあるし，大正年中に至りても和算を教授していたものが絶えてないではなかったけれども，維新以後に和算を学んで新らしい研究をするような事は全くなかったのである。故に明治十年に東京数学会社が設立された時は当時の和算，洋算の諸大家を網羅したのであり，同会社雑誌にも和算の問題に関する記述多く，これ等を和算の方法で研究する事が流行し，西洋数学を使用しての新研究はこうした方面から進んだのである。然(しか)るに和算家の勢力は次第に衰え数学会社の名を止めて数学物理学会と改称するに至った頃から後には，全く西洋風数学のみが盛行する事となったのである。

数学書の横書きも凡(およ)そその頃から始まる。維新以後の二十年前後の間に新研究と云うものは殆(ほと)んど見られなかったけれど，今や

西洋数学も大分整頓せられ，新らしい人物も次第に養成されてこの頃から新研究が見られるようになり，次第に進歩して今日の盛況を呈するに至った。その初めに在りては一方には諸学校の教授が甚(はなは)だ重いものであり，又一方には数学諸書の反訳や教科書の作製が極めて重大なる事業であって，第一流の諸大家は凡(すべ)てその道に精進したのであった。大学の諸教授が相率いて教科書の作者になったと云う如(ごと)き事も，注意すべき現象であったのである。

跋

今度，後継者大矢真一君の編輯で此書を東海書房から出して呉れられたのは，用紙も経済事情も自由でないのに，何と云う有難い事であろう。執筆以来幾年かを経過し，世上の諸研究も進んでいるので，訂正を要する所もあろうが，一通り取纏(とりまと)めてあるので，幾(いく)らか役立てばと希(ねが)う。所説の是非正邪は批判し評論して活用の課題にして欲しい。そうして知見を育成し教育上の一支柱ともされるならば仕合せである。

大正初年の頃には教育学の先覚者からも，教育上に役立つべき教学史の作製は殆(ほと)んど期待が得られなかった。然(しか)るに歳月の流れと共に教育の為めと云う依頼もあるし昭和十四年には文部省から関孝和事蹟を国語読本へ出すので相談があり，尋常(じんじょう)六年には無理ながら史実の尊重を條件に数回の協議と改訂を経て出来たのである。そこで不十分でも国定教科書への採用は，数学史の学徒には感銘であった。然(しか)るに岩波書店発行の教員参考用の刊行物に東京高師の某教授が，折角(せっかく)除外した俗説を記(し)るされたのは心ない業であった。それは関先生二百年祭記念の講演集に出たものであり，同じ見解は上野国藤岡の関先生彰徳碑にも刻せられている。此等は正確を望むべき歴史の精神に逆行し，科学尊重の所以(ゆえん)でもない。屡々(しばしば)こう云う事情のあるのは，我民族性の一大缺陥(けっかん)であり，当(まさ)に矯正さるべきである。

昭和十六年には東京府中等教育研究会数学部から府下の数学史蹟見学の手引として池袋の師範学校で講演を頼まれたが，此様な企ての進むのは嬉しかった。一般の歴史も従来は誤った偏見もあって，国のため民族の為に容易ならざる過誤をも醸したが，今や真

相を闡明(せんめい)して大に反省すべき心ばえが現われ始めて居る。此時に当り小学校が国民学校となり，関孝和の事は読本から消え，戦後に作られた「くにのあゆみ」にも文化の功労者若干(じゃっかん)名が挙げられながら，関孝和の除外は悲しい。

教育家たる賢者へ望みたいのは，史実は必ず重んずべく，一面には大勢全般の動向へも注意して欲しい事である。全般を見るものには細部の注意が行屈かず，細部を顧慮すれば大勢が見えぬ傾きがあるが，此両者は相待って進められたい。過去の分析だけが能ではなく，将来に生きる為の活きた血の通う拠点をつかんで戴きたい。そう云う態度，精神に熟達すれば，数学の学修も教授も普通に感ぜられるように無味乾燥ではなく，自発に充ちた興味の深いものとなろう。数学をも芸術的に開拓して欲しいのである。之(これ)に就(っ)き創元社発行の「文化史上より見たる日本の数学」の参照を乞いたい。民族性や伝統の力は大きいし，社会経済の事情で変化し発展する中にも，容易に動かぬものがあることが認められ，過去や現在の世界の動向にもそれが力強く顕われているのであり，今の如(ごと)き危急存亡の時に当っては愈々益々(いよいよますます)慎重であって欲しい。之を思うて数学の学修及び教授にも，過去の歴史を念頭に置かれて，自らも国も民族も力の及ぶ限り活躍の道の拓かれる事になる様にと念願されて止まないのである。

芸北の郷里甲立理窓院寓

三上義夫識

・『日本数学史』（東海書店、1947 年 10 月初版）所収。
・旧字・旧仮名遣いは、新字・新仮名遣いにあらためた。
・ただし、餘（余）、盡（尽）など、一部の漢字は旧漢字のままにした。
・読みやすさのために振り仮名を付加した。

科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/scilib.html

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内　「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs