不確定関係の直観的導き方への注意

天野　清

Heisenberg の不確定関係の直観的導き方に対しては，今尚不満足の意を表明し，根本的なものではないとする人がある[1]。

数学的導き方に対して直観的導き方の特徴ある点は，前者が確率論の基礎に立つに反し，後者は一つの Elementarteilchen の粒子—波動二元性を利用した因果的考察に依って居る事である。此の置き換えは，唯一群の kompatibel な測定で Anfangs-bedingungen を決める場合には äquivalent であるが，次の測定で諸々の可能性の中から或る一つの特定の値が偶然に選び取られる場合は，もはや適用出来ない。斯様な特定値の現実的撰択は，量子力学の数学形式で取扱えない事実であって，所謂 Wellenpaket の Reduktion という不連続が入る場合に該当する。然るに古典的なモデル的見方では，一つの Elementarteilchen に就て，前の測定値と後の測定値との間に因果的，連続的な結合を考えるので，数学的形式と矛盾するのも当然である[2]。不確定関係は過去の値に関するものではない，という稍不精確な主張も此の事情に由来する。或る時間間隔を以て行われた適当な二回の測定に依り，古典的・因果的な考えからは，両測定の中間域に於ける変数の値を，不確定関係の表わすよりも正確に算出出来る[3]。而も斯く算出された中間域での値が量子力学的に無意味であることの理由に就ては，種々意見があるが、中間域では何等の観測も行えないから物理的に無意味であるとする見解や，二回目の測定の際の擾乱の為に中間域での値が，将来の実験のための Anfangsbedingung たり得ないから興味がないものだとする意見は不十分である[4]。寧ろ二回目の測定で得られた値が偶然な選択であること，換言すれば，ある一つの特定の値が撰られ

---

[1] 例えば，J. Frenkel, Wave mechanics, elementary theory, p. 50 以下で観測による擾乱は，iudeterministic な特徴をよく表わさないという。

[2] A. Einstein が 1927 年の Solvay 会議で提出した paradoxien を初めとして，此の喰い違いに連関した背理は甚だ多い。

[3] A. Einstein, R. C. Tolman, B. Podolsky (Phys. Rev. Vol. 37, p. 780, 1931) が過去に就ても正確な知識が得られぬと主張したのは，この中間域に就てでなく，第一回の測定以前の過去を論じているのである。

[4] Vol. C. G. Darwin, The New Conception of Matter, p. 100; W. Heisenberg, Die physik. Prinzipien der Quantentheorie, S. 15; 其地 N. Bohr, Atomtheorie und Naturbeschreibang, S. 43;: M. V. Laue, Korpuskular-uud Wellentheorie, S. 77. (Handbuch d. RadiologieVI/1 等をも参照せよ。

た事は偶然であって，之へ因果的モデルをあてはめる事は，法則を設定する物理学には無意味であるという理由に帰すべきである[1]。之は確率論的思想に基いて居るのであって，古典的な思考実験の関知し得ぬところである。

若し中間域での不可観測性や，将来の実験に Anfangsdedingung として利用出来ない事だけを理由にすると，次の様に疑わしい場合を生じる。

今，一つの粒子から，質量の甚だ小さい第二の粒子が非常に小さなエネルギーを以て発射され[2]，よって元の粒子はこの発射により運動量に殆んど変化を起さず，又第二粒子と第一粒子の相対速度は，外部から擾乱を加えない限り非常に小さい事が前以てよく知られて居るとする。然らば，崩壊する以前の第一粒子に就て運動量を正確に測定しておき，偶ま，第二粒子の位置を正確に知り得れば，第一の粒子の未来の軌道は不確定関係の表示するよりも正確に算出される[3]。この背理は第二粒子の位置測定が偶然な撰択であることに基く。それ故，普通直観的にやる様に唯一つの粒子に就て測定せず，数多の粒子に就ての統計的結果を見るか，乃至，一つの粒子へ確率的な考えを適用すれば，偶然の撰択は平均されてなくなるから背理は消滅する。

Heisenberg, Darwin, Kennard 等の方法に従い，初め $(t=0)$ の測定の Ungenauigkeitsmass を，各成分に就き，位置座標では σ，運動量では ξ とすれば，後の $(t=t)$ 実験で粒子を (x,y,z) なる場所の体積エレメント $dx\,dy\,dz$ 中に再発見する確率は[4]

σ で書けば

$$P\sigma(x,y,z,t)dxdydz - \frac{(x-v_xt)^2+(y-v_yt)^2+(z-v_zt)^2}{\sigma^2+\left(\dfrac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2}dxdydz$$

---

[1] L. de Broglie は Introduction a l'etude de la méchanique ondulatoire 中で (p. 176–177) 確率的な考えに基いて，第二回測定値の散乱を述べている。

[2] この仮定は，現在の量子力学の形式では原理的には拒け得ない。

[3] 初めの運動量の測定に際し，まだ第一粒子が確かに崩壊して居ない事を知るには，崩壊後両粒子に正負の電荷を生じる等の特殊な仮定を要する。

[4] W. Heisenberg (ZS. f. Phys. Bd. 43. S. 172)，C. G. Darwin (Prac. Roy. Sac. vol. 1.)，E. H. Kennard (ZS. f. Phys. Bd. 44.)

de Broglie の前掲書中にあるようなものを normalise して得る。筆者は特にここで此の確率密度を再発見率 (Wiederfindbarkeit) と名付けて，相次ぐ二つの実験に於ける此の確率の重要性に対し、一般の注意を喚起したい。Landau u. Peierls の Veraussagbarkeit と比較せよ。

$$= \frac{1}{\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left[\sigma + \left(\frac{ht}{2\pi m\sigma}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} e$$

ξ で書けば

$$P_\xi(x, y, z)dxdydz - \frac{m}{t}\frac{(x - v_x t)^2 + (y - v_u y t)^2 + (z - v_z t)^2}{\xi^2 + \left(\frac{hm}{2\pi t\xi}\right)^2}dxdydz$$

$$= \frac{m^3}{\pi^{\frac{3}{2}}t^3\left[\xi^2 + \left(\frac{hm}{2\pi t\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} e$$

一見して明かな如く，σ，ξ を小さくすれば――即ち，最初の測定を正確にすればする程――適当時間が経過した後に見出される確率の最も大きいところ，即ち，Wellenpaket の Maximum[1)] に於ける再発見の確率密度は小さくなる。之は最初の測定が正確なほど再発見は益々偶然になる事を示すものに外ならない。

以上によれば，粒子―波動二元性を利用する直観的・因果的な論議は Anfangsbedingung の不確定関係にしか適用されない。之は直観的導き方の不完全を曝露するものであろうか？ 若し，数学的取扱を具体化して，わかり易くするのが目的ならば，そう言わねばならないであろう。然し，実は直観的導き方の方法論的意義は全く別の処に存する。

我々の実験では，測定器械は古典的―因果的なものとして makroskopisch に取扱わねばならないから，此の器械を原子的な対象へ適用するには，対象の Anfanfsbedingungen を多少とも直観的に意味づけて置く必要がある。然らざれば実験は一般に不可能となる。然るに量子力学の要求する不決定性と斯かる直観的意味づけとが矛盾しない為には，経験上確められた古典的概念が，正に不確定関係の要

1) この場合 Exponential の部分は 1 になる。再発見の確率密度の最大となるのは，σ と t の間に $\frac{m\sigma^2}{t} = \frac{h}{2\pi}$ なる関係の成り立つ場合であるが，$\frac{m\sigma^2}{t}$ は二つの位置の観測で測った ΔP_x と考えられるので，$\Delta P_x = \frac{h}{2\pi}$ という外見上 Heisenberg の不確定関係と似た式が得られる。$t < \frac{2\pi m\sigma^2}{h}$ 以後，σ の小なる程，確率は小となる。

求する程度迄しか妥当しない事を示す必要がある。此の目的には古典的—因果的直観の適用そのものが，これまた経験上確められた結果である。光若くは物質の粒子—波動二元性のために，不確定関係の示す如き不可知性 (Unbekanntheit) を招来する事が証明されればよい[1] 。之が直観的導き方の使命である[2] 。従って古典的—因果的であって，本来の不決定性 (Unbekanntheit) を導かないのは事実であるが，之を以て直観的導き方の不完全性を云為するのは，その使命を理解しないものと言い得る。本来の不決定性は量子力学の数学的形式が示し，此の形式の，無数の Spektroskopisch な材料や，統計学に於ける非ボルツマン的数え方等により経験的に確められて居る事は，此処に新らしく言うを俟たない。

附言——近来，不確定関係の相対論的領域への拡張は益々重要な事となって来た[3] 。併し J. v. Neumann が指摘した如く，相対性理論に於ける無限多義に基く不決定性と，量子力学の不確定関係の表示する意味づけの不可能性とは論理的に別のものであるから[4] ，所謂不確定関係の拡張が論理的に homogen でない事を注意せねばならぬ。(1934.5.30)

---

[1] 従って，この証明の形式は，Heisenberg の所謂 ‘粒子—波動二元性による古典的直観像の批判’ となる。

[2] この直観的導き方の使命，その因果的性格は特に鋭く，J. v. Neumann，Quantenmechanik，s. 125. f. で強調されて居る。但し Neumann が古典的因果性を強調するの余り，粒子—波動二元性の使用を重視せず，註へ追いやったのは如何であろうか。

[3] Landau u. Peierls, Schrödinger 等の初期の試みに対し，最近の W. H. Furry 及び J. R. Oppenheimer (Phys. Rev. Vol. 45. p. 245, 1934) の位置と粒子数の Komplementalität の如き。尚 P. Jorden. (ZS. f. Phys. Bd. 87. S.505) を参照せよ。

[4] v. Neumann. 1 c. S. 171. f.

PDF 化にあたって

本 PDF は，

『科学史論』（「天野清選集 2，日本科学社，1948 年 11 月）

を元に作成したものである。

PDF 化にあたって，旧漢字は新漢字に、仮名遣いは新仮名遣いに変更した。漢字の一部には振り仮名をつけた。

科学の古典文献を電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

に収録してあります。

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs

を御覧いただくか，書き込みください。