数学に於ける具象性

石原　純

この問題に関して、私は先ず具象性と云う語の意味について少しく注意しておきたいと思う。それは近頃或る外国科学雑誌で、本年出版された Webster の、"New International Dictionary" 第二版に掲げられた "algebra" の語の解釈中に不適当な説明の見出だされることが指摘されているのを見たからである。同書の解釈に従えば、

「算術と代数との本質的な差別は、前者が具象的な量 (concrete quantities) を取り扱うのに反して、後者は或る与えられた数の領域 (number field) 以内にあるどんな値をも採り得るような記号を取り扱うことにある」

と云うのである。之は一寸見ると、そうかと思って見過ごしてしまう人々もかなりあるかも知れないが、併しもう一度考えなおして見ると、具象的な量を取り扱うとして算術を代数から区別するのは決して正しくないことがわかるであろう。なぜなら、具象的な量と云うからには、それは例えば3人と云い、5枚と云うように何かしら対象的な事物を算えた結果でなくてはならないので、勿論算術ではそう云う量に関する問題を取り扱うには違いないが、同時に例えば掛算の九々の表に於ける各々の数の如きものは純粋に抽象的な数と考えられるからである。そして他方では代数で取り扱う量も、たとえそれが或る範囲に横たわる数値を任意

に採ることはできるにしても、同じく具象的な量であることは少しも差支えはないのである。両者の差別は決して具象性と抽象性との相違にあるのではなく、その取り扱う対象が一方よりも他方に於てより一般的であると云うに外ならない。換言すれば、算術から代数に進むと云うのは、抽象性に於て高度の階段に上ると云うのではなくて、単に一般性を増すと云うことである。

　数学が原始的にいかに発生したかを尋ねるならば、云う迄もなくそれが何かしら実用上の計算を行う目的から由来していることは明らかである。かような計算そのものは何れも具象的な事柄に対応するものであるが、之を行うがために我々は数と云う観念を抽象し、その間に一定の規則を立てるようになったのである。恐らく数は我々の抽象的観念の最も基礎的なものの一つであって、従って数に関する規則に於て我々は一つの抽象的科学、即ち数学の最初の出発点を見出だし得たのである。数学が発達するに応じては、我々はもはや一つの数を何かしら具象的な事物に対応させることなしに、単に或る抽象的な概念として認めることによって、漸次それらの一般的な取扱い方法を追求するようになった。上に述べた算術から代数への発展は即ちその一例である。又数の概念の或る拡張、例えば正数の外に負数を導き入れること、実数の外に虚数及び複素数を導き入れること等は、取扱い方法を一般的たらしめるための便宜に依るのである。即ち正数だけに限れば、二つの数a、bに対して減算$a-b$は$a>b$でなければ不可能であるから、この制限を除くために負数が考えられ、又実数の範囲では負数の平方根が存在しないから、かようなものをも虚数として一般的な計算に取り入れると云う如き、既に周知の事柄である。かくして漸次適当に一般化された抽象的概念の上に数学が発達して行ったので、我々は普通にかような抽象的概念を取り扱うものを純粋の数学と見做(みな)し、之に反して

最初に述べたように何等かの具象的事物に対応する具象的概念を取り扱うものを応用数学と見做(みな)すのである。

数学の本質が上の意味での純粋数学にあると考えることは、「どこまでもそれの学問的特質を強調する観点からは至当であると云わねばならない。この限りに於てそれは純粋に抽象的、形式的なものであるが、我々に併(しか)し数学をかような抽象的科学としてのみ終始せしめることによって十分に満足し得るか否かは大いに疑わしい。我々はたとえそこに我々の思考形式の一つの限りなく美しい成果を仰視することができるにしても、それと同時に我々自身のそう云うみごとな産物の他の偉大な効果をむざむざと無視してしまうには寧ろ余りにも惜しいことを感じないわけにはゆかない。他の偉大な効果と云うのはそれの実用的価値である。勿論私は之を取り除いたものを単なる空理とか空論とか見做(みな)して侮蔑するような人々に与(くみ)することを躊躇するけれども、即ちそこに人間精神の一つの優秀性を知得することができるけれども、そしてこの意味で純粋数学の発展もまた人間文化の進歩の一部を形作るべきものには相違ないけれども、併(しか)しそれだけでは現実的な意味での人間文化には全く関しないことになるし、更に重大なこととしては、純粋数学の発展すらもそれの自然現象に対する応用によって甚だ多く誘導せられるのを忘れてはならないのである。

昔時、支那及び我が国に於ける数学は謂わゆる西洋数学と独立に発達し、十七世紀時代に於ては前者は必ずしも後者に劣るものではなく、或る部分に於ては却(かえ)って一歩を先んじた点がないではなかったのに反して、その後の時期に於ては何故に独り西洋数学のみが異常な発展を途げるに至ったかを考えるならば、我々は之を恐らく上述の関係に対する適切な事件として見做すことができるであろうと信ずるのである。即ち支那及び我が国に於て数学は余りにも抽象的にのみ取り扱われて、それの具象的な応用が殆んど顧みられなかった。之

に反して西洋では数学が自然を研究するための不可欠の道具として利用された。我々はガリレオ・ガリレイの次の言葉を想い出す。

「自然は唯々彼女が我々に語る言葉と象徴とを解するものによってのみ理解せられる。この言葉とは数学であり、この象徴とは数学的図形である。」

自然科学の発達は、自然と数学とのかような関係を益々如実に我々に示してくれた。我々は数学の具象性を最も明瞭に自然の中に見出だすことができると共に、より深く自然を研究するに従ってそこに語られる新らしい数学の「言葉」をいかに多く知ることができたかは、寧ろ驚くに足りる程である。

負数や虚数の概念が数の取扱い方法を一般的にするために導き入れられたことを上に述べたが、それらは既に最初の自然数なる概念が実際上の必要に応じて或る程度まで拡張せられてから後に行われたものであることを注目する必要がある。即ち個々の事物を算える代りに連続的な量を云いあらわすために分数又は小数の概念が作られ、又正方形の一辺とその対角線との比を採るような場合に無理数を必要とすること等が之に先だったのである。又解析幾何学や微積分学や変分法や種々の微分方程式とそれらを満足する多くの函数の発見や確率論の如きに至るまで、すべてそれらが自然の事物及び現象を記述するための必要によって成立し且つ発展したことを詳細に考究するならば、数学と自然との密接な関係が愈々明らかとなるであろう。解析数学の対象として数の外にヴェクトルやテンソルやスピノールが考えられるに至ったのもまた同様である。

数学の中には固(もと)より純粋な論理的演繹によって開拓された部分も必ずしも尠(すく)なくはないであろうが、併(しか)し今日までの数学発達史の重要な部分はそれの自然との関聯に於て見出だされると云う事実は、我々にとって数

学に於ける具象性を決して軽く見積もることのできないのを示している。数学に於ける新らしい発見は、たとえ常に或る論理的演繹によって結果すべきであるとは云え、かような論理的演繹を未到な領域に拡げてゆくためには、我々の思考をそこに向けるための何等かの機縁を必要とする。この機縁は単なる偶然によって恵まれることもあるであろう。が、併しそこにもまた何等かの原因が潜んでいるとも思われる。嘗てアンリ・ポアンカレはその著『科学と方法』に於て、数学上の発見が心理的にいかにして結果するかと云うことについて、多くの彼自身の体験に基づいて説明した。彼の挙げたのは純粋に抽象的な数学の場合であるが、ともかくもそう云う際に或る何等かの直覚、即ち一種の「突然な霊感」が起って来て思考をそこに向けてくれると云うのである、彼はこの霊感の起る意識状態を分析してみて、数学発見の秘密を解こうとした。これはすばらしく興味ある問題であるが、ここでは単に数学の歴史に於て自然に含まれている種々の関係が数学者に対して新らしい領域の開拓をなさしめたことを之と共に考え合せたいと思うに外ならない。若し自然のそう云う関係が先ず見出だされなかったならば、数学者がいかに思考を費したところで、純粋にそれだけで同じものに到達すると云う機会は容易に来なかったかも知れない。

ポアンカレはこの考察に於て、数学が純粋な知的構成をもつと共に、この構成にはおのずからにして優美や調和や典雅の感を具えていると云うことを指摘し、質の偉大な数学者に於ては之に対する審美的感情が潜在的意識となって働き、理性的な意識活動のゆき詰まる処にそれが無意識に有力な道案内者となるのであると説いている。

「数学を理解しない人々があるのは如何なる理由によるのであろうか。若し数学が健全な精神をもつ凡

ての人々の承認する論理の法則以外には何ものをも要しないものならば、若しまた数学の証明が狂人でない限り何人も否定し得ない万人に共通な原理の上に基礎を置くものならば、全然数学に向かない人々のかくも多いのは如何なる理由によるのであろうか。」（訳文は吉田洋一氏による。以下同じ）

「凡ての人が必ずしも発見を為し得ないことは何等怪しむに足らない。凡ての人が必ずしも前に学んだ証明を記憶し得ないのも尚首肯されよう。併しながら現に数学上の推理を説明されているその場に於てさえ、必ずしもこれが理解されないと云うに至っては、一考すれば頗る驚嘆すべきことのように思われる。しかも辛苦して纔かに理解し得る人々の方が大多数を占める。これは争うべからざる事実であって、中等学校の教師の経験は必ず余の言に反かないに相違ない。」

「それのみではない。数学に誤謬の生じ得るのは何によるのであろうか。健全な知性は論理の謬りを犯さない筈である。然るに極めて鋭敏なる精神を有して日常現われる如き短い推理には躓かないにも拘らず、数学上の証明を謬りなく辿ったり、若くは繰返したりする力のない人々がある。しかも数学上の証明は比較的長いけれども、畢竟彼等がかくも容易に成し遂げる推理と全然類似の短い推理の相重なったものに過ぎないのである。数学者自身さえも謬りを犯さないとは限らぬことは、附け加えて云う迄もないであろう。」

かような数学に対する理解の困難さや誤謬の発生は、既に証明せられたものに対する記憶の忘失又は過誤によることのあるのは、例えば掛算の九々を思い違えて計算を誤る如き事例で見られるが、それだけではなく、却って大体に於ては、或る一種の調和を有する数学上の秩序への直覚的な洞察によって始めて数学の理解が

可能となり、又発明創造に導くのであるとポアンカレは云うている。そして数学の大家が必ずしも将棋の名人でなく、逆に将棋の名人が数学の大家になり得ないと云う理由もここにあるので、「余に至っては同じく将棋を指しても極めて拙劣であろうと思う」と彼は云う。（勿論、将棋などでも駒組の形のよさわるさを云々する如き場合のあるのは、やはり一種の調和がそこに隠れているとも見られるので、之を洞察する才能のある人が将棋の名人となり得るのは。数学の場合と同様であろう。）

数学に於けるかような隠れた調和が数学者に感ぜられるのと同様、自然に於てもあらゆる調和が見出だされるのは云う迄もないことであり、しかも自然の調和は極めて具象的に我々に現われるのである。そしてこれこそ我々が自然の問題を解くに当って数学を利用することができる理由であり、且つ調和ある数学的関係がその儘自然のなかに見出だされると云うことが数学の具象性を形作ると共に、自然を知ることによって数学の新らしい発見がなされ、若（もし）くはその理解を助ける所以（ゆえん）となるのであると思われる。

最も簡単な例として、幾何学に於ける点や線や面や立体や、並びに之等に関する一切の定理を考えて見る。純粋に形式的な論理体系として幾何学を見るならば、之等はその前提として与えられる公理を満足しさえすればよいので、必ずしも我々が実在の空間に於て経験的に知るところの点、線、面、立体の如きものがそれであるとすることを要しない筈である。我々は点、線、面、立体などの言葉の代りに、他の任意な名称を之等に与えて幾何学を形作ることができるであろう。併（しか）し我々が最初からそう云う抽象的な幾何学を学んで多くの定理を理解することの困難は恐らく容易に推察されるのであって、既に数学に深く馴れ親しんでいるものでない限り、之等を直観的に実在の空間に於ける具象的な対象と対比することによってどれだけその理解

を増すかは測り知れない程である。現に初学者にとって非ユークリッド幾何学の理解し難いのは之が直観を超越しているからである。恐らく空間に対する経験なしには、我々は恐らく幾何学をさえもつことができなかったかも知れない。

要するに、数学に於ける具象性は数学それ自身のためにすらも極めて重大な役目を負うているのである。更に一般の人々にとっては、それは数学の理解に対して多大の便宜を与え、且つ之によって数学の実用的な価値を見出だすことができる。之を棄て去った数学を純粋に抽象化することは、単なる観念的思考としては或は可であるかも知れないが、それは恰（あたか）も肉体をもたない人間を理念するのと同様に、徒（いたず）らに数学を偏愛して之を現実世界から遊離せしめるに終るであろう。

（教育、昭和十年八月号）

- 『自然科学的世界像』（岩波書店、一九四〇年二月、第四刷）所収。
- PDF 化するにあたり、旧仮名遣いは新仮名遣いに改めた。
- 旧漢字は新漢字に改めた。
- 読みやすさのために、適宜振り仮名をつけた。
- PDF 化には $\LaTeX\,2_\varepsilon$ でタイプセッティングを行い、dvipdfmx を使用した。

科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」

`http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html`

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内、その他「科学図書館」に関する意見などは、「科学図書館掲示板」

`http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs`

を御覧いただくか、書き込みください。